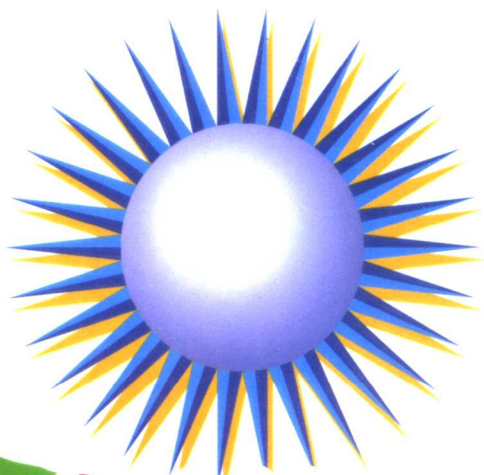




主 编 北京大学数学科学学院 田勇

编 写 双博士考研数学命题研究组

总策划 胡东华



硕士研究生 入学考试 历年考点汇编及应试精华

理工数学二



机械工业出版社
China machine Press

硕士研究生入学考试历年 考点汇编及应试精华

[理工数学二]

主 编 北京大学数学科学学院 田 勇
编 写 双博士考研数学命题研究组
总策划 胡东华



机械工业出版社

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。未经本策划人同意,禁止其他单位或个人使用。



图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试历年考点汇编及应试精华. 理工数学. 2/田勇主编. —北京:机械工业出版社, 2003. 5

ISBN 7-111-12079-5

I. 硕… II. 田… III. 理工数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 032142 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮编:100037)

责任编辑:于奇慧

责任校对:刘 鑫

封面设计:胡东华

责任印制:何全君

北京市高岭印刷厂印刷

机械工业出版社出版发行

2003 年 7 月第 1 版 第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16 8.875 印张 字数 106 千字

定价:11.00 元

©版权所有 违法必究

盗版举报电话:(010)62534708(著作权者)

<http://www.bbdd.cc>(中国教育考试双博士网站)

<http://www.cmpbook.com>(机械工业出版社网站)

凡购买本书,如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

<http://www.bbdd.cc>

“考研押题讲座”免费授课计划

一、内容:考研政治、英语、数学(一、二、三、四)、西医综合科目考前一个半月押题讲座

二、讲座总策划及献爱心人:胡东华

三、讲座资料提供:

北大、清华、人大考研辅导班资料采编组

联合提供

京城考研命题信息搜集研究组

四、免费讲座时间:2003年12月1日—2004年1月15日

五、网站:中国教育考试双博士网站:<http://www.bbdd.cc>

六、课程表:

时 间 科 目	12月第1周	12月第2周	12月第3周	12月第4周	1月第1周	1月第2周
政 治	马克思主义哲学 政治经济学	毛泽东思想概论	邓小平理论概论	国际政治、 时事政治	网上通知	网上通知
英 语	听力	英语知识运用	阅读理解 A (命题趋势)	阅读理解 B (英译汉)	写作命题预测 及背诵范文	网上通知
数 学 一	高数 (1~5)	高数 (6~11)	线性代数	概率论与 数理统计	网上通知	网上通知
数 学 二	高数(1~3)	高数(4~6)	高数(7~11)	线性代数	网上通知	网上通知
数 学 三	微积分 (1~5)	微积分 (6~10)	线性代数	概率论与 数理统计	网上通知	网上通知
数 学 四	微积分 (1~5)	微积分 (6~10)	线性代数	概率论	网上通知	网上通知
西医综合	生理学 生物化学	病理学	外科学	内科学	网上通知	网上通知

(如有变化,另行通知)

双博士品牌 真情大奉献

来自北京大学研究生会的感谢信

双博士:

您好!

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助!师恩难忘,北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一,是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人,双博士曾陪伴我们度过考研岁月的无数个日日夜夜,曾带给我们无数个明示和启发,当然也带给我们今天的成功。

特致此信,向双博士表达我们内心长久以来的感激之情,并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

2002. 12

郑州某大学学生的来信

双博士:

您好!

.....

