丘成桐主编
数学翻译丛书

Markov过程导论

An Introduction to Markov Processes

Daniel W. Stroock 著
林正炎 张立新 苏中根 译

高等教育出版社
Higher Education Press

丘成桐主编

数学翻译丛书

Markov过程导论

An Introduction to Markov Processes

■ Daniel W. Stroock 著

■ 林正炎 张立新 苏中根 译

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01-2007-4659

Many thanks to Daniel W. Stroock for allowing Higher Education Press and International Press to publish and distribute the Chinese translation version of this book worldwide without a copyright charge.

感谢本书作者 Daniel W. Stroock 免费授予高等教育出版社、国际出版社本书的中文版出版权并在世界范围销售.

图书在版编目(CIP)数据

Markov过程导论/(美)斯注克(Stroock,D.W.)著;林正炎,张立新,苏中根译. 北京:高等教育出版社,2007.12

(数学翻译丛书/丘成桐主编)

书名原文:An Introduction to Markov Processes

ISBN 978-7-04-022936-3

Ⅰ.M… Ⅱ.①斯…②林…③张…④苏… Ⅲ.马尔可夫过程-高等学校-教材 Ⅳ.O211.62

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第163554号

策划编辑	王丽萍	责任编辑	李华英	封面设计	王凌波
版式设计	马敬茹	责任校对	王雨	责任印制	毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印刷	北京北苑印刷有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com

开本	787×960 1/16	版次	2007年12月第1版
印张	13	印次	2007年12月第1次印刷
字数	200 000	定价	32.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 22936-00

谨以此书献给长期一起工作的同事

Richard A. Holley

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流. 无论到国外留学的学者及到中国访问的学者数量每年都有增长，对中国的科学现代化大有帮助. 但是在翻译外国文献方面的工作尚不多. 基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，跟不上时代的发展了. 很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书来增加本国国民的阅读内容，对数学的研究大有裨益. 高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴于此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织这项工作. 参与的教授很多，有杨乐院士、刘克峰教授等. 我们希望这套翻译书能够使大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识. 对这套丛书的出版，海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

序　　言

从某种意义上讲，把本书看做介绍计算转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ (即 $\boldsymbol{P}$ 中所有元素 $(\boldsymbol{P})_{ij}$ 非负并且 $\boldsymbol{P}$ 每一行元素和为 1) 的高阶幂或者 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})$ 的指数幂 (其中 $\boldsymbol{R}$ 是一个具有非负元素的对角矩阵) 的内容的极大拓展是恰当的. 确实，这是本书所做的事情. 然而，对于有人如此轻视地对待 Markov 链和具有可数状态空间的 Markov 过程理论，我和我的同仁们都深感愤怒; 我写这本书的主要目的正是为了向读者证明我们的不满是合理的.

我和持此信念的人之所以不同意把该理论只看做是矩阵理论的一部分，理由是这样做忽视了概率贯穿始终所起的重要作用. 也就是说，概率论提供一个模型，启发并为我们处理矩阵所做的努力提供背景. 即 "转移概率矩阵" 这一术语使得构造一个矩阵的一系列相当特殊的假设变得有意义. 换句话说，它意味着我们把矩阵元素 $(\boldsymbol{P})_{ij}$ 看做处于状态 i 的系统一步转移到状态 j 的概率. 进而，按照这样的定义，我们必须把 $\boldsymbol{P}^n$ 中的元素 $(\boldsymbol{P}^n)_{ij}$ 看成是 n 步的转移概率. 这样，当 $n\to\infty$ 时，$\boldsymbol{P}^n$ 反映的是一个随机发展系统长时间的行为，其中 $\boldsymbol{P}$ 描述一步转移. 正如我们将看到的那样，这种解释将有助于我们对 $\lim\limits_{n\to\infty}(\boldsymbol{P}^n)_{ij}$ 的理解. 另外，或许更重要的是，概率扮演着连接数学和世界的桥梁角色. 事实上，正是概率思想帮助人们为自然和社会科学中观察到的各种现象建立数学模型. 没有概率语言，很难想象如何将这些现象和 $\boldsymbol{P}^n$ 联系在一起.

