

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材



随机存贮 理论与应用

SUIJI CUNZHU LILUN YU YINGYONG

胡则成 罗荣桂

宋德昌 喻小军

华中理工大学出版社

随机存贮理论与应用

胡则成 罗荣桂 宋德昌 喻小军

华中理工大学出版社

内 容 提 要

本书从理论与实践相结合的角度出发,介绍了一些常见的存贮模型。其内容包括:存贮论的有关知识、存贮论中常见的随机过程、单品种确定性存贮模型、单品种周期盘点和连续盘点的随机存贮模型、多品种和多层次的存贮模型、扩散型随机存贮模型以及随机存贮模型的灵敏度分析等。全书论述深入浅出,结构严谨,叙述简明扼要,并有许多实例说明其应用。

本书可作为高等学校运筹学、应用数学等专业的高年级学生以及管理工程、系统工程、自动控制和计算机应用等专业的研究生的教材或参考书,也可供上述有关专业的教师、工程技术人员和管理干部阅读和参考。

随机存贮理论与应用

胡则成 罗荣桂 宋德昌 喻小军

责任编辑 钟小珏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本: 850×1168 1/32 印张: 11.125 字数 277 000

1994年3月第1版 1994年3月第1次印刷

印数: 1—1 000

ISBN 7-5609-0946-9/O · 121

定价: 6.80 元

(鄂)新登字第 10 号

前 言

运筹学作为一门新兴的交叉性学科，其发展却经历了一段曲折而富有成果的辉煌时期。而今，运筹学的内容非常丰富，分支也很多。作为运筹学一个重要分支的存贮论 (Inventory Theory)，是用量化手段建立存贮模型，研究各类存贮问题的存贮方案，探索存贮控制的方法。具体地说，它是研究何时订货或组织生产；以及订多少货或生产多少数量的物品，使系统的总支出最小或总收入最大的问题。存贮论和运筹学的其它分支一样，与自然科学、技术科学，特别是与管理科学和社会科学有着密切的联系，具有很强的应用性；其理论与方法在现代管理、工程技术、社会经济、军事决策等诸方面起着重要的作用。

大体上来说，存贮论起源于 19 世纪末期关于金融系统保持多少现金流的问题。早在 1915 年，F. Harris 就商业系统的存贮问题建立了一个简单的确定性存贮模型，并得到了订货的最佳批量公式： $Q = \sqrt{2KD/h}$ ，即后来的 Wilson 公式。但是，从理论发展上讲，K. A. Arrow 和 T. M. Whitin 等人在 50 年代所做的工作是现代存贮理论的奠基性工作。二次世界大战以后，人们对随机和非平稳需求的存贮模型进行了广泛和深入的研究，同时还研究了具有随机滞后时间以及多品种、多层次的存贮管理系统。特别是近几年来，随着计算机的迅速发展，使存贮进入了计算机管理和决策的时代，同时也为管理信息系统和决策支持系统提出了许多新的研究课题。

目前，我国在存贮理论与方法的研究，特别是应用研究方面，做出了不少卓有成效的工作，也取得了一定的社会经济效益。但是，当前最突出的问题是理论与实际脱节。这表现在：理论上，许多存贮模型仅仅是为了数学上处理问题的方便而建立的，与实际问题有较大一段距离；实践上，由于企业组织管理水平较低，经

营环境多变,加上决策者行为的不科学干预,使得不能建立一个合理的实用的存贮模型,因而给存贮理论的应用带来一定的障碍。尽管如此,存贮管理的实际需求是相当迫切的;不少成功的应用实例所产生的经济效益是十分显著的;在理论和实践中值得研究和探讨的新问题也是层出不穷的。我们深信,存贮理论将始终是运筹学中一个十分活跃的研究领域。

本书试图以基本的与统一的观点来建立存贮论中赖以立足的各类存贮模型,特别是随机存贮模型,从而为希望进入该领域的读者提供一种存贮问题的建模方法和寻求解决问题的途径。由于存贮论的内容委实太多、太泛,其文献浩如烟海,加之随机存贮问题中各种条件可能的变化又很多,使得模型变化万千,因此作者只能凭自己的所见和偏好,择取其中可自成体系的材料,作为立论著说的根据。这样,使本书无论是理论或应用方面均不可能完美无缺,甚至挂一漏万。

本书主要题材是根据作者近几年来发表的论文、为研究生讲课时用的讲稿以及参阅国内外有关文献撰写而成。全书共九章,第一、二、三和八章由胡则成执笔,第四、五章由宋德昌执笔,第六、七章由喻小军执笔,第九章由罗荣桂执笔。全书由胡则成统稿。

