

油气井管柱力学与工程

Down-Hole Tubular Mechanics and Its Applications

© 高德利 著

中国石油大学出版社

油气井管柱力学与工程

Down-Hole Tubular Mechanics and Its Applications

高德利 著

我国石油工业发展迅速，对石油工程技术人员的要求也越来越高。本书是作者在长期从事石油工程教学和科研工作的基础上，结合国内外最新研究成果编写而成的。本书主要介绍石油工程中管柱力学的基本理论、计算方法及工程应用。全书共分五章：第一章介绍管柱力学的基本概念；第二章介绍管柱的静力学分析；第三章介绍管柱的动力学分析；第四章介绍管柱的疲劳分析；第五章介绍管柱的工程应用。本书可作为石油工程专业及相关专业的教材，也可供从事石油工程工作的工程技术人员参考。

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

油气井管柱力学与工程/高德利著. —东营:中国石油大学出版社, 2006. 12
ISBN 978-7-5636-2158-3

I. 油... II. 高... III. 油气钻井—井下管柱
IV. TE931

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第160198号

书 名: 油气井管柱力学与工程
作 者: 高德利

责任编辑: 刘万忠
封面设计: 王凌波

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)
网 址: <http://www.uppbook.com.cn>
电子信箱: uppbook@hdpu.edu.cn
印 刷 者: 青岛星球印刷有限公司
发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0546-8392563)
开 本: 185×260 印张: 20.5 字数: 524 千字
版 次: 2006年10月第1版第1次印刷
定 价: 98.00 元

内 容 摘 要

本书基于作者近十年来积累的相关研究成果编辑而成,主要讨论各种管柱在不同井眼(垂直井、定向井、水平井及大位移井等)约束条件下的力学行为(包括稳定性、动静态特性、整体受力、应力应变、机械强度及高温高压效应等),并结合工程应用阐述与油气井管柱密切相关的优化设计理论和控制技术等。本书的主要内容包括:基本方程,受不同井眼约束管柱的屈曲及后屈曲理论,大位移井管柱摩阻和扭矩的数值分析方法,底部钻具组合静动态分析方法,复合套管柱载荷分析与强度设计方法,油气测试管柱受力与变形分析及高温高压井筒安全性评价计算方法,以及实体膨胀管(套管)的塑性变形力计算方法及旋转膨胀工具的设计理论等。本书注重理论与实践相结合,在系统介绍油气井管柱力学基本概念和理论方法的同时,给出了大量的工程实例和算例分析,以便帮助广大读者理解与应用书中所介绍的相关理论与技术内容。

本书适合从事油气钻采工程、探矿工程、矿业工程及相关专业的科研人员和技术人员阅读,也可作为高等院校相关专业师生的参考书。

前言

油气井,是人类勘探与开发地下油气资源必不可少的信息和物质通道。油气井工程,是围绕油气井的设计、建设、测量(录井、测井、测试等)、使用与维护而实施的资金和技术密集型工程,它不仅是贯穿于油气勘探与开发全过程的关键环节,而且还对地热、煤层气等地下资源的勘探开发以及地球科学研究等领域均具有重要的实际意义。在世界范围内,油气井探井的建设费用占油气勘探总成本的 55%~80%,开发井的建设费用占开发总成本的比例也越来越高。在油气井工程中,管柱是不可缺少的下井工具,包括钻柱、套管柱、测试管柱、生产管柱及连续管、膨胀管等,其力学行为十分复杂,很难从一般的力学知识中直接找到答案,必须结合实际工程的约束条件进行专门研究。例如,油气井管柱的屈曲行为对油气钻采工程中的诸多方面(钻井、完井、测井、测试、压裂、封堵、生产等)都有重要影响,当管柱发生屈曲后,其屈曲构型随着载荷的增加而变化,除了保持稳定的正弦屈曲和螺旋屈曲构型及它们之间的转化以外,在每种屈曲构型中管柱的模式也会随着载荷的增加而变化,因此可以说,油气井管柱屈曲行为是一个十分复杂的多次屈曲非线性力学问题。