我曾购买了“双博士”的《大学英语精读课文辅导》(3)、(4)册,我认为质量很好,因为我在准备2001年6月份的全国四级考试前没买太多的辅导资料,仅是每天背《辅导》上的知识点,另外又做(看)了双博士的模拟题、真题解析及词汇,而我却考出了94.5分的骄人成绩,真应感谢双博士为我们带来了如此上乘的资料。我信赖双博士,也相信考研中借助双博士的力量,会取得更好的成绩。所以我在您寄来的书目中挑了一下,如果可以的话,我想得到代号为“RB12”的《考研应试教程(英语分册)》,或者是代号为“B18A”的《研究生入学考试英语词汇·考点·记忆法·用法详解》。两本书中的任何一本,我都相信会根我带来好运!

另外,.....

李 XX

2001 年 11 月 22 日

天津某高校学生的来信

双博士:

你们好!

.....

我们都知道,英语学习中,口语是非常重要的,而《英美流行口语》正是我们所需要的,是一场及时雨。五一、五四前后,我校将举办一次口语演讲比赛,我们将把这几本书作为奖品赠送给口语出色的同学,相信他们会很意外,也会很高兴的。双博士为我们着想,我们也希望能以微小之力量,给她的工作以支持和回报。其实,我想,只要我们真正为爱好英语的同学做了事,使他们从中受了益,英语有了提高,就是对“双博士”最好的回报了,对不对?

还有,我校对购买“双博士”图书比较困难,到书店买,常被抢购一空,由老师订购又“姗姗来迟”,所以,我想与你们联系,能否帮同学们统一订购?如可以,请将你们的订购时间、办法等以传真方式告诉我。

.....

英语俱乐部部长:于 XX

2002 年 4 月 24 日

前 言

本书属于双博士品牌考研丛书中的数学系列,共包括高等数学和线性代数 2 篇。该书涵盖了 1990—2003 年的数学真题,每章体系明晰,内容精练。其鲜明特点有:

考点详解及分析:该系列考点汇编根据最新的考研大纲,对每章的考点进行分析及提炼,以便考生能把握复习重点,安排复习详略。

历年真题评析:这一部分汇总了与每个考点相关的历年真题,以便考生更准确地理解考点,把握出题规律,理清复习思路。

解题技巧总结:该部分总结了与每个考点相关的常用解题技巧,方法简单有效,易于掌握。

本书作者在 2003 年 11、12 月份进行考研网上免费押题讲座,届时敬请垂询:<http://www.bbdd.cc>。此义举将为考生最后的拼搏指点迷津。该讲座已成功举办两年,受益群体多达 20 万之众。

凡购买双博士品牌考研丛书累计 60 元者,在临考前一个月可获赠英语及政治密押(内部资料)试卷各一套!(详见书中夹页)

本书采用双色排版,用 60 克特制的防盗版白色胶版纸印刷,且每印张的价格不上涨,其直接目的是以广大考生利益为中心,并遏制盗版。

双博士全体同仁非常感谢考生对双博士品牌的厚爱,并衷心希望广大考生对双博士图书质量的改进提出具体意见,可以发电子邮件进行交流(shuangboshi@sina.com),来函必复。针对考生意见采用情况,适当给予双博士图书奖励。

2003 年 7 月于北京

“双博士”网站留言选登

自从2002年11月~12月双博士网站举办考研及四、六级讲座以来,每天都有大量读者留言,交流考试心得和对双博士丛书的观感。现将部分留言选登如下:

	作者: 考研人 来自: 湖北 2003-2-16,23:31:04 留言内容: 今天上网把你们的考研网上押题讲座和你们上传的真题对比来看,押中的题还真不少来! 希望双博士在2004年考研政治理论方面继续给广大考生押题!!
	作者: 奋斗 来自: 福建 2003-2-16,23:40:00 留言内容: 是的,我认为政治理论做的最好的部分是形势与政策部分,其中有关16大的考题共8分全部押中了;毛概部分押中了中国共产党的最低纲领和最高纲领部分;当代部分即最后的两个选作题,都能从押题的相关部分找到答案,这对我特别有用,因为我是一名理科生,对当代部分的内容不熟悉。谢谢双博士!!!
	作者: mmer 来自: 四川 2003-2-9,17:16:50 留言内容: 双博士教辅真的很不错,我和身边的同学用了都说好! 谢谢胡东华老师和编书老师,谢谢你们!
	作者: 格格 来自: 北京 2003-2-18,9:03:44 留言内容: 谢谢上帝我的四级终于过了,谢谢小虫和双博士。
	作者: 红蜻蜓 来自: 湖北 2003-2-1,18:40:21 留言内容: 今天看了大家的留言和回复获益匪浅。这个网站办得挺好。
	作者: 杨康 来自: 安徽 2002-11-28,18:32:47 留言内容: 双博士教育网的同志们,你们出版的书很好。尤其是英语辅导书。你们能给我指导如何做好考研的准备吗? 谢谢你们的关心。
	作者: MATTHEW 来自: 四川 2002-12-2,12:01:37 留言内容: 双博士考研单词记忆法非常棒,这次政治押题讲座上传的内容很不错。还有我想问一下胡老师是否是个基督徒!?
	作者: 谢军华 来自: 湖北 2002-12-6,19:06:05 留言内容: 谢谢主编为我们提供这么方便的讲座!! 在这讲究金钱的世界,你们能全心为我们着想! 太难得了。
	作者: 杨杨 来自: 北京 2002-12-4,9:39:01 留言内容: 你们出的时政形势政策分析这本书及9月以后的补充资料很及时也很全面。谢谢!
	作者: 吴光华 来自: 黑龙江 2002-12-3,18:07:19 留言内容: 你们的東西对我帮助很大,你们的书也挺出色,希望你们能够再接再厉,办得更好,谢谢!
	作者: kaoyan 来自: 北京 2002-11-30,10:53:31 留言内容: 以前用你们的大学英语资料考四六级感觉很好,最近买了一套考研数学最后冲刺题,也还不错,希望你们多多努力,做好这个网站! 很感谢你们!!

目 录

第一篇 高等数学

第一章	函数 极限 连续	(2)
Part A	考点分布及命题规律预测	(2)
Part B	考点汇编	(3)
	函数	(3)
	极限	(10)
	连续	(21)
第二章	一元函数微分学	(27)
Part A	考点分布及命题规律预测	(27)
Part B	考点汇编	(28)
	导数与微分	(28)
	微分中值定理	(37)
	利用导数研究函数特性	(40)
第三章	一元函数积分学	(50)
Part A	考点分布及命题规律预测	(50)
Part B	考点汇编	(51)
	不定积分	(51)
	定积分	(56)
	反常积分	(65)
	定积分的应用	(66)
第四章	常微分方程	(72)
Part A	考点分布及命题规律预测	(72)
Part B	考点汇编	(73)
	一阶微分方程	(73)

可降阶的微分方程	(80)
高阶线性微分方程	(81)
微分方程的应用	(89)

第二篇 线性代数

第一章 行列式	(96)
Part A 考点分布及命题规律预测	(96)
Part B 考点汇编	(97)
数字型行列式的计算	(97)
抽象型行列式的计算	(98)
行列式 $ A $ 是否为零的判定	(99)
第二章 矩 阵	(101)
Part A 考点分布及命题规律预测	(101)
Part B 考点汇编	(102)
矩阵性质及运算	(102)
可逆矩阵	(104)
矩阵方程	(105)
矩阵的秩	(108)
第三章 向 量	(110)
Part A 考点分布及命题规律预测	(110)
Part B 考点汇编	(111)
向量的线性表示	(111)
向量组的线性相关问题	(112)
向量组的最大线性无关组与秩	(114)
第四章 线性方程组	(117)
Part A 考点分布及命题规律预测	(117)
Part B 考点汇编	(118)
齐次线性方程组有非零解、基础解系、通解等问题	(118)
非齐次线性方程组的求解	(119)
非齐次线性方程组有解的判定及解的结构	(122)
第五章 特征值与特征向量	(126)

Part A	考点分布及命题规律预测	(126)
Part B	考点汇编	(127)
	特征值与特征向量的概念与计算	(127)
	相似矩阵与相似对角化	(128)
	实对称矩阵的特征值与特征向量	(130)

高等数学

第一篇



第一章

函数 极限 连续

Part A 考点分布及命题规律预测

一、历年考点分布

分 考 点	年 份	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	合 计
函 数		12	12	12	6	12	14	11	6	13		3	6	8		115
极 限		11	6	11	11	6	8	6	5	11	21	6	3	9	12	128
连 续		3			3	3	5	11	3	8	8	3	15	3	10	75

