

高中物理

解题中的 数学技巧

曹伟达 编著

农村读物出版社

北科院

封面设计 姬小农

内容提要

立于最新修订的《中学教学大纲》和《考试说明》的新精神；全面讲解物理解题中的各种数学方法，系统学习数学在解决物理问题中的抽象思维方法和解题技巧。

ISBN 7-5048-3383-5



9 787504 833839 >

ISBN 7-5048-3383-5/G·958

定价: 16.80元

高中物理解题中的 数学技巧

曹伟达 编著

农村读物出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中物理解题中的数学技巧/曹伟达编著. - 北京: 农村读物出版社, 2001.1

ISBN 7-5048-3383-5

I. 高... II. 曹... III. 物理课-高中-解题-教学参考资料 IV. G634.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 74348 号

出 版 人	沈镇昭
责任编辑	洪兆敏
出 版	农村读物出版社 (北京市朝阳区农展馆北路 2 号 100026)
发 行	新华书店北京发行所
印 刷	北京忠信诚胶印厂
开 本	850 × 1168mm 1/32
印 张	11 5
字 数	294 千
版 次	2001 年 1 月第 1 版 2001 年 1 月北京第 1 次印刷
印 数	1~5 000 册
定 价	16.80 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

前 言

数学是描述物理规律的简洁精确的语言。数学对于物理而言不仅是一种计算工具，也是物理学的思维方法。只有系统地掌握物理中的数学方法，才能更好地理解物理概念和定律，深入地揭示物理现象和物理过程中的实质。

中学物理教学大纲明确提出，要注意培养学生运用数学解决物理问题的能力。高考把对能力的考核放在首位，理解能力、推理能力、分析综合能力、应用数学解决物理问题的能力和实验能力是物理高考的能力要求。五种能力中的前三种能力最终都要落在数学能力上，物理与数学有着必然的联系，因此，物理高考对学生的数学能力提出了两方面的要求：其一是从物理现象与过程出发，经过概括、抽象，把物理问题转化为数学问题的能力；其二是综合运用数学知识，正确、迅速地进行有关问题计算的能力。许多学生高考得分低，数学能力较差是重要原因之一。同时我们也看到有的学生数学成绩较好，物理解题能力却不强，不会用数学方法解决物理问题。

高中数学学科，纯数学计算、推导、证明较多，应用题较少，使学生应用数学方法解决实际问题能力较差。高中物理学科，没有将物理中的数学方法作为一个专题给学生讲解，这方面的知识漏洞学生在物理解题中暴露出来。学生要在物理解题中正确运用数学知识，达到物理高考对数学能力要求的水平，需要将物理中的数学方法作为专题系统学习、研究。本书就是针对上述问题而编写的。

本书立足于最新修订的《全日制普通高级中学教学大纲》和

《考试说明》的新精神，并融合 2000 年高考命题的新特点，注重知识的系统性、条理性，全面的讲解物理解题中的各种数学方法，并通过大量典型例题使学生系统学习数学在解决物理问题中的抽象思维方法和各种解题技巧。在总结和吸收众多成功指导高考复习的经验基础上，精选了较多高考和各地模拟考试试卷中对数学能力要求较高的习题，通过一定量的习题训练，使学生所学知识得到巩固，达到提高物理解题能力的目的。由于作者水平有限，缺点、错误在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

2000.1

目 录

前言

第一章 物理中的数学方法与思维模式	1
第一节 数学方法在物理中的功能.....	1
第二节 如何提高物理中的数学能力.....	9
第三节 数学方法在物理中应注意的问题	15
第四节 物理解题的基本步骤与注意事项	18
第五节 物理中的科学思维方法	21
第二章 高中物理中代数知识的应用	30
第一节 物理中的方程与方程组	30
第二节 比例与比例函数在物理中的应用	60
第三节 数列在物理中的应用	78
第四节 物理中的不等式	93
第五节 物理中的近似估算法.....	124
第六节 物理量的平均值.....	146
第三章 高中物理中几何知识的应用	163
第一节 物理中的三角函数.....	163
第二节 三角形在物理中的应用.....	192
第三节 圆在物理中的应用.....	203
第四节 物理中的矢量运算方法.....	233

第四章 高中物理中的数形结合及微元法	264
第一节 图像法在物理中的应用.....	264
第二节 物理中极值和最值问题.....	297
第三节 微元法在物理中的应用.....	337
参考答案	357

