普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

SHUZI XINHAO CHULI

数字信号处理

张长森　主　编
许炎平　赵鸿图　副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

SHUZI XINHAO CHULI

数字信号处理

主　编　张长森
副主编　许炎平　赵鸿图
编　写　刘瑞礼　李俊霞　苏玉娜
主　审　周力行

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材。

全书共分九章，主要内容包括绪论，离散时间信号系统，Z变换、时域离散信号与系统的频域分析，离散傅里叶变换，快速傅里叶变换算法，数字滤波器的基本结构，无限冲激响应数字滤波器的设计，有限脉冲响应数字滤波器的设计，数字信号处理的实现与工程应用实例。本书编写结构合理，可供不同教学时数选用；内容通俗易懂，便于自学；注重实践应用，各章后都附有相关的MATLAB实现算法。

本书可作为普通高等学校电气信息类等相关专业本科生或研究生教材，也可作为相关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

数字信号处理/张长森主编．—北京：中国电力出版社，2007

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5083-6011-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数字信号－信号处理－高等学校：教材　Ⅳ．TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第125777号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2007年9月第一版　2007年9月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　16.5印张　400千字

印数0001—3000册　定价 **26.00** 元

前　言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育“十一五”教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

数字信号处理是通信工程、信息工程、电子工程等专业的一门主要的专业基础课程。本书系作者多年来从事通信工程、信息工程、电子工程、计算机科学与技术等专业本科生和研究生的教学与科研实践的总结。我们深深地体会到要教好这门课程，一定要针对课程的特点，按照认识论规律进行阐述，讲出从特殊到一般的结合，密切联系实际。

本书既重视理论的系统性、严密性，又充分考虑其应用的先进性和可操作性，具有如下特点：

第一，在教材体系的安排上，本书既包含了数字信号处理的基本内容、基本体系，又使各章有相对的独立性，以便于不同专业，不同教学时数选用。

第二，教材深入浅出，按照认识论规律组织安排内容，从基本概念入手，进行理论推导、特性分析，并将仿真应用到具体实践中，便于自学。

第三，加强了实践性。本书在介绍数字信号处理经典理论的同时，还注重当前发展的水平及最新应用，在第 9 章着重介绍了数字信号处理的软、硬件的实现方法，并且在各章都附有相关内容的 MATLAB 实现算法，各个算法都在 MATLAB 6.5 环境下进行了正确编译。

第四，本书每章后都编写了大量具有代表性的思考题和习题，有助于读者理解和掌握一些重要理论和分析方法。

本书由河南理工大学张长森任主编，河南理工大学许焱平、赵鸿图任副主编。具体编写分工如下：张长森编写第 1、2、3 章，河南理工大学刘瑞礼编写第 4 章，河南理工大学李俊霞编写第 5 章，河南理工大学苏玉娜编写第 6 章，赵鸿图编写第 7、8 章，许焱平编写第 9 章。全书由张长森、许焱平、李俊霞统稿并定稿。在本书的编写过程中，研究生严彩萍、刘保菊进行了部分内容的文字输入和绘图工作，在此特表谢意。长沙理工大学周力行作为本书主审，提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中，参阅了大量的数字信号处理方面的经典教材，部分书目列于书后的参考文献中，在此一并向其作者表示衷心的感谢！

鉴于本书编写时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

作者

2007 年 4 月

目　录

前言
第1章　绪论 …… 1
1.1　数字信号处理课程的概述 …… 1
1.2　典型数字信号处理系统的基本组成 …… 2
1.3　关于数字信号处理的学习方法 …… 4
第2章　离散时间信号系统 …… 6
2.1　离散时间信号(序列) …… 6
2.2　线性移不变系统 …… 16
2.3　常系数线性差分方程 …… 25
2.4　连续时间信号的抽样 …… 28
2.5　离散时间信号的 MATLAB 仿真 …… 35
小结 …… 36
习题 …… 36
第3章　Z变换、时域离散信号与系统的频域分析 …… 38
3.1　Z变换 …… 38
3.2　Z变换的基本性质和定理 …… 51
3.3　Z变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系 …… 59
3.4　序列傅里叶变换的一些对称性质 …… 61
3.5　利用Z变换分析离散信号与系统的频域特性 …… 63
3.6　Z变换和傅里叶变换的 MATLAB 仿真 …… 74
小结 …… 78
习题 …… 78
第4章　离散傅里叶变换 …… 79
4.1　引言、傅里叶变换的几种形式 …… 79
4.2　周期序列的离散傅里叶级数及其基本性质 …… 79
4.3　离散傅里叶变换(DFT) …… 81
4.4　离散傅里叶变换的性质 …… 82
4.5　频域抽样理论 …… 86
4.6　DFT 的应用 …… 87
4.7　离散傅里叶变换的 MATLAB 仿真 …… 93
小结 …… 94
习题 …… 94
第5章　快速傅里叶变换算法 …… 96
5.1　直接计算 DFT 存在的问题及改进的途径 …… 96
5.2　按时间抽取(DIT)的基-2 FFT 算法 …… 97