不管前一段结尾的观点如何，本书是从一个数学家的视角来写的.

因而, 大多数情况下, 概率思想被用来诠释数学概念, 而不是为那些非数学现象提供数学解释. 这样做有两个理由. 第一个也是最重要的一个, 是我自己的背景. 尽管我偶尔也会尝试着去帮助那些从事各种应用的人们, 但我并没有因此而积累下很多实例可以在编写这样一本书的时候作为其中的内容. 事实上, 我的经验告诉我, 从事应用研究的那些人足以处理所遇到的常规问题, 他们求助像我这样的人, 实在是迫不得已. 因此, 他们的问题往往很难, 并且我能解决的那一小部分通常涉及超过本书范围的内容. 以目前这种方式写书的第二个理由是, 我认为材料本身就有足够的兴趣. 不管资助机构如何劝说, 数学或拟数学是一项有意义的科学事业, 并且我认为随机过程的全新引入应有一席之地, 它将毫无愧色地使数学达到至高境地.

在讲授由 MIT 数学系开设的随机过程导论几个学期之后, 我逐渐形成了这种观点. 听课学生一直是本科生和研究生的有趣混合, 其中不到一半的学生主修数学. 不过, 尽管缺少现代随机过程课程所必需的正规的数学训练, 至少当这门课目前在数学系为他们自己的研究生开设时, 大部分坚持听完这门课程的学生都有相当好的天赋和对数学的欣赏. 结果, 我发现, 没有现成的教材供选择. 一方面, 最容易的选择是 Karlin 的经典教材 “A First Course in Stochastic Processes”, Karlin 编写的原著或者 Karlin 和 Taylor 的修订版 [4]. 他们的教材恰如其分地介绍了随机过程, 特别是可数状态空间上的 Markov 过程, 它那些简洁的证明, 如果不总是那么容易消化的话, 可以由大量的例子和练习来补充完整. 另一方面, 起初, 我担心采用 Karlin 和 Taylor 的教材会犯一个类似于采用 Feller 的著作作为本科生概率论入门的错误, 并且这种担心在我最初两次教学中出现过. 然而, 在使用并发现 Karlin 经典教材的两个改写版本以后, 我开始作出重大决定, 使用 Karlin 和 Taylor 的教材. 结果正如我所预料的那样: 我对这本教材的热情远远超过了学生.

为了使 Karlin 和 Taylor 的教材更适合于学生, 我开始补充一些注记, 试着重写其中的证明, 希望学生更容易懂些. 我的努力得到了回报, 学生对此反应积极. 事实上, 随着我的注记越来越多并开始淡化了原书的重要性, 我决定把它们变成现在这本书的样子, 尽管我意识到决定这样做可能有点愚蠢. 市场上有关这些内容的教材已经接近饱和. 而且, 其中一些书很受欢迎, 尽管据我了解, 它们受到欢迎并不总是和它们所包含的数学内容质量有关. 作了这样贬抑的评价, 我不便公开那