所谓油气井管柱力学,就是综合应用力学、数学等基础科学的理论和方法,采用专门的实验手段,并结合现场采集的数据资料,综合研究受井眼(垂直井、定向井、水平井及大位移井等)约束管柱的力学行为,如管柱的稳定性(屈曲行为等)、动态特性、机械强度及受力和变形等,为油气井管柱与工程的优化设计与作业控制提供科学依据。自从鲁宾斯基(Arthur Lubinski)1950 年发表了他在钻柱力学方面的第 1 篇学术论文(A Study of the Buckling of Rotary Drilling Strings)以来,关于油气井管柱力学的研究迄今已有 50 多年的发展历史,尽管已获得许多研究成果和现场应用,但由于问题的复杂性,有关的理论和技术现状与人们的期望还有不少差距。

例如,钻柱在充满钻井液的狭长井眼里工作,通常要承受拉、压、弯、扭、流体压力等多种载荷及腐蚀环境作用,再加上钻头与地层之间以及钻柱与井壁之间的相互作用,在地面动力驱动下,结果使钻柱处于十分复杂的受力、变形及运动状态,其中钻柱的运动状态,迄今仍是一个难以判断和理解的钻柱力学难题。

再例如,复杂地质条件下油气井套管柱的损坏问题,迄今仍然是国内外油气田开发工程中普遍存在的重大理论和技术难题之一。国内油气田套损井已累计超过 3 万口,不仅每年造成巨大的直接经济损失,而且严重影响了油气田的正常生产与综合开发效益。因此,如何从建井源头上预防套管柱的损坏及提高新建油气开发井的使用寿命,就成为复杂地质条件下油气井套管柱载荷分析与强度设计中的一个重大难题。

自“九五”以来,作者在油气井管柱力学与工程研究方面也做了一些工作,同时培养出 8 名博士人才和多名硕士人才,并以此为基础初步建立了一个管柱力学理论体系。作者

试图对这些工作的主要内容加以总结,以本书形式献给读者,并期望它能够对油气井管柱力学与工程的进一步研究与发展产生一点抛砖引玉的效果。

本书包括八章内容,可分成三个部分。第一部分从油气井管柱力学的基本方程(第1章)入手,重点讨论油气井管柱的屈曲与后屈曲理论(第2章)及整体受力(摩阻和扭矩)的数值分析方法(第3章),并给出部分相关的工程实例分析(第3章、第8章);第二部分主要以油气井套管柱为研究对象,重点论述复杂地质条件下油气井套管柱的载荷特点(特别是非均匀载荷特征)和强度特性及其数值分析方法,提出复合套管柱优化设计理论和技术(第4章),并专门探讨了油气井套管(实体膨胀管)的膨胀机理和膨胀方法等(第7章);在第一部分奠定的基础上,第三部分重点讨论底部钻具组合的静动态特性(第5章)及油气测试管柱的力学行为(第6章),可为底部钻具组合及测试管柱的优化设计与井下控制提供科学依据。

本书涉及的主要科研成果,是在作者主持的若干国家和石油企业重点项目资助下完成的,其中包括“国家杰出青年科学基金”项目(59825115)、国家自然科学基金的重点项目(50234030)和面上项目(90410006)及中国石油集团、中海石油、中国石化集团和天津钢管集团等企业的资助项目。因此,在本书即将出版之际,我要向国家自然科学基金委及有关部门和企业表示衷心的感谢,并以此书作为一份献礼。另外,在石油管柱力学专项研究中,我还要特别感谢中国石油天然气集团公司石油管力学和环境行为重点实验室,因为近五年来我作为该实验室的副主任曾获得它的多项课题资助。

在本书编写过程中,我的研究生们给予了大力支持和帮助,特别是覃成锦、高宝奎、刘凤梧、付胜利、宋执武、严泽生、易先中、王兆会等几位博士研究生,都对本书做出了不同程度的贡献,读者不难从书中的参考文献中领略到这一点。可以说,没有研究生们的协同工作,我现在可能难以完成这样一本学术专著。因此,本书也理应献给我的那些研究生们。