5.3 按频率抽取(DIF)的基-2 FFT 算法 …… 104
5.4 离散傅里叶反变换(IDFT)的快速算法 IFFT …… 108
5.5 其他FFT快速算法 …… 109
5.6 基于 MATLAB 的 FFT 快速算法 …… 120
小结 …… 125
习题 …… 125
第6章 数字滤波器的基本结构 …… 126
6.1 离散时间系统结构的表示方法 …… 126
6.2 IIR 滤波器的基本网络结构 …… 129
6.3 FIR 滤波器的基本网络结构 …… 133
6.4 数字滤波器的格型结构 …… 137
6.5 数字滤波器的 MATLAB 实现 …… 139
小结 …… 140
习题 …… 140
第7章 无限冲激响应数字滤波器的设计 …… 142
7.1 数字滤波器的基本概念 …… 142
7.2 模拟滤波器的设计 …… 146
7.3 冲激响应不变法设计数字滤波器 …… 157
7.4 双线性变换法 …… 162
7.5 数字高通、带通、带阻滤波器的设计 …… 167
7.6 IIR 数字滤波器的直接设计法 …… 180
7.7 本章涉及的 MATLAB 函数 …… 182
小结 …… 185
习题 …… 186
第8章 有限脉冲响应数字滤波器的设计 …… 188
8.1 线性相位 FIR 数字滤波器的条件和特点 …… 188
8.2 利用窗函数法设计 FIR 滤波器 …… 196
8.3 利用频率抽样法设计 FIR 滤波器 …… 211
8.4 IIR 和 FIR 数字滤波器的比较 …… 216
8.5 本章涉及的 MATLAB 函数 …… 217
小结 …… 219
习题 …… 219
第9章 数字信号处理的实现与工程应用实例 …… 221
9.1 有限字长效应 …… 221
9.2 数字信号处理的软件实现 …… 221
9.3 数字信号处理硬件实现 …… 235
9.4 数字信号处理的工程应用实例 …… 245
小结 …… 252
习题 …… 253
参考文献 …… 255

第1章　绪　　论

1.1　数字信号处理课程的概述

数字信号处理（DSP，Digital Signal Processing）是20世纪60年代以来，随着计算机的高速发展而迅速发展起来的一门新兴学科。它的重要性日益在各个领域的应用中表现出来。

简言之，数字信号处理把信号用数字符号表示成序列，通过计算机或专用信号处理设备，用数字的数值计算方法进行处理（如滤波、变换、压缩、增强、估计、识别等），以达到提取有用信息便于应用的目的。

1.1.1　信号

信号作为信息的一种物理体现，已经是一个被广泛使用的名词了，例如交通信号、报警信号、无线电信号和电视信号等。信号可以用于沟通人与人之间，或人与机器之间的联系；用于控测和利用我们周围的环境，并揭示出那些不易观察的状态和构造细节以及用来控制和利用能源与信息。在信号处理领域里，信号被定义为一个随时间变化的物理量，如电磁波、声波和振动波等。

信号可分为模拟信号和数字信号。通常时间和幅度都是连续的信号称为模拟信号，它们在一个时间区间里的任何瞬间都有确定的值；而时间和幅度上都是离散的信号则称为数字信号，它们只在离散的时间点有确定的值。因此，一个真实世界的物理信号首先要由传感器转换为时间连续、幅度连续的模拟信号，经过采样成为时间离散、幅度仍连续的信号，再经过幅值的量化就成为时间离散、幅度离散的数字信号。现实生活中最常见的传感器是话筒和扬声器。话筒将声压的变化转换为随输入声压变化的电压信号；扬声器则相反，它把电压信号转换为空气压力信号。

信号还可以分为确定信号和随机信号两类。对于确定信号，它的每一个值都可以用有限的参量来唯一地加以描述。例如，直流信号只用一个参量就可以描述，阶跃函数可以用幅度和时间两个参量来描述，而正弦波则可以用幅度、频率和相位三个参量来描述。随机信号则不能用有限的参量来唯一地加以描述，也无法对它的未来值确定地预测，但可以通过统计学的方来进行描述。语音信号、图像信号和噪声等都是随机信号，这些信号可以具有幅度（能量）的随机性，也可具有发生时间的随机性，或者两者兼而有之。

1.1.2　系统

系统的定义为处理（或变换）信号的物理设备。或者说，凡是能将信号加以变换以达到人们要求的各种设备都称为系统。当然，系统有大小之分，一个大系统中又可细分为若干个小系统。实际上，因为系统是完成某种运算（操作）的，因而还可把软件编程也看成一种系统的实现方法。