些书. 反之, 我想提及一下我非常喜欢的, 除了 Karlin 和 Taylor 的教材之外的书. Norris [5] 在介绍 Markov 过程方面是一本优秀教材, 同时让读者有很好的机会练习测度理论技巧. 当然, Norris 的教材仅仅适合那些具有测度理论技巧的学生. 另一方面, 对于掌握了那些技巧的学生而言, Norris 的教材让他们看到测度理论揉合在一起的魅力. 还有, Norris 给出了很多有趣的例子和练习, 用于说明如何应用. 本书包含了 [5] 中的大多数数学内容, 但证明却没有要求那么多测度论知识. 事实上, 尽管我系统地使用了第六章中解释的测度论术语 (Lebesgue 控制收敛定理、单调收敛定理等), 但这样做仅仅是为了让读者熟悉那些如果更深入地学习会遇到的专业术语. 说实话, 由于本书中的状态空间是可数的, 我所给出的 Lebesgue 理论的应用, 除一个外, 其余的都极为简单. 在 §6.2 中给出的这个例外包含了存在可列无穷多个相互独立随机变量的证明. 正如可能会出现的那样, 承认这样一族随机变量确实存在的读者, 除了术语和若干有关级数的明显结果外, 不需要参考第六章. 对程度更高一点的学生而言, 有关一般状态空间上 Markov 链的精彩内容可参考 Revuz [6].

本书的编排从目录上看一目了然. 第一章给出了一些基本的事实, 特别强调平面格点以及 d 维格点 $\mathbb{Z}^d$ 上最近邻随机游动的常返性和瞬时性. 第二章引入遍历性的研究, 这是联系第二章至第五章的主题. 第二章中所考虑的是 Markov 链 (即时间参数是离散的), 内容主要围绕 Doeblin 思想展开. 虽然 Doeblin 思想的适应性有局限性, 但与第三章和第四章的材料相比它有很大的优势, 它给出了 Markov 链收敛到其均衡分布的速度. 对 Doeblin 理论作了彻底的说明之后, 第三章研究当 Markov 链不满足 Doeblin 条件时的遍历性. 其主要结果由 (3.2.15) 式给出. 即使 (3.2.15) 的推导是完全初等的, 却毫无疑问是整本书最苛求的地方. 据我所知, (3.2.15) 的每一种证明都需要一些工作. 在想象的更简化的证明中, 这种工作隐藏在某些地方 (在测度论里, 如 [5] 和 [6]; 或者在算子论里, 如 [2]). 本书所给出的推导, 重新整理了 [4] 中基于 Feller 更新定理的证明, 仅要求读者透彻地理解极限的性质, 包括上极限、下极限以及极限的存在性. 在第四章, Markov 链由连续时间的 Markov 过程 (仍然具有可数状态空间) 所取代. 首先考虑速率有界的情形, 这样可能爆炸的问题就不会出现了. 接着, 考虑无界速率情形, 发展一些除有界性外, 能保证非爆炸的判别法则. 其余部分将第三章中有关 Markov 链的结论推广到连续时间情形. 除了更像附录而不

像全书的一个完整部分的第六章外, 本书到第五章为止. 第五章旨在当 Doeblin 理论完全失效或者产生相当差的估计时获得一些定量的结论, 这些结论令人回想起第二章的那些结论, 虽然它们没有第二章的结论强. 其中新的内容是假设 Markov 链或 Markov 过程是可逆的 (即转移概率在其平稳分布的 L^2 空间里是自伴随的), 并且内在发展机制是相伴的 Dirichlet 型. 最后一节, Dirichlet 型方法的功效在 Metropolis(模拟退火) 算法的分析上得到检验. 最后, 正如前面所说的, 第六章是一个附录, 回顾了有关测度和积分的 Lebesgue 理论的一些思想和术语. 相当大的一部分是前面提到过的、§6.2.1 中的构造.

最后, 按照惯例, 应该对那些直接或者间接地为本书做出贡献的人表示感谢. 主要直接贡献者是学生, 他们试用着各种各样的临时修订的版本. 我特别感谢 Adela Popescu, 他仔细阅读了本书, 指出很多小错误和几个严重错误, 现都已被删除或改正了. 感谢甚至找到那些间接做出贡献的人是比较困难的. 事实上, 包括所有那些已故和健在的人们, 从他们那儿我受到教育. 我不打算列出哪怕一小部分人的名单, 告诉你他们是谁. 不过, 有一个人, 在十多年的时间里, 一直耐心地教我欣赏本书所写的内容. 他就是我要将这本书献给的那位, Richard A. Holley, 一位真正的概率学家. 对 Dick 来说, 关于概率现象, 直觉通常先于数学上严格的理解. 这样说不应该使人怀疑 Dick 作为一名严谨数学家的能力. 相反地, 他关于概率理论的直观理解不仅增强了他自己那令人敬畏的数学功力, 也把我和其他一些人从盲目地陷入不完善的推理中解救出来. 正如所有和他一起共事的人都知道的那样, 重新思量着你所说的, 甚至一些激烈的抨击, Dick 只是轻轻地说: “我倒不这样认为.”