由于作者水平有限,再加上时间仓促,书中错误和不妥之处在所难免,恭请广大读者批评指正。

高德利

2006年9月于北京

ABSTRACT

This book is a collection of some research results of the author over the past 10 years. It mainly discusses the mechanical behavior of tubular strings in different well-bores, such as in vertical wells, directional wells, horizontal wells and extended-reach wells. These behaviors include tubular stability, dynamic and static characteristics, loads on entire tubular string, stress and strain, mechanical strength and effects of high temperature and high pressure, and so on. With the engineering applications, this book illustrates the optimum design theories and the control techniques related to tubular strings in oil & gas wells, etc. Contents of the book include basic equations of tubular mechanics, buckling and post-buckling theory of tubular strings in different well-bores, numerical analysis of tubular drag & torque in extended reach well, dynamic and static analysis methods for bottom hole assembly, load analysis and strength design for casing strings, load & deformation analysis of well testing tubing and effects of high temperature & high pressure, plastic deformation force of solid expandable tubular and design theory of rotary expanding tool. This book emphasizes the combination of theory and practice. It provides a great number of engineering and calculation examples while systematically introducing the basic concepts and theoretical methods of tubular mechanics in oil & gas wells, which can help readers to comprehend and apply these theories and techniques presented in the book.

This book is written for researchers and technicians in petroleum engineering, mining engineering and related engineering fields. It is also intended to serve as a reference book for the correlative college teachers and students.

Key Words: tubular mechanics, tubular buckling, drag & torque, casing design, bottom hole assembly, well testing tubing, solid expandable tubular, casing drilling.

目 录

第1章 基本方程	(1)
1.1 平衡方程、几何方程及物理方程	(1)
1.2 弹性管柱的变形控制方程	(6)
1.3 管柱屈曲微分方程	(10)
参考文献	(15)
第2章 油气井管柱屈曲行为	(16)
2.1 引言	(16)
2.2 无重管柱的屈曲行为	(18)
2.3 水平井管柱自重对后屈曲的影响	(29)
2.4 斜直井管柱自重对屈曲行为的影响	(42)
2.5 弯曲井眼内管柱屈曲及后屈曲行为	(50)
2.6 摩擦与管柱屈曲的耦合效应	(58)
2.7 关于管柱屈曲接触力的讨论	(65)
2.8 抽油井杆管磨损预测与防治	(68)
参考文献	(78)
第3章 油气井管柱摩阻和扭矩	(80)
3.1 管柱摩阻和扭矩计算模型	(80)
3.2 管柱摩阻和扭矩数值分析软件	(89)
3.3 大位移井摩阻和扭矩实例分析	(98)
参考文献	(120)
第4章 套管柱载荷分析与强度设计	(121)
4.1 引言	(121)
4.2 套管柱设计模型	(123)
4.3 套管柱载荷分析	(124)
4.4 套管强度计算方法	(145)
4.5 套管柱优化设计软件	(165)
4.6 实例分析	(169)
4.7 稠油热采井套管应力分析	(174)
参考文献	(181)
第5章 底部钻具组合动静态分析	(183)
5.1 BHA 运动学	(183)
5.2 BHA 涡动与井斜控制理论	(192)
5.3 BHA 横向振动特性	(201)
5.4 底部钻具组合静力分析	(207)

参考文献	(225)
第6章 油气井测试管柱力学行为	(226)
6.1 引言	(226)
6.2 测试管柱力学计算模型	(231)
6.3 测试管柱力学计算方法	(235)
6.4 测试管柱力学算例分析	(238)
6.5 井筒温度场及套管附加载荷	(245)
6.6 高温高压井筒安全评价软件	(255)
参考文献	(267)
第7章 实体膨胀管的塑性变形力	(269)
7.1 相关知识概述	(271)
7.2 求解实体管塑性变形力的工程法	(273)
7.3 实体管膨胀力的数值分析	(278)
7.4 实体管(套管)的膨胀实验	(286)
7.5 旋转膨胀工具设计理论	(295)
参考文献	(300)
第8章 套管钻井管柱力学计算	(302)
8.1 垂钻时套管柱的扭矩计算	(303)
8.2 套管钻井管柱屈曲计算	(305)
8.3 套管钻井实例分析	(307)
参考文献	(316)