按所处理的信号种类的不同可将系统分为四类：

（1）模拟系统：处理模拟信号、系统输入、输出均为连续时间连续幅度的模拟信号。

（2）连续时间系统：处理连续时间信号，系统输入、输出均为连续时间信号。

(3) 离散时间系统：处理离散时间信号（序列），系统输入、输出均为离散时间信号。

(4) 数字系统：处理数字信号，系统输入、输出均为数字信号。

系统可以是线性的或非线性的，时（移）不变或时（移）变的。

1.1.3 信号处理

信号处理是研究用系统对含有信息的信号进行处理（变换），以获得人们所希望的信号，从而达到提取信息、便于利用的一门学科。信号处理的内容包括滤波、变换、检测、谱分析、估计、压缩、识别等一系列的加工处理。

因为多数科学和工程中遇到是模拟信号，所以以前都是研究模拟信号处理的理论和实现。但模拟信号处理难以做到高精度，受环境影响较大，可靠性差，且不灵活等。随着大规模集成电路以及数字计算机的飞速发展，加之20世纪60年代末以来数字信号处理理论和技术的成熟和完善，用数字方法来处理信号，即数字信号处理，已逐渐取代模拟信号处理。随着信息时代、数字世界的到来，数字信号处理已成为一门极其重要的学科和技术领域。

1.2 典型数字信号处理系统的基本组成

我们先来讨论模拟信号的数字化处理系统。此系统首先把模拟信号变换成数字信号，然后用数字技术进行处理，最后再还原成模拟信号。这一系统的方框图如图1-1所示。图1-2则表示了框图中的各有关信号的波形。输入模拟信号 $x_a(t)$ [见图1-1 (a)]，先经过前置预滤波器，将 $x_a(t)$ 中高于某一频率（称为折叠频率，等于抽样频率的一半）的分量滤除。然后在模数（A/D）变换器中每隔 T 秒（抽样周期）取出一次 $x_a(t)$ 的幅度，抽样后的信号称为离散时间信号，它只表示一些离散时间点 0，T，2T，…，nT，…上的信号值 $x_a(0)$，$x_a(T)$，$x_a(2T)$，…$x_a(nT)$，…，如图1-2 (b) 所示，抽样过程即是对模拟信号的时间离散化的过程；A/D变换器的保持电路将抽样信号变换成数字信号，因为一般采用有限位二进制码，所以它所表示的信号幅度是有一定限制的，例如4位码只能表示 $2^4=16$ 种不同的信号幅度，这些幅度称为量化电平（当离散时间信号幅度与量化电平不相同时，就要以最近的一个量化电平来近似它）；信号经A/D变换器后，不但时间离散化了，而且幅度也量化了，这种信号就被称为数字信号，它是数的序列，每个数用有限个二进制码来表示[如图1-2 (c) 所示]，我们用 $x(n)$ 来代表输入信号数字化后的序列，自变量 n 是整型变量，表示这个数在序列中的次序，为了形象起见，用一个垂直线段来表示 $x(n)$ 的数值大小，如图1-2 (d) 所示。随后，数字信号序列 $x(n)$ 通过数字信号处理系统的核心部分，即数字信号处理器，按照预定的要求进行加工处理，得到输出数字信号 $y(n)$ [如图1-2 (e) 所示]。再后，$y(n)$ 通过数模（D/A）变换器，将数字信号序列反过来变换成模拟信号，这些信号在时间点 0，T，$2T$，…，nT，…上的幅度应等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的数值大小。最后还要通过一个模拟滤波器，滤除不需要的高频分量，平滑成所需要的模拟输出信号 $y_a(t)$，如图1-2 (f) 所示。