除了他数学上的非凡能力, Dick 的众多学生中人人都会证明他的慷慨大度. 我不是他的学生, 但我是他的同事, 可以向你保证, 他的慷慨大度绝不仅仅限于他的学生.

Daniel W. Stroock, 2004 年 8 月

目　录

序言 …………………………… i

第一章　随机游动 —— 一个好的切入点 …………… **1**

1.1　$\mathbb{Z}$ 上最近邻随机游动 …………… 1

1.1.1.　n 时刻的分布 …………… 2

1.1.2.　利用反射原理研究通过次数 …………… 3

1.1.3.　若干相关的计算 …………… 5

1.1.4.　首次返回的时刻 …………… 7

1.1.5.　利用泛函方程研究通过次数 …………… 8

1.2　随机游动的常返性 …………… 9

1.2.1.　$\mathbb{Z}^d$上的随机游动 …………… 9

1.2.2.　一个初等的常返性判别法则 …………… 10

1.2.3.　$\mathbb{Z}^2$上对称随机游动的常返性 …………… 12

1.2.4.　$\mathbb{Z}^3$上的瞬时性 …………… 14

1.3　习题 …………… 17

第二章　Markov 链的 Doeblin 理论 …………… **25**

2.1　概论 …………… 25

2.1.1.　Markov 链的存在性 …………… 26

2.1.2.　转移概率和概率向量 …………… 27

2.1.3. 转移概率和转移函数 ········ 28

2.1.4. Markov 性 ········ 30

2.2 Doeblin 理论 ········ 30

2.2.1. Doeblin 基本定理 ········ 30

2.2.2. 两个推广 ········ 33

2.3 遍历理论要素 ········ 35

2.3.1. 平均遍历定理 ········ 35

2.3.2. 返回次数 ········ 37

2.3.3. π 的确定 ········ 41

2.4 习题 ········ 43

第三章 Markov 链的遍历理论 (续) ········ **48**

3.1 状态的分类 ········ 49

3.1.1. 分类、常返性和瞬时性 ········ 49

3.1.2. 常返性和瞬时性的判别法则 ········ 52

3.1.3. 周期性 ········ 55

3.2 没有 Doeblin 条件的遍历理论 ········ 57

3.2.1. 矩阵的收敛性 ········ 57

3.2.2. Abel 收敛性 ········ 59

3.2.3. 平稳分布的结构 ········ 62

3.2.4. 一个小的改进 ········ 64

3.2.5. 平均遍历定理 (续) ········ 66

3.2.6. 非周期情形的一个改进 ········ 68

3.2.7. 周期性结构 ········ 71

3.3 习题 ········ 73

第四章 连续时间 Markov 过程 ········ **82**

4.1 Poisson 过程 ········ 82

4.1.1. 简单 Poisson 过程 ········ 82

4.1.2. $\mathbb{Z}^d$上 的复合 Poisson 过程 ········ 85

4.2 带有界速率的 Markov 过程 ········ 88

4.2.1. 基本结构 ········ 88

4.2.2. Markov 性 ········ 91

4.2.3. Q-矩阵和 Kolmogorov 向后方程 ······ 93
4.2.4. Kolmogorov 向前方程 ······ 94
4.2.5. 解 Kolmogorov 方程 ······ 94
4.2.6. 具有无穷小特征的 Markov 过程 ······ 96
4.3 无界速率 ······ 97
4.3.1. 爆炸 ······ 97
4.3.2. 非爆炸或爆炸的准则 ······ 100
4.3.3. 当爆炸发生时做什么 ······ 103
4.4 遍历性质 ······ 104
4.4.1. 状态的分类 ······ 104
4.4.2. 平稳测度与极限定理 ······ 107
4.4.3. 解释 $\hat{\pi}_{ii}$ ······ 110
4.5 习题 ······ 111