Contents

Chapter 1-Basic Equations of Tubular Mechanics	(1)
1. 1 equilibrium equation, geometric equation and physical equation	(1)
1. 2 deformation control equation of elastic tubular string	(6)
1. 3 differential equation of tubular buckling	(10)
<i>References</i>	(15)
Chapter 2-Buckling Behavior of Tubular in Oil & Gas Wells	(16)
2. 1 introduction	(16)
2. 2 buckling behavior of no-weight tubular	(18)
2. 3 effects of tubular weight on buckling behavior in horizontal well-bore	(29)
2. 4 effects of tubular weight on buckling behavior in inclined well-bore	(42)
2. 5 tubular buckling and post-buckling behavior in curved well-bore	(50)
2. 6 coupling effects of tubular buckling and friction	(58)
2. 7 discussions on contact forces produced by tubular buckling	(65)
2. 8 prevention & prediction of wear between rod & tubing in pumping well	(68)
<i>References</i>	(78)
Chapter 3-Numerical Analysis of Down-Hole Drag & Torque	(80)
3. 1 models for down hole drag and torque	(80)
3. 2 numerical analysis program for down hole drag and torque	(89)
3. 3 example analyses of drag and torque in extended reach well	(98)
<i>Reference</i>	(120)
Chapter 4-Load Analysis & Strength Design of Casing Strings	(121)
4. 1 introduction	(121)
4. 2 design model for casing string	(123)
4. 3 load analysis of casing strings	(124)
4. 4 calculation methods of casing strength	(145)
4. 5 computer program for optimal design of casing strings	(165)
4. 6 example analysis of casing design	(169)
4. 7 analysis of casing stress in thermal recovery well for heavy oil	(174)
<i>References</i>	(181)
Chapter 5-Analysis of Bottom-Hole Assembly	(183)
5. 1 kinematics of bottom-hole assembly	(183)
5. 2 BHA whirling and deviation control theory	(192)

5.3 transversal vibration characteristics of drill string	(201)
5.4 static analysis of BHA	(207)
<i>References</i>	(225)
Chapter 6-Tubular Mechanics in Well Testing for Oil & Gas	(226)
6.1 introduction	(226)
6.2 calculation models of tubular behavior in well testing	(231)
6.3 calculation methods of tubular behavior in well testing	(235)
6.4 example analysis of tubular behavior in well testing	(238)
6.5 temperature field around borehole and additional casing loads	(245)
6.6 computer program for safety evaluation of high temperature and high pressure well	(255)
<i>References</i>	(267)
Chapter 7-Plastic Deformation of Solid Expandable Tubular (SET)	(269)
7.1 related knowledge overview	(271)
7.2 engineering method for calculating plastic deformation force of SET	(273)
7.3 numerical analysis of plastic deformation force(expanding force) of SET	(278)
7.4 experiments on the casing expanding	(286)
7.5 design theory of rotary expanding tool for SET	(295)
<i>References</i>	(300)
Chapter 8-Tubular Mechanics in Casing Drilling	(302)
8.1 torque calculations of casing string in vertical casing drilling	(303)
8.2 calculations of tubular buckling in casing drilling	(305)
8.3 example analysis for casing drilling	(307)
<i>References</i>	(316)

第 1 章 基本方程

在各种油气井管柱中,钻柱具有较好的代表性。钻柱是钻井工程中必不可少的重要下井工具,一般由钻杆和钻铤等连接而成,其底端带着钻头。钻柱在充满钻井液(属非牛顿流体)的狭长井眼里工作,通常上部受拉下部受压,同时承受弯扭及流体压力等载荷,再加上钻头与地层之间以及钻柱与井壁之间的相互作用,在地面动力(或井下动力,或地面与井下复合动力)驱动下,结果是使钻柱处于十分复杂的受力、变形及运动状态。开展钻柱力学(Drillstring Mechanics)研究,不仅对于钻井工程的科学设计与作业控制具有重要的实际意义,而且对于其他受井眼约束管柱的力学行为研究、优化设计与控制也具有重要的参考价值。