第一章 物理中的数学方法与思维模式

中学物理教学大纲明确指出：“在物理教学过程中，应该通过概念的形成，规律的得出，模型的建立，知识的应用……培养学生的分析、概括、抽象、推理、想象等思维能力”。“物理高考对能力的要求概括为五个方面：理解能力、推理能力、分析综合能力、应用数学工具解决物理问题的能力、实验能力”。这五方面，理解能力是基础；推理能力和分析综合能力是核心；数学能力是保证；实验能力是基本要求。五方面能力的前三者也可以说是数学思维方法在物理中的应用。因此，提高数学方法在解决物理问题中应用的能力，是学生培养五方面能力的必要条件。

第一节 数学方法在物理中的功能

对学生而言，在物理解题中如果只会分析物理过程，建立物理模型，而不能准确、灵活的运用数学方法解题，是不可能得到正确答案的。其次，对于一些题目，只有通过数学推导才能找到某些物理量之间的关系和物理规律，从而揭示某种物理现象下隐含的本质，达到认识上的深化与提高。

数学方法的主要特点在于它的严密性、逻辑性和高度抽象性。数学在物理学中的功能有三个方面：

一、数学是表达物理概念、物理定律最简明而准确的语言

数学为物理提供了一种简洁精确的形式化的语言，牛顿的代

表著作《自然的数学原理》一书，全部都采用了数学的语言对力学的基本定律做了科学的系统的论述。高中物理中的概念的量化和定律表达都是凭借数学语言来实现，比如：匀速圆周运动的向心力公式是由微分数学方法推导出来；万有引力定律、库仑定律和动能定理用数学语言建立了力与空间的量的关系，动量定理用数学语言建立了力与时间的量的关系。下面通过举例说明数学如何通过方程描述解答物理习题。

例 1 如图 1-1-1 所示，一排人站在沿 x 轴的水平轨道旁，原点 O 两侧的人的序号都记为 n ($n=1, 2, 3, \dots$)。每人有一个沙袋， $x>0$ 一侧的每个沙袋质量 $m=14\text{kg}$ ， $x<0$ 一侧的每个

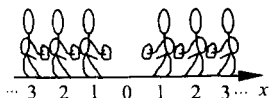


图 1-1-1

沙袋质量 $m=10\text{kg}$ 。一质量 $M=48\text{kg}$ 的小车以某初速度从原点出发向正 x 方向滑行，不计轨道阻力，当车每经过一人身旁时，此人就把沙袋以水平速度 v 朝与车速相反的方向沿车面扔到车上， v 的大小等于扔此袋之前的瞬间车速大小的 $2n$ 倍 (n 是此人的序号数)。求：

- (1) 空车出发后，车上堆积了几个沙袋时车就反向滑行？
- (2) 车上最终有大小沙袋共多少个？

分析与解答：解法一：由于小车的速度逐级变化，使得问题越来越复杂，为使问题得到解决我们先用数学归纳法分析。

(1) 在 $x>0$ 的一侧：

$$\text{第 1 人扔袋： } Mv_0 - m \cdot 2v_0 = (M + m)v_1$$

$$\text{第 2 人扔袋： } (M + m)v_1 - m \cdot 2 \cdot 2v_1 = (M + 2m)v_2$$

$$\text{第 3 人扔袋： } (M + 2m)v_2 - m \cdot 2 \cdot 3v_2 = (M + 3m)v_3$$

.....

$$\text{第 } n \text{ 人扔袋： } [M + (n - 1)m]v_{n-1} - m \cdot 2nv_{n-1} = (M + nm)v_n$$

要车反向,则要 $v_n < 0$,亦即: $M + (n-1)m - 2nm < 0$

∴解得 $n > 2.4$,取整数即车上堆积有 $n = 3$ 个沙袋时车将开始反向(向左)滑行.

(2) 只要小车仍有速度,都将会有人扔沙袋到车上,因此到最后小车速度一定为零.

在 $x < 0$ 的一侧: 令 $(v = v_3)$

经左侧第 1 人: $(M + 3m)v - m'2v = (M + 3m + m')v_1$

经左侧第 2 人: $(M + 3m + m')v_1 - m'4v_1 = (M + 3m + 2m')v_2$

.....