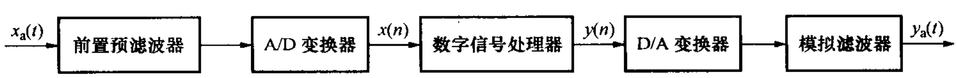

图1-1 模拟信号数字处理系统的方框图

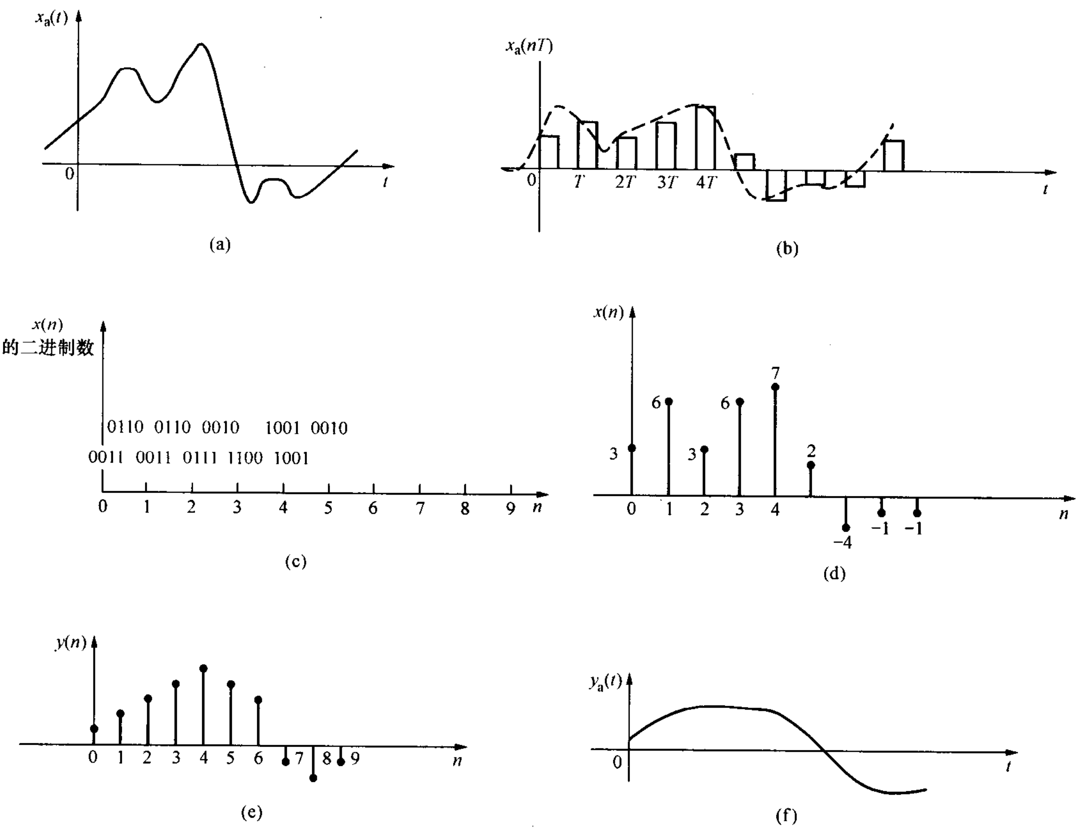

图 1-2　数字信号处理过程的波形图

(a) 输入模拟信号波形；(b) 抽样信号；(c) 数字码；(d) 量化后的输入信号序列；(e) 输出信号序列；(f) 输出模拟信号

图 1-1 所表示的是模拟信号数字处理系统的方框图，实际的系统并不一定要包括所有的框。例如，有些系统只需数字输出，可直接以数字形式显示或打印，就不需要 D/A 变换器；另一些系统的输入就是数字量，因而就不需要 A/D 变换器；纯数字系统则只需要数字信号处理器这一核心部分就行了。

图 1-1 中的数字信号处理器可以是数字计算机或微处理机，通过软件编程对输入信号进行预期的处理，这是一种软件实现方法。另一种方法是用基本的数字硬件组成专用处理机或用专用数字信号处理芯片作为数字信号处理器，优点是可以进行实时处理；但是由于是专用的，因而只能完成某一具体的加工处理，而不能完成其他类的加工处理，这是它的缺点。第三种数字信号处理器就是现在最为流行的通用数字信号处理芯片，它是专为信号处理设计的芯片，有专门执行信号处理算法的硬件，如乘法累加器、流水线工作方式、并行处理、多总线，位翻转（倒位序）硬件等，并有专为信号处理用的指令。采用数字信号处理芯片既有实时的优点，又有用软件实现的多用性优点，是一种重要的数字信号处理实现方法。实际上，由于近年来信息技术的快速发展，数字信号处理芯片已经应用到各个领域中了。

常用数字信号处理芯片有两种类型。

专用DSP芯片：作为横向滤波器用的有INMOS公司的A100，PLESSY GEC公司的PDSP16256等；作为快速傅里叶变换用的有PLESSY GEC公司的PDSP16510，Austek公司的A41102；还有作为复数累加以及求模、相角等用专用DSP芯片。

通用DSP芯片：有TI（Texas Instruments）公司的TM320C1X/C2X/C2XX/C54X/C62X系列定点制DSP芯片，TMS320C3X/C4X/C8X/C67X系列浮点制DSP芯片；AD（Advance Device）公司的ADSP21XX定点制DSP芯片，ADSP21020/2106X/21160浮点制DSP芯片；AT&T（现名Lucent）公司的DSP32C/3210、DSP96002浮点制DSP芯片；还有INMOS公司的Transputer 200/400/800/9000浮点制DSP芯片等。其中在我国使用最多的是TI公司和AD公司的产品。

1.3 关于数字信号处理的学习方法

数字信号处理的特点是理论复杂。翻开所有有关数字信号处理教科书，几乎满篇都是数学公式和数学符号，往往使初学者有望而生畏的感觉，下面就笔者的体会谈谈如何学好数字信号处理。