本书可作为高等学校管理工程、系统工程、自动控制和计算机应用等专业的研究生以及应用数学、运筹学等专业的高年级学生的教材或参考书;同时也可供上述有关专业的教师、工程技术人员和管理干部阅读和参考。

本书初稿承蒙中国科学院数学物理研究所范文涛研究员详细审阅,并提出了许多宝贵意见,使得本书内容更加充实。对此,谨致以诚挚的谢意。

作者

1993年3月于武汉

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 存贮论的发展历史与现状	(5)
§ 1.3 需求量预测的若干方法	(12)
第二章 概率论的准备	(31)
§ 2.1 概率空间、随机变量及分布函数	(31)
§ 2.2 矩和特征函数、条件期望	(39)
§ 2.3 随机过程概述	(46)
§ 2.4 二阶矩过程及其微积分	(50)
第三章 随机存贮理论中常见的随机过程	(64)
§ 3.1 普阿松过程	(64)
§ 3.2 更新过程	(77)
§ 3.3 马尔可夫链	(86)
第四章 单品种确定性存贮模型	(104)
§ 4.1 连续盘点的单品种确定性存贮模型	(104)
§ 4.2 具有可变需求率的连续盘点的单品种存贮模型	(128)
§ 4.3 周期盘点的单品种确定性存贮模型	(136)
第五章 单品种周期盘点的随机存贮模型	(156)
§ 5.1 无准备费用的单周期存贮模型	(156)
§ 5.2 有准备费用的单周期存贮模型	(163)
§ 5.3 无准备费用的多周期存贮模型	(170)
§ 5.4 有准备费用的多周期存贮模型	(181)
§ 5.5 具有稳定状态、周期盘点、无限周期的存贮模型	(187)
第六章 单品种连续盘点的随机存贮模型	(195)
§ 6.1 即时交货、离散需求的存贮模型	(195)
§ 6.2 无滞后时间、离散需求的存贮模型	(201)
§ 6.3 有固定滞后时间、离散需求的存贮模型	(206)
§ 6.4 有固定滞后时间、连续需求的存贮模型	(211)

§ 6.5 有随机滞后时间的存贮模型	(222)
第七章 多品种和多层次的存贮模型	(229)
§ 7.1 多品种和多层次存贮问题的有关概念	(229)
§ 7.2 多品种的确定性存贮模型	(233)
§ 7.3 两品种、单周期的随机存贮模型	(248)
§ 7.4 多品种、单周期的随机存贮模型	(265)
§ 7.5 两层次、单品种的随机存贮模型	(274)
第八章 布朗运动与扩散型随机存贮模型	(282)
§ 8.1 布朗运动与 T_{to} 积分	(283)
§ 8.2 扩散型随机存贮模型	(297)
第九章 随机存贮模型的灵敏度分析	(302)
§ 9.1 引言	(302)
§ 9.2 一个度量系统服务水平的函数的重要性质	(305)
§ 9.3 最优性条件	(308)
§ 9.4 随机模型与确定性模型 (EOQ 模型) 的比较	(316)
§ 9.5 一些计算结果与有关评注	(328)
§ 9.6 具有完全再分配的二层次存贮控制系统的分析	(332)
参考文献	(347)

第一章 绪 论

§ 1.1 引 言

1.1 存贮问题的提出及重要性

工业化大革命改变了传统的社会生产方式,复杂的大规模机械化生产代替了简单的手工操作生产。对简单的个体劳动而言,由于生产的单一性,显示不出对生产施行管理的重要性;生产者同时兼为管理者,在生产技术水平一定的情况下,为了增加利润,只有通过简单的扩大生产规模来实现。然而,对一个现代化生产系统,情形就不相同了,由于生产的复杂性及自动化程度的提高,系统的决策者(或称管理者)如何决定生产、组织生产将对其经济效益产生巨大的影响。因此,如何对生产过程进行科学的管理就变得十分重要了。

为了使生产和经营活动有条不紊地进行,一般的工商企业总需要一定数量的贮备物质来支持。例如,一个工厂为了连续进行生产,就需要贮备一定数量的原材料或半成品;一个商店为了满足顾客的需求,就必须有足够的商品库存;一个银行为了进行正常的业务,就需要有一定的货币余额以供周转;一个医院为了抢救病人,更需要一定的药品存贮;等等。因此,存贮问题是人类社会活动,特别是生产经营活动中一个普遍存在的问题。物质的存贮,除了用来支持日常的生产经营活动外,有库存的调节还可以满足高于平均水平的需求,同时也可以防止低于平均水平的供给。此外,有时大批量货物的订货或利用货物季节性价价格的波动,可以得到价格上的优惠。