第五章 可逆 Markov 过程 ······ 117
5.1 可逆 Markov 链 ······ 118
5.1.1. 从不变性到可逆性 ······ 118
5.1.2. 二次平均度量 ······ 118
5.1.3. 谱隙 ······ 121
5.1.4. 可逆性和周期性 ······ 123
5.1.5. 与变差收敛的关系 ······ 124
5.2 Dirichlet 型和 β 的估计 ······ 126
5.2.1. Dirichlet 型和 Poincaré 不等式 ······ 126
5.2.2. β_+ 的估计 ······ 129
5.2.3. β_- 的估计 ······ 130
5.3 连续时间可逆 Markov 过程 ······ 132
5.3.1. 可逆性准则 ······ 132
5.3.2. 有界速率时 $L^2(\hat{\pi})$ 中的收敛性 ······ 133
5.3.3. 一般情形下 $L^2(\hat{\pi})$-收敛速度 ······ 134
5.3.4. 估计 λ ······ 137
5.4 Gibbs 态和 Glauber 动力系统 ······ 138
5.4.1. 框架 ······ 138
5.4.2. Dirichlet 型 ······ 140

5.5 模拟退火 · · · 143

5.5.1. 算法 · · · 143

5.5.2. 转移概率的构造 · · · 144

5.5.3. Markov 过程的描述 · · · 146

5.5.4. 冷却方案的选取 · · · 147

5.5.5. 小的改进 · · · 149

5.6 习题 · · · 151

第六章 测度理论简介 · · · **159**

6.1 Lebesgue 测度理论 · · · 159

6.1.1. 测度空间 · · · 159

6.1.2. 关于可数可加性的一些结论 · · · 161

6.1.3. 生成 σ-代数 · · · 162

6.1.4. 可测函数 · · · 163

6.1.5. Lebesgue 积分 · · · 164

6.1.6. Lebesgue 积分的稳定性 · · · 166

6.1.7. 可数空间上的 Lebesgue 积分 · · · 168

6.1.8. Fubini 定理 · · · 170

6.2 概率建模 · · · 172

6.2.1. 无穷多次投掷均匀硬币的模型 · · · 173

6.3 独立随机变量 · · · 178

6.3.1. 独立随机变量族的存在性 · · · 179

6.4 条件概率和条件期望 · · · 181

6.4.1. 关于随机变量的条件运算 · · · 182

符号 · · · **184**

参考文献 · · · **186**

索引 · · · **187**

第一章　随机游动
—— 一个好的切入点

本章旨在讨论 Markov 过程的一些例子，它们甚至可以先于 "Markov 过程" 被人们所理解. 事实上, 任何学过概率论的人都会发现, 这些过程都源于基本的 "投掷硬币" 的研究.

1.1　$\mathbb{Z}$ 上最近邻随机游动

令 p 是开区间 $(0,1)$ 上的一个数, 假设[1] $\{B_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ 是一列取 $\{-1,1\}$ 值、同分布的 *Bernoulli* 随机变量 [2], 其中取 1 的概率是 p. 即对任何 $n \in \mathbb{Z}^+$ 和任意 $E \equiv (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) \in \{-1,1\}^n$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(B_1 = \epsilon_1, \cdots, B_n = \epsilon_n) = p^{N(E)} q^{n-N(E)}, \quad \text{其中 } q \equiv 1-p, \\ &N(E) = \#\{m : \epsilon_m = 1\} = \frac{n + S_n(E)}{2}, \quad \text{其中 } S_n(E) \equiv \sum_1^n \epsilon_m. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

下面, 令

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{m=1}^{n} B_m, \qquad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.1.2}$$

$\{B_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ 的存在性可参看 §6.2.1.