数字信号处理作为一门课程，学好它和学好其他课程有着共同的要求，此处不再赘述，下面重点讲一下几点特殊的要求：

(1) 特别是注意加深概念的理解，不要只停留在死记数学公式上。例如，卷积和相关有着类似的数学公式，但二者的物理概念完全不同。卷积反映了线性移不变系统输入和输出的关系，而相关只是反映两个信号之间的相似性，与系统无关。

要切实理解离散信号的频谱变为周期的原因。这可以从s平面到z平面的映射关系来理解，也可以从抽样定理的导出来理解；频域的周期化将涉及循环移位和循环卷积等一系列问题。

要切实理解在数字信号处理中必然存在的信号截断问题，该截断问题又和窗函数的应用、分辨率等问题密切相联。

诸如此类的概念性的问题还很多。总之，对它们不要只从数学公式上来理解，而要从来龙去脉和内在含意来理解。

(2) 通过应用来加深理解和记忆。笔者希望读者在学习数字信号处理的过程中，一定要重视利用MATLAB来完成实际的信号处理任务。例如，可以利用MATLAB的有关m文件生成各种类型的信号，实际完成一个信号的频谱分析，并了解其横坐标和纵坐标的含意；实际去分析一个系统，求出并画出它的幅频和相频特性；实际去设计一个系统，并用它实现一个含有噪声信号的滤波，等等。本书各章后的作业就是为实现这一目标来设计的。另外，对不理解的理论问题，建议可以看一下MATLAB中对应的源文件，看一下别人是如何编程实现的，这样往往会有豁然开朗的感觉。

(3) 打好基础，循序渐进。下述是数字信号处理中的基础内容：

1) 离散时间信号和离散时间系统的基本概念，时域描述；

2) 离散信号的频谱分析，即DFT；

3) 离散系统的频域分析，即转移函数；

4) 离散时间系统的相位特点及系统的结构；

5）数字滤波器（IIR 数字滤波器，FIR 数字滤波器）设计方法。

此外，还有随机信号的描述、信号的建模等。上述五个方面的内容在本书中都给予了详细的讨论。

总之，数字信号处理是一门涉及众多学科，又应用于众多领域的新兴学科，既有较为完整的理论体系，又以最快的速度形成自己的产业。因此，这一新兴学科有着极其美好的发展前景，并将为国民经济多个领域的发展做出重要贡献。

第2章　离散时间信号系统

2.1　离散时间信号（序列）

信号是传递信息的函数。例如，交通红绿灯是信号，它传递的信息是：红灯——停止，绿灯——通行。

按信号特点的不同，信号可表示成一个或几个独立变量的函数。例如，图像信号就是空间位置（二元变量）的亮度函数。一维变量可以是时间，也可以是其他参量，习惯上将其看成时间。信号的类型有以下三种。

（1）连续时间信号。它是在连续时间范围内定义的信号，但信号的幅值可以是连续数值，也可以是离散数值。当幅值为连续这一特定情况下又常称为模拟信号。实际上连续时间信号与模拟信号常常通用，用以说明同一信号。

（2）离散时间信号。它是时间为离散变量的信号，即独立变量时间被量化了，而幅度仍是连续变化的。

（3）数字信号。它是时间离散且幅度量化的信号。

下面来讨论离散时间信号。离散时间信号只在离散时间上给出函数值，是时间上不连续的序列。一般，离散时间的间隔是均匀的，以 T 表示，故用 $x(nT)$ 表示此离散时间信号在 nT 点的值，n 为整数。由于可将信号放在存储器中，供随时取用，加之可以"非实时"地处理，因而可以直接用 $x(n)$ 表示第 n 个离散时间点的序列值，并将序列表示成 $\{x(n)\}$。为了方便起见，就用 $x(n)$ 表示序列。注意，$x(n)$ 只在 n 为整数时才有意义，n 不是整数时没有定义。

离散时间信号（序列）可以用图形来描述，如图2-1所示。图中横轴虽为连续直线，但只在 n 为整数时才有意义；纵轴线段的长短代表各序列值的大小。

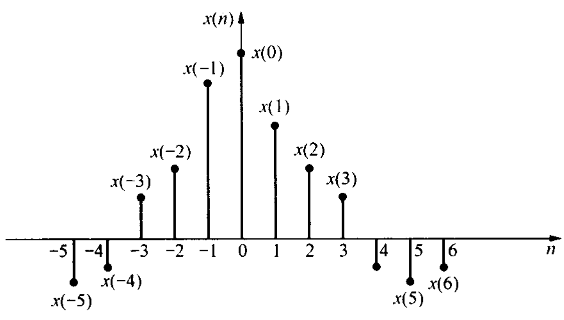

图2-1　离散时间信号的图形表示

2.1.1　序列的运算

序列的运算包括移位、翻褶、和、积、累加、差分、时间尺度变换、卷积和等。

1. 移位

设某一序列为 $x(n)$，当 m 为正时，则 $x(n-m)$ 是指序列 $x(n)$ 逐项依次延时（右移）m 位而给出的一个新序列，而 $x(n+m)$ 则指依次超前（左移）m 位；m 为负时，则相反。