存贮物质,需要占用大量的资金和人力、物力,有时甚至造成资源的严重浪费。据有关资料表明,1976年美国制造业与贸易业的库存帐面值高达2760亿美元,相当于同年美国国民生产总值的17%,其中还不包括地方与联邦政府及军方所占有的巨大库存。可见,大量的库存物质所占用的资金,无论从相对数值还是绝对数值上来看都是十分可观的。此外,大量的库存物质还会引起某些货物劣化变质,造成巨大损失。例如,药品、水果、蔬菜等,长期存放就会引起变质。特别是当今社会,过多地存贮物质还将承受市场价格波动的风险。

那么,一个企业究竟应存贮多少物质为最适宜呢?对这个问题,很难笼统地给出准确的回答,必须根据企业自身的实际情况和外部的经营环境来决定。若能通过科学的存贮管理,建立一套控制库存的有效方法,使物质存贮量减少到一个很小的百分比上,从而降低物质的库存水平,减少资金的占用量,提高资源的利用率,这对于一个企业乃至一个国家来讲,所带来的经济效益无疑是十分可观的。

当今社会,随着科学技术的迅猛发展,企业生产规模的不断扩大,产品结构和经营环境的日趋复杂,科学地组织生产、控制库存将成为现代企业生产、经营管理中的一个重要课题。

1.2 存贮问题的描述及存贮模型的结构

物质的存贮,按其目的的不同,可分为三种:①生产存贮,它是企业为了维持正常生产而储备的原材料或半成品;②产品存贮,它是企业为了满足其他生产部门的需要而存贮的半成品或成品;③供销存贮,它是指存贮在供销部门的各种物质,直接满足顾客的需要。一个存贮问题,可用“供——存——销”三个字来描述,即一个系统通过订货,以及进货后的存贮与销售来满足顾客的需求。在这个系统中,决策者可通过控制订货时间的间隔和订货量的多少来调节系统的运行,使得在某种准则下系统运行达到最优。

任何一个决策都由三个基本要素,即目标、现实和策略所构成。存贮管理与决策同样如此,它应包括以下三个方面:

(1) 根据系统运行的历史资料,进行评价目标的确定,构造该系统的存贮模型,用以描述该存贮系统的性态;

(2) 对所构造的存贮模型进行优化,导出最优存贮策略;

(3) 运用计算机保管存贮水准的记录,并发出何时补充存货以及每次补充多少的信息。

一个存贮模型的结构应包括下述四个内容:盘点方式、费用结构、目标函数和存贮策略,现分述如下。

(1) 盘点方式:一个存贮系统,有连续盘点和定期盘点两种方式。通过连续或定期(或称周期)盘点货物,摸清系统的库存水平,以确定何时发出订货决策。

(2) 费用结构:它是评价存贮控制优劣的主要指标。与存贮有关的费用通常包括订货、保管、缺货损失以及控制系统所需的费用等。当货物存贮多个周期后,为了考虑货币的时间价值有时需引入贴现率的概念。

(a) 订货费:它是每次从订货到货物入库所需的全部费用。其中包括订购手续费和购置费(即货物的价格、运费和运输过程中的损耗等,它与订货量、运输方式和距离等有关)。

(b) 存贮费:这是一笔从货物入库到出库的整个时间内,由于货物保管存贮所需要的费用。例如,保管费、保险费、纳税费及损耗费等。

(c) 缺货损失费:它是用来衡量缺货所造成的损失,在实际问题的处理时往往难以确定。在未满足需求后又得以补充(即有积压)的情况下,其缺货损失费通常随缺货量和延期时间而变化;如果未满足的需求被丧失(即无积压),则缺货损失费只与短缺的数量有关。

(d) 系统控制费:即是指系统为获得决策所需的费用,如计算机费及其他执行费用等。这笔费用在讨论存贮系统的费用时往往

被略去。

另外,还有一种费用称为利旧费。一件货物的利旧值即是指在存贮期终止时这件剩余货物的价值;而利旧值的反面称为利旧费。若在处理一件货物时有一笔相关的费用,则利旧费可能为正。通常把利旧费并入存贮保管费中,因此而费用略而不论。