经左侧第 n' 人 (最后一次): $[M + 3m + (n' - 1)m']v_{n'-1} - m'2n'v'_{n'-1} = 0$

解得: $n' = 8$

故车上最终共有 $N = n + n' = 3 + 8 = 11$ (个沙袋)

解法二: 因为最后一次扔上沙袋后,车将会停下来,所以选最后一次相互作用来研究会使问题简单. 设最后扔上质量为 m 的沙袋有 n 个, m' 的沙袋有 n' 个,则扔最后一次沙袋后总动量为零.

$[M + nm + (n' - 1)m']v' - m'2n'v' = 0$ (设扔最后一次前车速为 v')

解得: $n' = \frac{M + nm}{m'} - 1$. 即 $n' = \frac{48 + 14n}{10} - 1$

∴ n 及 n' 必须是正整数.

∴当 $n = 1$ 时, $n' = 5.2$ 不合理; 当 $n = 2$ 时, $n' = 6.6$ 不合理; 当 $n = 3$ 时, $n' = 8$ 合理.

即在 $x > 0$ 一侧扔上 3 个沙袋时车反向, 在 $x < 0$ 一侧扔上第 8 个沙袋后车停下来, 最后扔上车共有 $(3 + 8) = 11$ 个沙袋.

从此题的解答过程看出, 只有通过数学语言才能够全面地将物理过程中的物理量的关系和变化准确的表达出来, 并得到准确

的答案。第二种方法更加体现了数学方法在解答物理题中的作用，经过对整个物理过程的分析，应用一个动量守恒定律数学关系式概括了整个物理过程中各物理量之间的内在联系，简明而完整地描述了整个物理过程。

二、数学是进行抽象思维、逻辑推理的有力工具

如何将数学中学到的逻辑思维方法和推理方法灵活地运用到物理解题之中是学生学习物理的重要内容。只有掌握推理能力才能从物理现象中找到各物理量之间的逻辑关系和因果关系，建立准确的数学方程；只有掌握了推理能力，才能将复杂的数学方程运算到底，得到完整的答案。请看下面例题。

例 2 有一粒子源置于一平面直角坐标 O ，如图 1-1-2，可向第一象限的平面内以相同的速率 v 发射不同方向的电子（质量为 m ，电量为 e ），欲使这些电子穿过垂直纸面磁感应强度为 B 的匀强磁场后，都能平行于 $+x$ 方向运动。求该磁场方向和磁场区域的最小面积 S 。

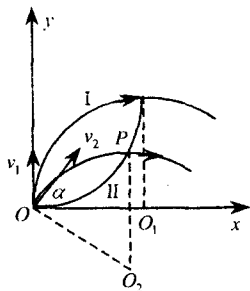


图 1-1-2

分析与解答：由左手定则知匀强磁场方向垂直纸面向里。根据牛顿定律

$Bev_0 = m \frac{v_0^2}{R}$ 可知，所有电子在这个匀强磁场中均做半径为 $R =$

$\frac{mv_0}{Be}$ 的匀速圆周运动。沿 y 轴正方向射入的电子须转过 $1/4$ 圆周才能沿 y 轴正方向运动，它的轨迹可当作该磁场的上边界 I，如图 3-3-19 所示，其圆方程为 $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ 。如何找出最小磁场区域的下边界，这是本题的难点。

设与 x 轴成任意角 α ($90^\circ > \alpha > 0$) 射入的电子转过一段较

短圆弧 $\widehat{OP}$ (其圆心为 O_2), P 点电子的运动方向沿 $+x$ 方向, 设 P 点的坐标为 (x, y) , 因为 PO_2 必是垂直于 x 轴, 则 $x = R \sin \alpha$, $y = R - R \cos \alpha$, 于是有: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$. 此方程也是一个以 $(0, R)$ 点为圆心, R 为半径的圆, 这就是该磁场所必须的下边界 Π . 故该磁场的最小范围应是上述两个圆的交集, 所围面积就是要求的最小磁场区域的面积.

$$\therefore S = 2\left(\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\frac{mv_0}{Be}\right)^2.$$

分析解题过程可知, 带电粒子在匀强磁场中作相同半径的匀速圆周运动是从物理概念得出. 题所求的上下边界是通过几何、数学方法推理确定的, 解题过程中应用了几何证明、三角函数、圆方程、特殊几何图形的面积计算等多种数学方法, 充分体现了数学推理在物理解题中的重要地位.