设

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

则 $x(n)$ 右移1位所得序列为

$$x(n+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}, & n+1\geqslant -1\\ 0, & n+1<-1\end{cases}$$

或

$$x(n+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}, & n\leqslant -2\\ 0, & n<-2\end{cases}$$

$x(n)$ 及 $x(n+1)$ 分别如图 2 - 2(a)、(b) 所示。

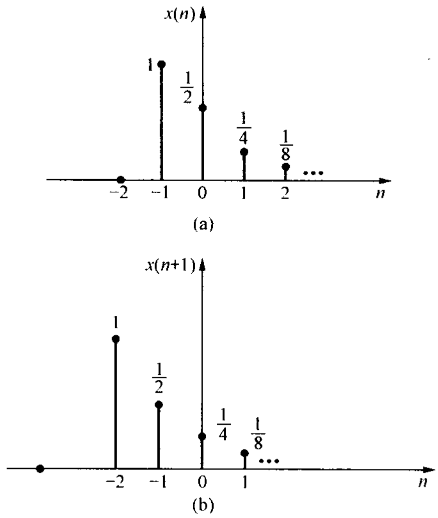

图 2 - 2　序列 $x(n)$ 及超前序列 $x(n+1)$

(a) 序列 $x(n)$；(b) 序列 $x(n+1)$

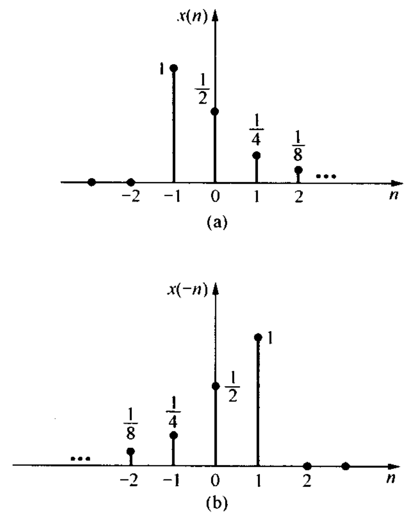

图 2 - 3　序列 $x(n)$ 及翻褶后的序列 $x(-n)$

(a) 序列 $x(n)$；(b) 序列 $x(-n)$

2. 翻褶

如果序列为 $x(n)$，则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻褶。

设

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

则，$x(n)$ 的翻褶序列为

$$x(-n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n}, & n\leqslant 1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

$x(n)$ 及 $x(-n)$ 分别如图 2 - 3(a)、(b) 所示。

3. 和

两序列的和是指，同序号 (n) 的序列值逐项对应相加而构成一个新的序列，表示为

$$z(n)=x(n)+y(n)$$

设

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

$$y(n)=\begin{cases}2^n, & n<0\\ n+1, & n\geqslant 0\end{cases}$$

则序列 $x(n)$、$y(n)$ 的和为

$$x(n)+y(n)=\begin{cases}2^n, & n<-1\\ \dfrac{3}{2}, & n=-1\\ \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+n+1, & n\geqslant 0\end{cases}$$

$x(n)$, $y(n)$ 及 $x(n)+y(n)$ 分别如图 2-4(a)、(b)、(c) 所示。

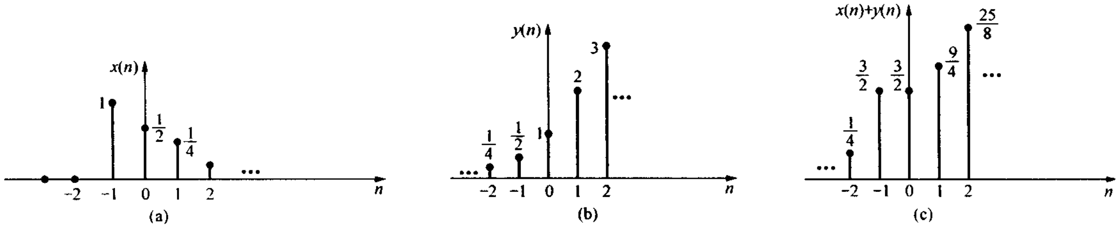

图 2-4 序列 $x(n)$、$y(n)$ 及两序列的和

(a) 序列 $x(n)$；(b) 序列 $y(n)$；(c) 序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的和

4. 积

两序列相乘是指，同序号 (n) 的序列值逐项应相乘，表示为

$$z(n)=x(n)y(n)$$

设序列 $x(n)$、$y(n)$ 与上例相同，则序列 $x(n)$、$y(n)$ 的积为

$$x(n)y(n)=\begin{cases}0, & n<-1\\ \dfrac{1}{2}, & n=-1\\ \dfrac{1}{2}(n+1)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant 0\end{cases}$$