(3) 目标函数:它是选择最优策略的某种准则。常见的目标函数为系统的平均费用(或利润)以及平均折扣费用(或利润)。其相应的最优策略是使费用达到极小或利润达到极大。

(4) 存贮策略(或称控制策略):它给出该系统何时补充货物、每次补充多少货物的一个方案。一个存贮系统的一般模式如图 1.1 所示。由于生产或销售

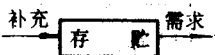


图 1.1 存贮形式

的需要,从存贮中取出一定数量的库存货物,这种需求称为存贮需求;贮存的货物由于不断输出而减少,必须给予及时的补充,这种补充对存贮系统来说称为输入。货物的补充可以通过外部订货、采购等进行,也可以通过内部的生产来得到。

从订货到货物进入仓库,往往需要一段时间,这段时间称为滞后时间。因此,为了能及时补充存贮,必须提前订货。滞后时间,可以是事先预测的,也可以是随机性的。

企业的生产,一般是有规律地进行的,而且保持着一定的均衡连续性。所以,对库存货物的需求往往是可以预测的,甚至在相等的时间区间内,其需求量是相同的,这种需求可视为一个常数。然而在销售活动中,需求常常不是可以完全预测的,往往带有某种随机性。不过,可以通过对以往历史数据的统计分析或基于对现有市场销售量的调查分析,在掌握了大量的有关资料以后,也往往可以发现其统计规律。

因此,对一个存贮系统来说,需求可以是一个常量,也可以是一个不稳定的量,甚至是一个随机变量。对需求量特征的掌握是制定一个合理的存贮策略的重要前提。在存贮控制中,需求方面只是

服务对象,并不是控制对象,可以控制的是系统的输入过程。控制定货的时间和订货的数量,就形成了存贮控制的策略。常见的存贮策略有下述几种:

(a) t 循环策略:以周期 t 盘点,每经过一个周期 t 发出一个订单,该时刻补充存贮量为 Q ,使库存水平达到 S 。这种策略方法有时称为经济批量法。

(b) (s, S) 策略:一旦系统的库存量 x 低于某个规定的最低库存量 s 时,则立即订货,使库存水平达到 S (实际补充库存量为 $S - x$);否则,不予订货。

(c) (s, Q) 策略:一旦库存量下降到 s 时,则立即发出一个订货单,其订货量为 Q ;否则,不予订货。其中, s 称为订货点。

注意,上述 (s, S) 策略和 (s, Q) 策略无论对连续盘点或定期盘点都是适用的。

因此,对一个存贮问题的完整描述,需要知道需求、供货的滞后时间、缺货的处理方式、系统的费用结构、目标准则以及所采取的存贮策略。有了上述这些内容,系统的决策者就可以通过寻求最优策略,发出何时订货、每次订购多少货物的决策,以实施对系统的实时控制。

§ 1.2 存贮论的发展历史与现状

2.1 存贮论的发展历史

早在 1915 年, F. Harris 针对银行货币的储备问题进行了详细的研究,建立了一个确定性的存贮费用模型,并求得了解,即最佳批量公式 $Q^* = \sqrt{2KD/h}$ 。1934 年 R. H. Wilson 重新得出了这个公式,后来人们称这个公式为 Wilson 公式或经济订购批量公式(简记为 EOQ 公式)。这是对存贮论进行的启蒙工作。存贮论真正作为一门理论发展起来却是在本世纪 50 年代的事。

K. A. Arrow 和 A. Dvoretzky 的工作是对现代存贮理论进行的基础性工作。K. A. Arrow 等人在 1958 年写的 *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production* 一书中提炼了生产存贮问题中的数学理论。此后,存贮理论成了运筹学中的一个独立分支,并陆续对随机或非平稳需求的存贮模型进行了广泛深入的研究。其代表作有 A. M. Wagner 等人的《*Dynamic Version of the Economic Lot Size Model*》(1958 年),A. F. Vemott 等人的《*The Optimal Inventory Policy for Batch Orderings*》(1965 年)等。近 20 年来,国外学者已研究出了具有随机滞后时间和多品种、多级的以及扩散型生产的存贮管理系统。

随着计算机的发展,目前存贮问题进入了计算机管理时代,建立了计算机管理的物质存贮管理信息系统,为库存管理的科学化、现代化在理论和实践方面奠定了基础,同时也提出了许多新的研究课题。