---

[1] $\mathbb{Z}$ 代表整数集, $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}^+$ 分别表示非负整数集和正整数集.

[2] 由于历史的原因, 相互独立、只取两个值的随机变量往往称为 Bernoulli 随机变量.

上述随机变量族 $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ 通常被称为 $\mathbb{Z}$上的最近邻随机游动. 最近邻随机游动是 Markov 过程的一个例子, 但是我们刚刚所给出的描述是初等概率论中所有的; 概率论和本课程 —— 研究随机过程的课程 —— 不同. 也就是说, 在随机过程的研究中, 应该强调随机变量族的动态方面. 因此, 一个具有随机过程特色的描述可以用

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(X_0 = 0) = 1,\\ \mathrm{P}(X_n - X_{n-1} = \epsilon | X_0, \cdots, X_{n-1}) = \begin{cases} p, & 若\ \epsilon = 1; \\ q, & 若\ \epsilon = -1 \end{cases}\end{gathered} \tag{1.1.3}$$

取代 (1.1.2) 式, 其中 $\mathrm{P}(X_n - X_{n-1} = \epsilon | X_0, \cdots, X_{n-1})$ 表示在给定 $\sigma(\{X_0, \cdots, X_{n-1}\})$ 后, $X_n - X_{n-1} = \epsilon$ 的条件概率 (参看 §6.4.1). 注意, (1.1.3) 式比 (1.1.2) 式更具动态性. 特别地, 它指出该过程在 $n = 0$ 时刻从 0 开始, 在每个时刻 $n \in \mathbb{Z}^+$, 以概率 p 前进一步或者以概率 q 后退一步, 并且和时刻 n 以前所处的位置无关.

1.1.1. n 时刻的分布: 在这一小节, 我们提出计算 $\mathrm{P}(X_n = m)$ 的两种方法. 第一种方法基于 (1.1.2) 式. 从 (1.1.2) 式容易得到 $\mathrm{P}(|X_n| \leqslant n) = 1$. 另外, 显然有

$$\begin{aligned} n\ 为奇数 &\implies \mathrm{P}(X_n\ 为奇数) = 1 \quad 和 \\ n\ 为偶数 &\implies \mathrm{P}(X_n\ 为偶数) = 1. \end{aligned}$$

最后, 给定和 n 具有相同奇偶性的 $m \in \{-n, \cdots, n\}$ 以及 $E = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ (参看 (1.1.1)) 使得 $S_n(E) = m$, $N(E) = \dfrac{n+m}{2}$, 因此

$$\mathrm{P}(B_1 = \epsilon_1, \cdots, B_n = \epsilon_n) = p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}.$$

这样, 记 $\binom{\ell}{k} \equiv \dfrac{\ell!}{k!(\ell-k)!}$ 表示二项系数 "从 ℓ 中选择 k 个", 由于存在 $\binom{n}{\frac{m+n}{2}}$ 个这样的 E, 可知如果 $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leqslant n$ 且 m 和 n 具有相同的奇偶性, 那么

$$\mathrm{P}(X_n = m) = \binom{n}{\frac{m+n}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}, \tag{1.1.4}$$

否则为 0.