5. 累加

设某序列为 $x(n)$，则 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

上式表示 $y(n)$ 在某一个 n_0 上的值等于这一个 n_0 上的 $x(n_0)$ 以及 n_0 以前的所有 n 值上的 $x(n)$ 值之和。

设
$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

则 $x(n)$ 的累加序列为

$$\begin{cases}y(n)=\displaystyle\sum_{k=-1}^{n}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ y(n)=0, & n<-1\end{cases}$$

因而

$$n=-1, y(-1)=1$$

$$n=0, y(0)=y(-1)+x(0)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$n=1, y(1)=y(0)+x(1)=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

$$n=2, y(2)=y(1)+x(2)=\frac{7}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$$

$$\cdots$$

其他 $y(n)$ 值可依此类推。$x(n)$、$y(n)$ 分别如图 2-5(a)、(b) 所示。

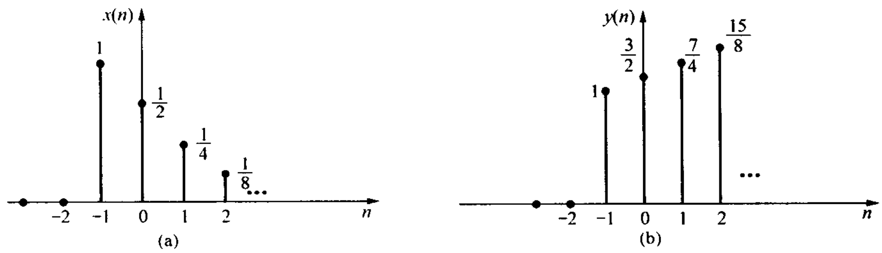

图 2-5　序列 $x(n)$ 及其累加序列 $y(n)$

(a) 序列 $x(n)$；(b) 序列 $y(n)$

6. 差分运算

前向差分　$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$

后向差分　$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$

由上面两式得出　$\nabla x(n)=\Delta x(n-1)$

设

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

则 $x(n)$ 前向差分序列为

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)=\begin{cases}0, & n<-2\\ 1, & n=-2\\ \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n>-2\end{cases}$$

$x(n)$ 后向差分序列为

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)=\begin{cases}0, & n<-1\\ 1, & n=-1\\ \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n>-1\end{cases}$$

$x(n)$、$\Delta x(n)$ 及 $\nabla x(n)$ 分别如图 2-6(a)、(b)、(c) 所示。

7. 时间尺度（比例）变换

对某序列 $x(n)$，其时间尺度序列为 $x(mn)$ 或 $x\left(\frac{n}{m}\right)$，其中 m 为正整数。

下面以 $m=2$ 的 $x(2n)$ 为例来说明。$x(2n)$ 不是 $x(n)$ 序列简单地在时间轴上按比例增一倍，而是以低一倍的抽样频率从 $x(n)$ 中每隔 2 点取 1 点，如果 $x(n)$ 是连续时间信号 $x(t)$ 的