由于钻柱与井壁之间接触的边界条件和相对运动关系十分复杂,在钻柱力学分析中,为了简化方程的表达形式,常常忽略钻柱横向剪应力的影响,有时考虑了横向剪应力而略去了横向剪应变对钻柱挠曲变形的影响,尽管求解结果能够基本反映钻柱力学的主要特征,但理论精度仍有进一步提高的空间。本章考虑横向剪切变形和剪应力对钻柱挠曲变形的影响,以便建立钻柱力学的通用方程。

本章首先论述弹性钻柱的平衡方程、几何方程及物理方程,然后导出不可伸长弹性管柱的变形控制方程,并对钻柱的底部钻具组合(Bottomhole Assembly,简称 BHA)静力学模型进行讨论,最后讨论受井眼约束管柱的屈曲微分方程。本章以钻柱为分析对象给出的基本方程,对于其它相同性质问题的油气井管柱也适用。

1.1 平衡方程、几何方程及物理方程

1.1.1 微分几何曲线论

取自然坐标系 O_sTNB (如图 1-1-1 所示),原点 O_s 位于空间曲线(如钻柱弹性变形线或井眼轨迹曲线)上的任意一点, T 、 N 和 B 轴分别指向该曲线的切线方向、主法线方向和从法线方向。该自然坐标系与曲线在该点的 Frenet 活动标架重合,其单位向量为 (e_T, e_N, e_B) 。

取曲线任一点的矢径 $r=r(s, t)$,其中 s 和 t 分别为弧长和时间变量。由微分几何可知,钻柱弹性变形线任一点的 Frenet 标架为 (r, e_T, e_N, e_B) ,Frenet 公式可表达如下:

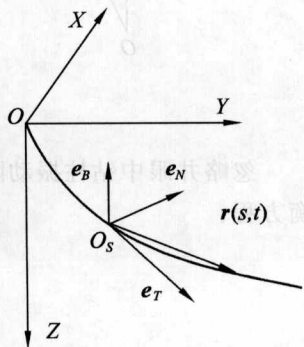


图 1-1-1 坐标系及其相互关系

$$\begin{cases} e_T = r' \\ e'_T = k_b e_N \\ e'_N = k_n e_B - k_b e_N \\ e'_B = -k_n e'_N \end{cases} \quad (1-1-1)$$

式中, k_b 和 k_n 分别为曲线 $r(s, t)$ 点的曲率和挠率, 可分别表示如下:

$$k_b^2 = r'' \cdot r'' \quad (1-1-2)$$

$$k_n = \frac{(r', r'', r''')}{k_b^2} \quad (1-1-3)$$

1.1.2 微分平衡方程

钻柱在井眼中作复合旋转运动(即“涡动”), 一方面绕其自身的轴心线以转盘(或顶驱)角速度 ω 自转, 另一方面, 绕其井眼中心以一定的角速度 Ω 进动。在 s 处从钻柱中截取微元 ds , 如图 1-1-2 所示, 其上作用的外力、外力矩分别为 hds, mds ; 在 s 处矢径为 r , 内力、内力矩分别为 $-F, -M$; $s+ds$ 处矢径为 $r+dr$, 内力、内力矩分别为 $F+dF, M+dM$; h 表示钻柱单位长度的合成外力(包括浮力、表面力和体积力等); m 表示单位长度分布外力矩; 外圆半径为 R_o , 内圆半径为 R_i , 则钻柱横断面积为 $A = \pi(R_o^2 - R_i^2)$ 。假设 L 表示钻柱单位长度的动量矩, 钻柱材料密度为 ρ , 以及井眼半径为 R_h 。