应用数学方法的推理能力是学习和研究物理的基本能力, 许多大物理学家也是数学家, 许多物理学中的发现是数学家通过数学计算推理得出科学的预见. 比如: 爱因斯坦的相对论, 质能联系方程的得出; 光的波粒二象性理论的建立; 地球的质量、海王星和冥王星的发现; 麦克斯韦得出了电磁波以光速传播的结论, 预言无线电波传播的可能性等等, 都是在物理实验数据的基础上运用数学推理、数学方法推算出来的. 下面以爱因斯坦的相对论为例子说明数学在物理推理中的作用.

例 3 二十世纪初物理学家爱因斯坦指出以速度 v 运动着的粒子的总能量可按下列公式计算:

$$E^2 = C^2 P^2 + m^2 C^4$$

式中 C 为真空中的光速, P 为粒子的动量. 那么粒子的能量解为:

$$E = \pm \sqrt{C^2 P^2 + m^2 C^4}.$$

此式有正负两个解, 正值容易理解. 而如何理解带负号的第二个解呢? 难道存在具有负能量的运动着的粒子吗? 当时多学科

学家认为爱因斯坦方程的负解是荒谬的，然而只有英国青年物理学家狄拉克于1928年大胆地宣称：有一种真实的粒子以一种不寻常的状态存在着，爱因斯坦方程中的负解描述的就是这种粒子。四年后，狄拉克根据爱因斯坦方程的负解所作的预言被证实了，狄拉克预言的那种不可思议的粒子在宇宙射线中被发现，这就是正电子。这个例子生动地说明了数学推理极大地提高了物理预见能力。

三、数学提供了物理学中数量分析和计算手段

没有对物理量变化情况的定量分析和计算，就不能完全掌握它的变化规律。物理知识的深化是在数学水平的提高中体现出来的，例如许多物理问题高中数学无法解决，需要微分方程求解，本书介绍的微元法，是微积分思想在高中物理中的应用，从中学生能体会到数学的威力。

例4 无限长的均匀带电细线，单位长度带正电荷为 η ，将其弯成如图 1-1-3 所示的平面图形，其中 AB 是半径为 R 的半圆弧， AA' 平行于 BB' ，试求圆心 O 处的电场强度。

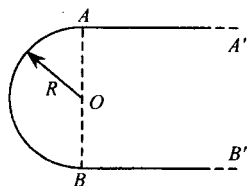


图 1-1-3

分析与解答：在细线的圆弧上任取一小段弧 ab ，如图 1-1-4 所示，则 $ab = R \cdot \Delta\theta$ ， ab 上电荷可看成点电荷。

连 aO ， bO 并延长，分别交 BB' 于 a' 、 b' ，则 ab 在圆心 O 处产生的场强大小为：

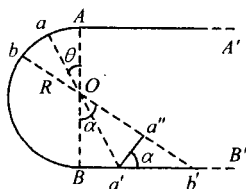


图 1-1-4

$$\Delta E = \frac{k\eta R \cdot \Delta\theta}{R^2} = \frac{k\eta \cdot \Delta\theta}{R} \quad (1)$$

过 a' 作 $a'a'' \perp bb'$, 交 bb' 于 a'' ,

$$\text{则: } a'b' = \frac{a'a''}{\cos \alpha}; \quad (2)$$

$\therefore \Delta\theta$ 是微元角

$$\therefore \alpha = \theta + \Delta\theta = \theta \quad \text{并} \quad \alpha a' = ob' \quad (3)$$

设 $\alpha a' = r$, 由②、③得:

$$a'b' = \frac{a'a''}{\cos \alpha} = a'a'' \frac{r}{R} \quad (4)$$

$$\text{又} \quad a'a'' = r \cdot \Delta\theta,$$

$$\text{则: } a'b' = \frac{r^2 \cdot \Delta\theta}{R} \quad (5)$$

因此, $a'b'$ 在圆心 O 处产生的场强为:

$$\Delta E' = k\eta \frac{a'b'}{r^2} = \frac{k\eta \cdot \Delta\theta}{R}. \quad (6)$$

从①、⑥可知 $\Delta E = \Delta E'$, 而 ΔE 与 $\Delta E'$ 的方向相反, 合场强为零, 证得任意一小段圆弧与其关于圆心 O 对应的直线段 $a'b'$ 在 O 点合场强为零, 求和可得在 O 点场强为零。