我国运筹学工作者在存贮论的理论和应用方面也做了很多工作,如顾基发等人的《(T, Q, ss, s) 型国家控制物质库存控制模型》一文,就是针对我国国控物质管理的特点建立起来的一种适合我国国情的控制模型。还有其他一些有关存贮论的理论和应用的文章,在这里就不一一列举了。

2.2 存贮论的近代发展

存贮论从它的产生到现在虽然还不到一个世纪的时间,但由于其应用广泛,特别是计算机的迅速发展,促使它得到很快的进展。尤其是在理论研究中有了很大的突破:从开始研究确定性存贮模型到随机存贮模型;从研究单品种单级存贮模型到多品种多级存贮模型;从一维扩散型存贮模型到多维扩散型存贮模型等。所有这些研究使存贮理论更加接近于实际,但相应地数学处理和存贮策略都将十分复杂。

目前,在存贮理论研究中比较活跃的领域有:易腐性物质存贮

理论、具有可靠性类型的存贮问题、现金管理中的存贮问题以及多维扩散型存贮问题等,现分别介绍如下。

1. 易腐性物质存贮理论

在一般的存贮问题中,所存贮的物质,其使用寿命保持不变,即其物质的寿命认为是无穷的;而对易腐性物质,有其特殊的性质。例如血库中的血液,即使存放在 4°C 的环境里,最多也只能放 20 来天,否则就要报废,其寿命为一个常数。又如副食品、药品、武器弹药等一类物质,其使用寿命是无法预先确定的,通常是把这类物质的寿命视为非负的随机变量来处理。

对于这类易腐性物质,在研究其存贮问题时,除了考虑订货费、存贮费和缺货损失费外,还有一笔过期损失费。例如,对血液来说,如果库存血液过多,则必有一部分以前采集的血液由于未被提取而过期报废。这些过期而被报废了的血液就招来了一笔损失费。因此,研究这类易腐性物质的存贮管理是一个很复杂的问题。

2. 可靠性类型的存贮模型

经典的存贮模型,一般是在考虑了货物的订货费、存贮费和缺货损失费等的基础上,确定货物的存贮水平,使系统总费用的期望值达到极小的存贮策略。然而在实际应用中,特别是在市场经济不发达、管理水平较低的地区,对于缺货所造成的损失费用(直接的或间接的损失,特别是间接损失,如产品信誉等)无法确定,从而给该类存贮模型的应用带来了难以逾越的障碍。60 年代初,匈牙利学者 A. Prekopa、Z. W. Birnbaum 和 F. H. Tingey 等人避开了经典的存贮模型,提出了另一种比较实用的所谓可靠性类型的存贮模型。

可靠性类型模型的基本思想可以表述如下:设企业 B 以固定的速度消耗某种原材料,在某一周期开始前, B 企业与 A 企业签订合同,该周期内 B 所需的原材料全部由 A 提供; A 可以分若干次交货,但交货的具体时间不能事先确定。为确保生产顺利进行, B 企业在周期开始时需要有一定数额的原材料储备。试问:究竟需要储

备多少原材料才能使 B 维持正常生产?这个问题可归纳成下述基本模型:假定在一个固定的 $(0, T)$ 内,其交货次数 n 已定,且设:
 ① B 企业在 $(0, T)$ 中连续使用这种原材料,其单位时间内的用量 c 为常数;② 交货时间是随机的, n 次交货时间均是 $(0, T)$ 中独立同分布的 n 个均匀随机变量;③ 每次交货量均相同,即为 cT/n 。

若取 B 的初始库存水平 x 为模型的决策变量,记 $y(t)$ 为到时刻 t 时的累积交货量,则在上述假设条件下,问题归结为求 x ,使

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} [ct - (x + y(t))] \leq 0\right\} = 1 - \varepsilon \quad (1.1)$$

式中, $1 - \varepsilon$ 为存贮系统的服务水平; ε 为预先指定的 $(0, 1)$ 中的数,通常取 $\varepsilon = 0.05, 0.1$ 等值。

上式等价于

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{cT} y(t)\right) \leq \frac{x}{cT}\right\} = 1 - \varepsilon \quad (1.2)$$

利用 $(0, T)$ 中均匀随机变量顺序量的性质,可以求得上式左端的精确结果和极限值为

$$\lim P\left\{\sqrt{n} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{cT} y(t)\right) \leq z\right\} = 1 - e^{-z^2}, z \geq 0 \quad (1.3)$$

因此,可以得到在应用上较为方便的近似公式:

$$x \doteq cT \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \quad (1.4)$$