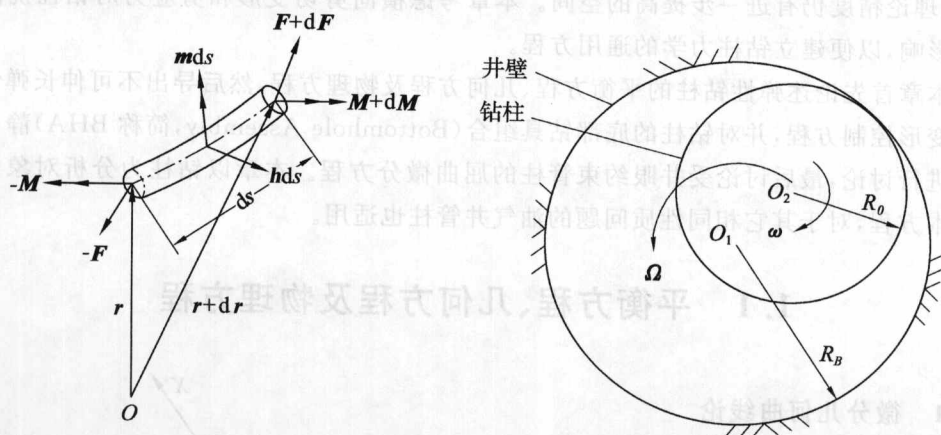


图 1-1-2 钻柱微元的受力与运动状态

忽略井眼中钻柱振动阻尼的影响, 由动量定理和动量矩定理, 可分别得到如下微分平衡方程:

$$\frac{\partial F}{\partial s} + h = \frac{\partial^2 (\rho \cdot A \cdot r)}{\partial t^2} \quad (1-1-4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} + e_T \times F + m + r \times \left(\frac{\partial F}{\partial s} + h \right) = \frac{\partial L}{\partial t} \quad (1-1-5)$$

式中:

$$F = T e_T + Q_N e_N + Q_B e_B \quad (1-1-6)$$

$$M = M_N e_N + M_B e_B + M_T e_T \quad (1-1-7)$$

$$\mathbf{L} = \rho A \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) + I_0 \boldsymbol{\omega} = \rho A \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) - I_0 \boldsymbol{\omega} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \quad (1-1-8)$$

其中, Q_N 、 Q_B 为剪力; T_s 为轴向力; M_B 为总弯矩, 与 $\mathbf{e}_B$ 同向时取正值, 相反则取负值; M_T 为扭矩, 与 $\mathbf{e}_T$ 同向时取正值, 相反则取负值; $I_0 = \rho A (R_o^2 + R_i^2) / 2$ 为管柱单位长度的自转转动惯量; 其它符号意义同前。

若忽略钻柱的动力效应, 则方程(1-1-4)和方程(1-1-5)分别简化为如下(1-1-9)式和(1-1-10)式, 即:

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{h} = 0 \quad (1-1-9)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_T \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0 \quad (1-1-10)$$

式中符号意义同前。

1.1.3 几何方程

由于井眼的直径大于钻柱的直径, 钻柱在自重和其它外力的作用下会相对于井眼轴线发生变形。全面考虑横向剪切变形和剪应力两项因素对钻柱挠曲变形的影响, 同时参照 S. P. Timoshenko 剪切梁理论(胡海昌, 1981), 认为变形前垂直于钻柱中心线的横截面, 在变形后仍保持为平面, 但与变形后钻柱中心线的垂直平面相对偏转了一个角度。于是, 在自然曲线坐标系 $O_s TNB$ 中, 钻柱截面内任一点 (T, N, B) 的变形方程为:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) = u_T \mathbf{e}_T + v_N \mathbf{e}_N + w_B \mathbf{e}_B \\ u_T(s, t) = u_s(s, t) + \phi_N(s, t)B - \phi_B(s, t)N + \phi_T'(s, t) \cdot \Phi(N, B, t) \\ v_N(s, t) = v_s(s, t) - \phi_T(s, t)B \\ w_B(s, t) = w_s(s, t) + \phi_T(s, t)N \\ \nabla^2 \Phi(N, B) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial B^2} = 0 \end{cases} \quad (1-1-11)$$