第二种计算这个概率的方法将基于 (1.1.3) 式的动态描述. 为此, 引进记号 $(P^n)_m \equiv \mathrm{P}(X_n = m)$. 显然, $(P^0)_m = \delta_{0,m}$, 其中 $\delta_{k,\ell}$ 是

Kronecker 符号, 当 $k=\ell$ 时取 1, 其他情形取 0. 进而, 由 (1.1.3) 式知, $\mathrm{P}(X_n=m)$ 等于

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X_{n-1}=m-1,X_n=m)+\mathrm{P}(X_{n-1}=m+1,X_n=m)\\ =&\,p\mathrm{P}(X_{n-1}=m-1)+q\mathrm{P}(X_{n-1}=m+1).\end{aligned}$$

即

$$(P^0)_m=\delta_{0,m},\quad (P^n)_m=p(P^{n-1})_{m-1}+q(P^{n-1})_{m+1}. \tag{1.1.5}$$

显然, (1.1.5) 式给出了一个计算 $(P^n)_m$ 的完整的递推方法, 尽管这一方法是用隐式表达的, 并且很容易验证 (1.1.4) 式给出的数值满足这个递推式. 反过来, 可以用 (1.1.5) 式加上对 n 的递归得出: 除非对某个 $0\leqslant \ell\leqslant n$, $m=2\ell-n$, 否则有 $(P^0)_m=0$, 并且若记 $(C^n)_\ell\equiv p^{-\ell}q^{n-\ell}(P^n)_{2\ell-n}$, 则 $(C^n)_\ell=(C^{n-1})_{\ell-1}+(C^{n-1})_\ell$. 换句话说, 系数 $\{(C^n)_\ell:n\in\mathbb{N},0\leqslant\ell\leqslant n\}$ 由 Pascal 三角形给出, 因此正好是二项系数, 从而 (1.1.4) 成立.

1.1.2. 利用反射原理研究通过次数: 比 §1.1.1 中的计算更有挑战性的是确定某一点 $a\in\mathbb{Z}$ 的首达时的分布. 即, 给定 $a\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 令[3]

$$\zeta_a=\inf\{n\geqslant 1:X_n=a\}(\equiv\infty,\ \text{如果对任意的 } n\geqslant 1,\ X_n\neq a). \tag{1.1.6}$$

那么 ζ_a 是 a 点的首达时, 这里我们的目标是找出它的分布. 等价地, 我们要求出 $\mathrm{P}(\zeta_a=n)$ 的表达式. 显然, 由 §1.1.1, 我们只需要考虑满足 $n\geqslant|a|$ 并且和 a 具有相同奇偶性的那些 n.

我们给出这个问题的两种解法. 这里基于 (1.1.2) 式; 在 §1.1.5 中将基于 (1.1.3) 式. 为了叙述基于 (1.1.2) 式的方法, 假设 $a\in\mathbb{Z}^+$, 同时假设 $n\in\mathbb{Z}^+$ 和 a 具有相同的奇偶性. 首先, 注意到

$$\mathrm{P}(\zeta_a=n)=\mathrm{P}(X_n=a,\zeta_a>n-1)=p\,\mathrm{P}(\zeta_a>n-1,X_{n-1}=a-1).$$

因此, 我们只要计算 $\mathrm{P}(\zeta_a>n-1,X_{n-1}=a-1)$ 即可. 为此, 注意到对任意满足 $S_{n-1}(E)=a-1$ 的 $E\in\{-1,1\}^{n-1}$, 事件 $\{(B_1,\cdots,B_{n-1})=E\}$ 具有概率 $p^{\frac{n+a}{2}-1}q^{\frac{n-a}{2}}$. 因此

$$\mathrm{P}(\zeta_a=n)=\mathcal{N}(n,a)p^{\frac{n+a}{2}}q^{\frac{n-a}{2}}, \tag{$*$}$$

[3] 正如下面所示的那样, 我们取空集的下确界为 $+\infty$.