微元法对物体运动微小单元的分析能从近似出发得到精确的数学关系, 从个性出发得到共性的结果, 找到物体运动所遵循的规律, 微元方程中的变量反映了物理的变化规律, 精确的描述了物理过程, 能够解答一些常规方法难以解决的问题. 从本题看到数学分析和计算手段的重要性。

中学物理中, 数学计算方法主要是初等数学, 解题中除了大量用到各种基本运算和布列方程、恒等变换等数学知识外, 下列几方面是较常用到的数学概念和方法:

1. 比例的应用 比例在物理解题中是常用的数学方法, 例如: 初速为零的匀变速直线运动的位移与时间的平方成正比; 一段粗细均匀的某金属导体的电阻与它的长度成正比, 与横截面积成反比. 类似这样的比例关系在中学物理中不胜枚举。

2. 三角知识的应用 解直角三角形法可用于力、速度、位

移等矢量的正交分解；三个共点力平衡时可应用正弦定理和余弦定理；在不同角度范围内各三角函数增减变化快慢与它引起相关物理量变化的讨论都要用到三角知识。

3. 几何知识的应用 物理解题一般需要画图，有些图形实际是道几何题，如果学生不能从图形中找出几何证明的关系，解题也就无从下手。大部分物理章节都应用到几何知识，例如：运动学的图像法中的几何证明；力的合成和分解中三角形、四边形、各角、各边的关系证明；电磁场与力学的综合题中三角函数、相似形、圆的几何知识应用；几何光学中公式的证明，习题解答，均用到全等形、相似形、平行线、角度关系等几何知识。

4. 不等式的应用 物理量经常要求指出它的上限或下限，有时要指出它可能存在的区间，这往往要运用不等式求解。

5. 极值的应用 物理量间的关系常常出现极值问题。常用的数学方法有分式性质、三角函数性质、一元二次方程判别式应用、二次三项式性质等。求物理极值时应注意一些数学方法的物理结论可以直接应用，如速度最大值常发生在加速度为零之时；追击问题的两物体相距最远或最近时一般是两物体速度相同之时。

6. 直角坐标图像的应用 函数图像和函数式一样，是描述物理过程的数学方法，数形结合对某些题的解法，使各物理量之间的关系更直观、更清楚，方法简捷。

7. 微元法的应用 一切宏观的量都是由微小单元组成，我们对微小单元的分析，找到物体运动所遵循的规律，这种方法叫做微元法。微元法是高中物理解题方法之一，高中物理中的即时速度、即时加速度概念就是用这种思想方法引出的。微元法能够解答一些常规方法难以解答的习题，全国物理高考曾出现这类题型。所谓微元法物理模型，其实质就是大学物理中微积分应用的初级方法。

有关上述各种数学方法的应用，在第二、第三、第四章从理

论讲解到例题分析，将给以详细论述。

第二节 如何提高物理中的数学能力

高考对物理解题中的数学能力提出较高的要求，物理解题中的数学能力主要体现在两个方面，其一是从物理现象与过程出发，经过概括、抽象，把物理问题转化为数学问题的能力；其二是综合运用数学知识正确、迅速地进行有关问题计算的能力。提高物理解题中的数学能力应从两方面着手：①打好数学基础。②培养和提高运用数学方法与物理相结合的能力。

一、重视培养运用数学语言和方法表述物理概念、物理规律的能力

准确的分析物理现象，理清物理概念，并能将物理问题转化为数学问题的能力，是解题的基本要求，这种能力从物理和数学知识的结合上提出了较高的要求，是对物理现象加工水平的体现，也是分析综合能力和判断推理能力的运用水平的体现。这种能力的培养需要掌握系统的科学思维方法，在平时的解题中不断的积累解题经验和技巧，逐步完善自己的知识体系和思维方法体系。

例 5 如图 1-2-1 所示，将两本书 A 和 B 逐面交叉地迭放在一起，置于水平桌面上，设每面书的质量为 $5g$ ，每本书均为 200 页，纸与纸之间的静摩擦因数 $\mu = 0.3$ ，若书 A 固定不动，使用水平向右的力 F 把书 B 抽出，试问 F 的值至少为多大？

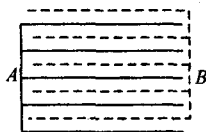


图 1-2-1

分析与解答：设抽出每一页书的水平力依次为 T_1 、 T_2 、 $T_3 \cdots T_n$ ，它们分别等于该页书上、下两面所受到的摩擦力。