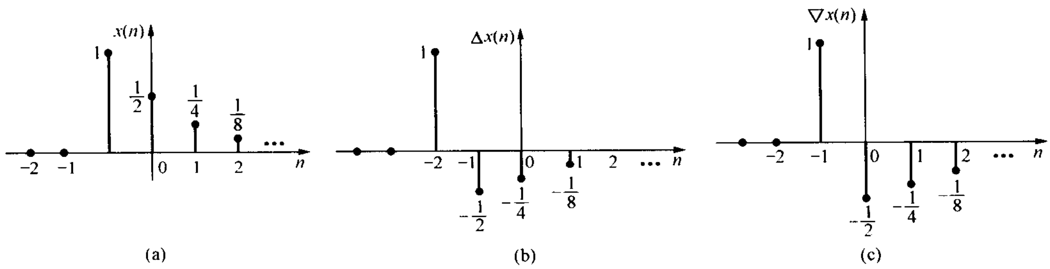

图 2-6　序列 $x(n)$ 及其前向差分序列 $\Delta x(n)$ 及后向差分序列 $\nabla x(n)$

(a) 序列 $x(n)$；(b) 序列 $\Delta x(n)$；(c) 序列 $\nabla x(n)$

抽样，则这相当于将 $x(n)$ 抽样间隔从 T 增加到 $2T$，这就是说，若

$$x(n)=x(t)\big|_{t=nT}$$

则

$$x(2n)=x(t)\big|_{t=n\times 2T}$$

我们把这种运算也称为抽取，即 $x(2n)$ 是 $x(n)$ 的抽取序列。$x(n)$ 及 $x(2n)$ 分别如图 2-7(a)、(b) 所示。

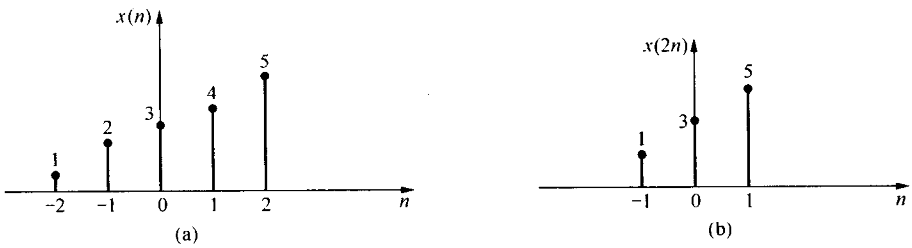

图 2-7　序列 $x(n)$ 及其抽取序列 $x(2n)$

(a) 序列 $x(n)$；(b) 序列 $x(2n)$

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$x\left(\frac{n}{2}\right)=x(t)\big|_{t=nT/2}$ 表示抽样间隔由 T 变成 $\frac{T}{2}$，将 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 称为 $x(n)$ 的插值序列。将在第 3 章中对其进行讨论。

8. 卷积和

卷积积分是求连续线性移不变系统输出响应(零状态响应) 的主要方法。同样，对离散系统“卷积和”也是求离散线性移不变系统输出响应(零状态响应) 的主要方法。这里一般性地讨论卷积和的定义及运算方法。

设两序列分别为 $x(n)$ 和 $h(n)$，则 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和定义为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n) \tag{2-1}$$

其中，卷积和用“$*$”来表示。

卷积和的运算在图形表示上可分为四步：翻褶、移位、相乘、相加，如图 2-8 所示。

(1) 翻褶：先在哑变量坐标 m 上作出 $x(m)$ 和 $h(m)$，将 $h(m)$ 以 $m=0$ 的垂直轴为对称轴翻褶成 $h(-m)$。

(2) 移位：将 $h(-m)$ 移位 n(整数) 即得 $h(n-m)$。当 n 为正整数时，右移 n 位。当 n 为负整数时，左移 n 位。

(3) 相乘:再将 $h(n-m)$ 和 $x(m)$ 的相同 m 值的对应点值相乘。

(4) 相加:把以上所有对应点的乘积叠加起来,即得 $y(n)$ 值。

依上法,取 $n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 各值,即可得全部 $y(n)$ 值。

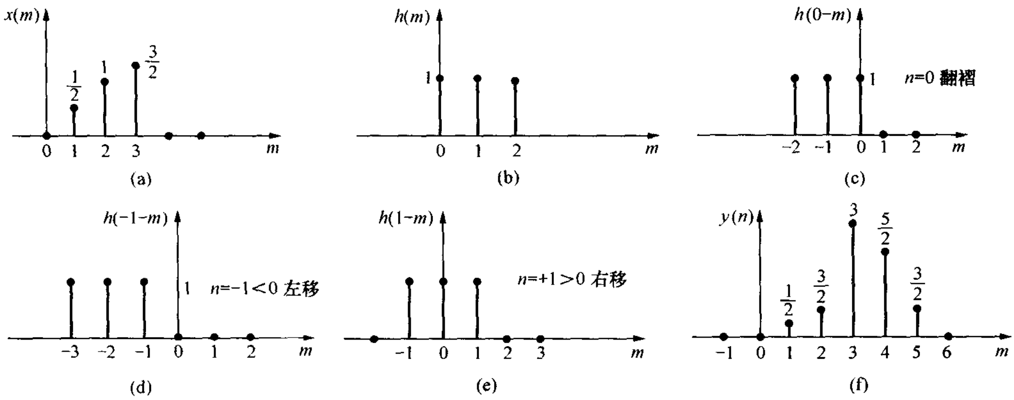

图 2-8 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和图解

求解卷积和时,一般要分成几个区间来分别加以考虑,可用下例说明。

设
$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}n, & 1\leqslant n\leqslant 3\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 2\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases}$$

则序列 $x(n)$、$h(n)$ 的卷积和为

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=1}^{3}x(m)h(n-m)$$

分区间考虑如下:

(1) 当 $n<1$ 时,$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 相乘,处处为零,故 $y(n)=0$。

(2) 当 $1\leqslant n\leqslant 2$ 时,$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 有交叠相乘的非零项是从 $m=1$ 到 $m=n$,故

$$y(n)=\sum_{m=1}^{3}x(m)h(n-m)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}n(1+n)$$

也就是

$$y(1)=\frac{1}{2},y(2)=\frac{3}{2}$$

(3) 当 $3\leqslant n\leqslant 5$ 时,$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 交叠而非零值的 m 范围的下限是变化的($n=3,4,5$ 分别对应 m 的下限为 $m=1,2,3$),而 m 的上限是 3。

$$y(3)=\sum_{m=1}^{3}x(m)h(3-m)=\sum_{m=1}^{3}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}\times(1+2+3)=3$$

$$y(4)=\sum_{m=2}^{3}x(m)h(4-m)=\sum_{m=2}^{3}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}\times(2+3)=\frac{5}{2}$$

$$y(5)=x(3)h(5-3)=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$$