其中 $\mathcal{N}(n,a)$ 是 $\{-1,1\}^{n-1}$ 中满足下列条件的 E 的个数: 对 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$, $S_\ell(E) \leqslant a-1$ 且 $S_{n-1}(E) = a-1$. 这就是说, 最终归结为 $\mathcal{N}(n,a)$ 的计算. 另一方面 $\mathcal{N}(n,a) = \binom{n-1}{\frac{n+a}{2}-1} - \mathcal{N}'(n,a)$, 其中 $\mathcal{N}'(n,a)$ 是 $\{-1,1\}^{n-1}$ 中使得 $S_{n-1}(E) = a-1$ 和 $S_\ell(E) \geqslant a$ (对某个 $\ell \leqslant n-1$) 的 E 的个数, 我们只需要计算 $\mathcal{N}'(n,a)$. 为此, 我们使用被称为**反射原理**的漂亮论证方法. 考虑所有具有性质 $S_0 = 0$, $S_m - S_{m-1} \in \{-1,1\}$ (对 $1 \leqslant m \leqslant n-1$), 且 $S_m \geqslant a$ (对某个 $1 \leqslant m \leqslant n-1$) 的路径 $(S_0, \cdots, S_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ 所组成的集合 $P(n,a)$. 显然, $\mathcal{N}'(n,a)$ 是 $P(n,a)$ 中所有满足 $S_{n-1} = a-1$ 的 $(S_0, \cdots, S_{n-1})$ 组成的集合 $L(n,a)$ 中路径的数目. 应用反射原理, 我们将证明集合 $L(n,a)$ 和 $U(n,a)$ 所含的元素个数相同, 其中 $U(n,a)$ 是 $P(n,a)$ 中所有满足 $S_{n-1} = a+1$ 的路径 $(S_0, \cdots, S_{n-1})$ 组成的集合. 因为 $(S_0, \cdots, S_{n-1}) \in U(n,a)$ 当且仅当 $S_0 = 0$, $S_m - S_{m-1} \in \{-1,1\}$ (对所有 $1 \leqslant m \leqslant n-1$), 以及 $S_{n-1} = a+1$, 所以我们已经知道如何去计算它们: 共有 $\binom{n-1}{\frac{n+a}{2}}$ 条路径. 因此, 余下的是应用反射原理. 为此, 对给定的 $\boldsymbol{S} = (S_0, \cdots, S_{n-1}) \in P(n,a)$, 令 $\ell(\boldsymbol{S})$ 为使得 $S_k \geqslant a$ 的 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 中的最小的一个, 并定义 $\boldsymbol{S}$ 的**反射路径** $\mathcal{R}(\boldsymbol{S}) = (\hat{S}_0, \cdots, \hat{S}_{n-1})$, 使得 $\hat{S}_m = S_m$ (若 $0 \leqslant m \leqslant \ell(\boldsymbol{S})$), $\hat{S}_k = 2a - S_k$ (若 $\ell(\boldsymbol{S}) < m \leqslant n-1$). 显然 $\mathcal{R}$ 将 $L(n,a)$ 映射到 $U(n,a)$, 将 $U(n,a)$ 映射到 $L(n,a)$. 另外, $\mathcal{R}$ 是幂等的: 与其自身复合是恒等映射. 所以, 作为一个从 $L(n,a)$ 到 $U(n,a)$ 的映射, $\mathcal{R}$ 一定是一一对应, 而且是满射. 因此, $L(n,a)$ 和 $U(n,a)$ 所包含的路径个数相等.

我们已经证明了 $\mathcal{N}'(n,a) = \binom{n-1}{\frac{n+a}{2}}$, 因此有

$$\mathcal{N}(n,a) = \binom{n-1}{\frac{n+a}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+a}{2}}.$$

最后, 将它代入 $(*)$ 式可得

$$\mathrm{P}(\zeta_a = n) = \left[\binom{n-1}{\frac{n+a}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+a}{2}}\right] p^{\frac{n+a}{2}} q^{\frac{n-a}{2}},$$

化简上述公式可以写成

$$\mathrm{P}(\zeta_a = n) = \frac{a}{n}\binom{n}{\frac{n+a}{2}} p^{\frac{n+a}{2}} q^{\frac{n-a}{2}} = \frac{a}{n}\mathrm{P}(X_n = a).$$