二、命题规律总结及预测

从历年试题的考点分布来看,本章的考查点分布集中在函数的单调性和周期性、极限的计算和函数在闭区间的连续性(尤其对分段函数的连续性判别)。

命题规律具有如下几点:

1. 极限的计算是每年的考点,在求解极限过程中,我们一般会用洛必达法则,等价无穷小和极限的四则运算法则等方法。要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件,正确求出各种极限。该知识点一般以填空题和计算题形式出现,只要计算正确,是比较容易拿分的。

2. 对数学二来说,函数的基本性质运用也是一常考点,估计2004年会有这方面题型。函数的单调性、周期性和奇偶性经常会结合其他考点出证明题和填空题。

3. 函数的连续性经常会以判断函数的间断点类型和分段函数的连续性形式出现。这也是数学二每年必考的考点。



Part B 考点汇编

函 数

一、考点详解及分析

1. 函数的定义

若数集 D 中每一个 x , 按照一定法则 f , 总有惟一确定的数值 y 与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y = f(x)$, 数集 D 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量. 当 x 取遍定义域 D 的每个数值时, 对应函数值 $f(x)$ 组成的数集

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

一般说来, 函数 $y = f(x)$ 的图形是平面 xOy 上的一条曲线.

2. 函数的几种常见特性

(1) 单调性 设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) \geq f(x_2) \text{)}$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加 (或单调减少).

如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)}$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是严格单调增加 (或严格单调减少) 的.

(2) 有界性 设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 $M > 0$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

(3) 周期性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x + l) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期指最小正周期.

(4) 奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任一 $x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数, 如果对于任一 $x \in D$, 有

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D) \subset D_1$, 则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], x \in D$$

称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数, 它的定义域为 D , 变量 u 称为中间变量.



4. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Y , 若对 Y 中每一个 y 值, 都可有方程 $y = f(x)$ 惟一确定的 x 值, 则得到一个定义在 Y 上的反函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y), y \in Y,$$

易知, 严格单调函数必有反函数, 并且其反函数也是严格单调的.

在习惯上, 为了强调对应规律 f^{-1} , 并将因变量仍记作 y , 通常将反函数写为

$$y = f^{-1}(x), x \in Y$$

它的图形与 $y = f(x) (x \in X)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

5. 隐函数

设 $F(x, y)$ 是一个二元函数, I 是一个区间. 若对任何 $x \in I$, 总有惟一确定的 y 满足方程 $F(x, y) = 0$, 则称函数 $y = y(x) (x \in I)$ 是方程 $F(x, y) = 0$ 在区间 I 上确定的一个隐函数.

6. 分段函数

在定义域的不同部分上有不同表达式的函数, 称为分段函数.

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数. 基本初等函数是指以下六类函数: 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

二、历年真题评析

1. 选择题

(1) (2001 年数学二, 二(1)) 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(f(x))]$ 等于

- (A) 0 (B) 1 (C) $\begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$ []

答案: (B)

思路: 由 $|f(x)| \leq 1$, 代入函数表达式即可

[解析]

由 $|f(x)| \leq 1$, 从而 $f[f(x)] = 1$, 于是 $f[f(f(x))] = 1$.

(2) (2000 年数学二, 二(3)) 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是大于零的可导函数, 且 $F'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有

- (A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ (B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$ (D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$ []

答案: (A)

思路: 由已知可得 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' < 0$, 再根据单调性判断

[解析]

因 $f(x) > 0, g(x) > 0$

故由

$$F'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$$

知

$$\frac{F'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$$

即 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' < 0$, 故 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 单调递减.



从而当 $a < x < b$ 时有 $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$

即 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$

故应选(A).

(3)(1997年数学二,二(5)) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

(A) $\begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$

[]

答案:(D)

思路:逐个代入

[解析]

根据 $g(x)$ 的定义知,复合函数

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x) & f(x) \leq 0 \\ f(x)+2 & f(x) > 0 \end{cases}$$

而 $x < 0$ 时 $f(x) = x^2 > 0$; $x \geq 0$ 时 $f(x) = -x \leq 0$.

故

$$g[f(x)] = \begin{cases} x^2+2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$$

(4)(1995年数学二,二(1)) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义 $f(x)$ 为连续函数,且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点,则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点

(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点

(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

[]

答案:(D)

思路:用反证法排除

[解析]

若 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 无间断点,即连续,则

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot f(x) = \varphi(x)$$

也连续,矛盾,所以 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.(A)、(B)、(C) 均可举反例说明不成立.