现在,回到前面提出的问题上。假定 B 企业的生产增加时,相应的原材料和交货次数 n 按比例增加,即 n/c 为常数,则 $x \doteq \alpha \sqrt{c}$, 其中 α 为某一常数。因此, x 对 c 的弹性为

$$\frac{dx}{dc} \left/ \left(\frac{x}{c} \right) \right. = \frac{1}{2}$$

亦即是说,若 B 企业的生产增加 10%, 则其初始库存水平只需增加 5%。

由于该模型简单,要求的数据较少,而且避开了确定许多复杂的费用参数,因而在匈牙利获得了广泛而成功的应用。据 60 年代

中期该国一份非官方报告统计,由于采用了这种类型的存贮管理,全国因减少多余的库存而获得的节约在 40~50 亿福林之间(福林为匈牙利的货币单位),因而由此产生的社会效益是可想而知的。

上述基本模型还可以有许多推广。例如,上述假设条件①可以推广到更一般的随机过程;条件③可以放宽到每次交货量无需相同。此外,还可以推广到多种原材料(即多维)的模型。当然,这些推广将会使模型在数学的处理上带来一定的复杂性。

3. 现金管理中的存贮模型

无论是银行或是企业,都必须有一定数量的现金储备,有人早就将这类现金储备的优化问题视为存贮问题来研究。现金管理中的存贮模型与通常的存贮模型有两种不同。其一,在一个周期中现金的库存水平可升可降,这将由收入与支出的大小所决定。类似地,在一个周期的开始,决策者可以通过减少现金(用现金购买资产)或增加现金(变卖资产)来改变库存水平。其二,在一般的存贮模型中,无论缺货或存货都是以零为基准的,而现金管理问题则有所谓补偿结余的要求。

关于补偿结余的要求,分绝对补偿结余要求和平均补偿结余要求两种。前者要求每一周期均有一定数量的结余;后者则要求在包含若干个周期的某一时期内按周期平均的结余等于某个给定值。下面仅给出由 Miller 论述的具有平均补偿结余要求的模型。为此作如下假设:

(1)每天营业之前检查现金库存水平,并作出如下决策:或保持原现金水平;或通过购买资产以降低现金水平;或通过变卖资产以提高现金水平。

(2)每天营业前和营业结束后的两种现金水平分别称为开结余和闭结余。

(3)平均期限为 N 天,即讨论 N 天的平均结余。

(4)第 n 步决策表示离平均期限结束尚有 n 天时间的决策。

记第 n 步的开结余为 A_n (即第 $n+1$ 步的闭结余), 因为 n 是逆数的, $n = N, N-1, \dots, 1, 0$, 所以, $S_n = \sum_{i=n}^{N-1} A_i$ 为从开始到第 n 步以前的日累积闭结余量 (约定 $S_N = 0$)。记第 i 天的日净现金流为 $\mu_i + \xi_i$, 此处 ξ_i 是均值为 0 的独立随机变量, 而 μ_i 为现金流的均值, $i = 1, 2, \dots, N$ 。

设现金兑换费用具有下述结构:

$$T(y) = \begin{cases} k_1 + c_1 y, & \text{当 } y > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } y = 0 \text{ 时} \\ k_2 - c_2 y, & \text{当 } y < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (1.5)$$

式中, $c_1, c_2 > 0$; $k_1, k_2 \geq 0$ 且为常数; y 为现金兑换量。当 $y > 0$ 时, 上式表示银行变卖资产, 使现金增加; 当 $y < 0$ 时, 上式表示银行购进资产, 使现金减少。

W. H. Hausman 后来给出了有关上述模型最小费用的二维动态规划方法。对其最优决策变量 y 和最小费用只能求出数值解, 即将问题离散化, 用数值方法在二维网格点上作递归计算。R. G. Vickson 又进一步改进了上述的动态规划方法, 取消了对负结余出现的限制, 使之在无约束的条件下去求最优的 y , 然后通过模拟以探索出现负结余的频率。结果发现这种机会很小。

4. 扩散型存贮模型

关于这类存贮问题, 将在第八章中作专题讨论, 在此不作论述。

2.3 附注

存贮模型按其不同的特性可以有不同的分类: 一种是按系统的盘点方式来划分, 可分为连续盘点模型和周期 (或称定期) 盘点模型; 另一种是按存贮周期的阶段数来划分, 可分为单周期模型和多周期模型; 还有一种是按需求 (或交货时间、交货数量等) 方式来划分, 可分为确定性模型和随机性模型。此外, 还有按需求 (或供