式中, u_T, v_N, w_B 是钻柱沿自然坐标系 $(\mathbf{e}_T, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_B)$ 三个方向的位移分量; u_s, v_s, w_s 分别是钻柱轴心线沿 $(\mathbf{e}_T, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_B)$ 三个方向的位移分量; ϕ_T, ϕ_N, ϕ_B 分别是钻柱轴心线绕 $\mathbf{e}_T$ 轴、 $\mathbf{e}_N$ 轴、 $\mathbf{e}_B$ 轴方向的转角, 其中 ϕ_N 和 ϕ_B 是仿照 S. P. Timoshenko 剪切梁理论(胡海昌, 1981)引入的两个广义位移函数。 $\Phi(N, B)$ 是 Saint-Venant 扭转的翘曲函数, 它是一个调和方程。由式(1-1-11)可得钻柱应变方程如下:

$$\begin{cases} \epsilon_T = \frac{\partial u_T}{\partial s} = u_s'(s) + \phi_N'(s)B - \phi_B'(s)N + \phi_T''(s)\Phi(N, B) \\ \epsilon_N = \frac{\partial v_N}{\partial N} = 0 \\ \epsilon_B = \frac{\partial w_B}{\partial B} = 0 \\ \gamma_{TN} = \frac{\partial u_T}{\partial N} + \frac{\partial v_N}{\partial s} = v_s'(s) - \phi_B'(s) - \phi_T'(s)B + \phi_T'(s)[\partial \Phi(N, B) / \partial N] \\ \gamma_{TB} = \frac{\partial u_T}{\partial B} + \frac{\partial w_B}{\partial s} = w_s'(s) - \phi_N'(s) + \phi_T'(s)N + \phi_T'(s)[\partial \Phi(N, B) / \partial B] \\ \gamma_{NB} = \frac{\partial v_N}{\partial B} + \frac{\partial w_B}{\partial N} = 0 \end{cases} \quad (1-1-12)$$

1.1.4 物理方程

由弹性力学的 Hooke 定律, 可知:

$$\begin{cases} \sigma_T = \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon + \epsilon_T \right) \\ \sigma_N = \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon + \epsilon_N \right) \\ \sigma_B = \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon + \epsilon_B \right) \\ \tau_{TN} = G \cdot \gamma_{TN} \\ \tau_{TB} = G \cdot \gamma_{TB} \\ \tau_{NB} = G \cdot \gamma_{NB} \end{cases} \quad (1-1-13)$$

式中, E 是弹性模量; μ 是泊松比; G 是剪切弹性模量; $\epsilon = \epsilon_T + \epsilon_N + \epsilon_B$ 。

将式(1-1-12)代入上式后, 整理即得:

$$\begin{cases} \sigma_T = E_0 \cdot [u'_s(s) + \psi'_N(s)B - \psi'_B(s)N + \phi''_T(s)\Phi(N, B)] \\ \sigma_N = \frac{\mu\sigma_T}{1-\mu} \\ \sigma_B = \frac{\mu\sigma_T}{1-\mu} \\ \tau_{TN} = G\{\dot{v}'_s(s) - \phi_B(s) - \psi'_T(s)B + \psi'_T(s)[\partial\Phi(N, B)/\partial N]\} \\ \tau_{TB} = G\{\dot{w}'_s(s) + \psi_N(s) + \phi'_T(s)N + \psi'_T(s)[\partial\Phi(N, B)/\partial B]\} \\ \tau_{NB} = 0 \end{cases} \quad (1-1-13a)$$

式中, $E_0 = E(1-\mu)/[(1+\mu)(1-2\mu)]$ 。

设钻柱是轴对称截形, 且为各向同性材料, 由式(1-1-13a)不难得出如下的内力方程:

$$\begin{cases} T = \iint_A \sigma_T dNdB = E_0 A u'_s(s) \\ Q_N = \iint_A G \gamma_{TN} dNdB = GA[\dot{v}'_s(s) - \phi_B(s)] \\ Q_B = \iint_A G \gamma_{TB} dNdB = GA[\dot{w}'_s(s) + \psi_N(s)] \\ M_N = \iint_A \sigma_T B dNdB = J_N \psi'_N(s) \\ M_B = \iint_A \sigma_T N dNdB = -J_B \psi'_B(s) \end{cases} \quad (1-1-14)$$