(5)(1994年数学二,二(3)) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解,且 $F'(x_0)=0$, 则 $f(x)$ 在

(A) x_0 的某个邻域内单调增加

(B) x_0 的某个邻域内单调减少

(C) x_0 处取得极小值

(D) x_0 处取得极大值

[]

答案:(C)

思路:由已知等式推得 $F'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$, 再判断函数的性质



[解析]

因 $f(x)$ 满足方程

$$f''(x) + F'(x) - e^{\sin x} = 0$$

从而

$$f''(x_0) = e^{\sin x_0} - F'(x_0) = e^{\sin x_0} > 0$$

即有

$$\begin{cases} F'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(6) (1993 年数学二, 二(2)) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$, 则在点 $x = 1$ 处函数 $f(x)$

(A) 不连续

(B) 连续, 但不可导

(C) 可导, 但导数不连续

(D) 可导, 且导数连续

[]

答案: (A)

思路: 分别求左右极限及 $f(1)$ 判断是否满足 $f(1+0) = f(1-0) = f(1)$

[解析]

由于 $f(x) = \begin{cases} -(x+1) & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ 从而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

即 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在, 当然在 $x = 1$ 处 $f(x)$ 不连续.

(7) (1992 年数学二, 二(2)) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$, 则

$$(A) f(-x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ -(x^2 + x) & x > 0 \end{cases}$$

$$(B) f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x) & x < 0 \\ -x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(C) f(-x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - x & x > 0 \end{cases}$$

$$(D) f(-x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

[]

答案: (D)

思路: 把 $f(x)$ 表达式中 x 用 $(-x)$ 代替化简即得

[解析]

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 & -x \leq 0 \\ (-x)^2 + (-x) & -x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

2. (2002 年数学二, 九) 设 $0 < a < b$, 证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

思路: 先构造辅助函数 $\varphi(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$ ($0 < a < x$), $f(x) = (x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x -$

$a)$ 再由单调性即证得

[解析]



证明 ① 先证右边不等式.

$$\text{设 } \varphi(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}} \quad (x > a > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}} \right) \\ &= -\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0 \end{aligned}$$

故当 $x > a$ 时 $\varphi(x)$ 单调减少, 又 $\varphi(a) = 0$, 所以, 当 $x > a$ 时 $\varphi(x) < \varphi(a) = 0$, 即

$$\ln x - \ln a < \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$$

从而当 $b > a > 0$ 时, $\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$, 即

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

② 再证左边不等式.

$$\text{设 } f(x) = (x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x-a) \quad (x > a > 0),$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } f'(x) &= 2x(\ln x - \ln a) + (x^2 + a^2) \frac{1}{x} - 2a \\ &= 2x(\ln x - \ln a) + \frac{(x-a)^2}{x} > 0 \end{aligned}$$

故当 $x > a$ 时 $f(x)$ 单调增加, 又 $f(a) = 0$, 所以当 $x > a$ 时 $f(x) > f(a) = 0$, 即

$$(x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x-a) > 0$$

从而当 $b > a > 0$ 时, 有 $(a^2 + b^2)(\ln b - \ln a) - 2a(b-a) > 0$, 即

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$$

3. (1998 年数学二、三) 求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型.

[解析]

思路: 由各类间断点的定义判定

$f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 为 $\frac{1}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 不存在的点, 即 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = +\infty$, 在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow (\frac{5\pi}{4})^+} f(x) = +\infty$.

故 $x = \frac{\pi}{4}, (\frac{5\pi}{4})$ 处 $f(x)$ 为第二类间断点.

在 $x = \frac{3\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} f(x) = 1$, 在 $x = (\frac{7\pi}{4})$ 处 $\lim_{x \rightarrow (\frac{7\pi}{4})^+} f(x) = 1$.

但相应的函数值在该处无定义, 故 $f(x)$ 在 $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 为可去间断点.

4. (1998 年数学二、十一) 设 $x \in (0, 1)$, 证明:

$$(1) (1+x)\ln^2(1+x) < x^2;$$

$$(2) \frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$$

思路: 构造辅助函数 ① $\varphi(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, ② $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$. 利用导数正负号来证