式中, A 为钻柱横截面积。假设 J_ρ 是钻柱的截面极惯性矩, J_N 和 J_B 是截面轴惯性矩, 则有: $J_\rho =$

$$\iint_A (B^2 + N^2) dNdB; \quad J_N = \iint_A B^2 dNdB; \quad J_B = \iint_A N^2 dNdB.$$

由式(1-1-4)、(1-1-5) 和式(1-1-14) 可形成 7 个独立的方程式, 同时在上述方程中共有 u_s 、 v_s 、 w_s 、 ψ_T 、 ψ_N 、 ψ_B 和 Φ 等 7 个未知函数, 因而所建立的基本方程符合定解条件。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(C_M \frac{\partial \psi_N}{\partial s} \right) + C_Q \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} - \psi_N \right) = 0 \quad (1-1-18)$$

式中, T_s 为管柱轴向的上提拉力; C_Q 、 C_M 分别是钻柱的剪切刚度与弯曲刚度; $C_Q = kGA$, k 为无量纲的剪切系数; $C_M = EJ_N$ 。

设井壁具有足够的刚度, 钻柱与井壁之间的接触长度为 s_c , Δ 相对 L 是一个小量。于是有:

$$\begin{cases} \omega_s = \frac{s^2}{2R_w} & 0 \leq s \leq s_c \\ \omega_s = \frac{ss_c}{R_w} - \frac{s^2}{2R_w} & s_c \leq s \leq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (1-1-19)$$

将式(1-1-19)中的第一式和第二式分别代入式(1-1-17)和式(1-1-18)后积分, 并根据边界条件和连续条件对系数求解后, 可得管体与井眼上井壁之间 ($0 \leq s \leq s_c$) 接触面上的作用力分布为:

$$h_B(s) = -q_0 \operatorname{ch}(\lambda s) - T_s/R_w \quad (1-1-20)$$

式中, $\lambda = \sqrt{C_Q/C_M}$; $s_c = \frac{L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2R_w\Delta}$, s_c 是分界点 C_1 所对应的接触面半长; q_0 是接触力系数, 且有 $q_0 = C_Q \left\{ R_w \left[\operatorname{ch}(\lambda s_c) + \operatorname{sh}(\lambda s_c) \lambda \left(\frac{L}{2} - s_c \right) \right] \right\}^{-1}$ 。

由式(1-1-20)知, 在定向井弯曲井段, 上提钻柱时, 沿管柱与井壁之间接触面上的作用力是压力, 呈双曲余弦曲线 $\operatorname{ch}(\lambda s)$ 分布; 在分界点 ($s = \pm s_c$) 处较大, 而在中部 ($s = 0$ 附近) 较小。

同时, 不难求得接触面中点 C_0 处管柱的最大弯曲应力 $\sigma_{\max} = (ER_0)/R_w$, 其中 R_0 为钻杆的半径。对于直径为 114.3 mm、壁厚为 8.56 mm、单位长度重量为 24.7 kg/m 的标准 E 级钻杆, 在 $R_w = 70$ m 的中曲率半径弯曲井段, 其弯曲应力值 $\sigma_{\max} \approx 171.45$ MPa, 约为 E 级钢钻杆平均屈服极限 ($\sigma_s = 586.054$ MPa) 的 29.25%。这说明, 在定向井弯曲井段, 钻柱的刚性效应不容忽视。

1.2 弹性管柱的变形控制方程

1.2.1 一般控制方程

忽略横向剪切变形和剪应力对管柱挠曲变形的影响, 则细长梁理论适用。对于圆截面管柱, 假设其抗弯刚度为 EI , 则由细长梁理论可得如下关系式:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= EI(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') + M_T \mathbf{r}' \\ M_B &= EI k_b \end{aligned} \quad (1-2-1)$$

式中符号意义同前。假设弹性管柱具有不可伸长性, 则有如下关系成立:

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 \quad (1-2-2)$$

由式(1-2-1)对 s 求导后, 再将(1-1-1)式代入, 可得:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times [(EI\mathbf{r}'')' + M_T(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')] + M'_T \mathbf{r}' \quad (1-2-3)$$