教育部推荐教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学立体化教材

总主编 吴赣昌

微积分

（经管类）下册

第二版

主 编 于庆年 赵临龙 李关民

中国人民大学出版社

教育部推荐教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学立体化教材

总主编 吴赣昌

微积分

(经管类)下册

第二版

主 编 于庆年 赵临龙 李关民

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分（经管类）/吴赣昌总主编．2 版．
北京：中国人民大学出版社，2007.5
教育部推荐教材．
普通高等教育“十一五”国家级规划教材．大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-08095-6

Ⅰ．微…
Ⅱ．吴…
Ⅲ．微积分-高等学校-教材
Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 066428 号

教育部推荐教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
大学数学立体化教材
微积分（经管类）
第二版
总主编　吴赣昌

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	版　　次	2006 年 4 月第 1 版
			2007 年 7 月第 2 版
印　　张	31 插页 2	印　　次	2007 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	567 000	定　　价	49.80 元（上、下册，含光盘）

版权所有　侵权必究　　　印装差错　负责调换

总　　序

教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向，借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标．然而，与其他学科相比，大学数学教育信息化的研究进展比较缓慢．随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，因此，如何将当今快速发展的信息技术与教育技术相结合，建设一系列“新型教材”就显得非常紧迫．在我们的设想中，这种“新型教材”至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教学考多层次、全方位的建设．此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量，利于学生的课后学习和优秀学生的提高训练，全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用．

2000年初，在吴赣昌教授的组织与策划下，我们成立一个由教授、副教授、专任教师、专职动画设计人员和软件设计人员组成的研发团队，对上述研究目标进行了重点攻关，在迄今为止的七年多时间内，先后推出了一系列全新的“教学资源库式”的大学数学立体化教材，并配套建设了大学数学多媒体系列教学软件、大学数学试题库系统和大学数学立体化教材服务网站和课程建设网站．上述教学成果先后被全国200多所高等院校采用，一方面得到了国内同行的积极反馈和鼓励，另一方面也使上述研究工作的可持续发展得到了有力的支持．

此次经由中国人民大学出版社出版的大学数学立体化系列教材（第二版），共包含两大类六门课程，分别有**理工类**：高等数学，线性代数及概率论与数理统计三门课程；**经管类**：微积分，线性代数及概率论与数理统计三门课程．下面我们简单介绍一下该立体化教材的形式与内涵．

立体化教材的形式

1.《＊＊＊＊》（书）

2.《＊＊＊＊多媒体学习系统》（学生专用）（光盘）

其中，《＊＊＊＊》（书）的编写具有下列特点：

◆ 书中融入了数学历史与数学文化的教育．

◆ 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想．

◆ 以评注方式对定理、概念、公式的理解和应用做了进一步的总结．

◆ 依循序渐进的原则，以适当的难度梯度选编教学例题．

◆ 与教材同步配套，简明实用地编写了“大学数学实验指导”．

《＊＊＊＊多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源多元化

的学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、实验教学、综合训练等功能模块，以充分满足读者们在教材内容学习、课后辅导答疑、数学实践以及综合提高训练等方面的需要. 其主要特点有:

◆ 多媒体教案：按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点、难点.

◆ 习题详解：逐题剖析解题思路，并以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于学生课后学习.

◆ 数学试验：以交互、集成方式，设计了数学实验教学演示系统和实验案例库.

◆ 综合训练：总结每章教学知识点，通过精选的总习题和历届考研真题进一步揭示解题的一般规律和技巧，利于学生综合提高.

◆ 知识点交互：利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互链接，利于学生高效率的学习.

立体化教材的配套建设服务

1.《＊＊＊＊多媒体教学系统》(教师专用)(光盘)

2.《大学数学试题库系统》

3. 大学数学立体化教材服务网站 (www.math123.cn)

其中，《＊＊＊＊多媒体教学系统》(光盘)，除了包含《＊＊＊＊多媒体学习系统》的主要功能模块以外，还具有以下特点:

◆ 多媒体教案：教学过程设计更适合教师进行课堂教学，补充了类型丰富的教学例题供教师选用，增加了课堂练习环节.

◆ 现代教学优势与传统教学优势的融合：教学系统内设置了系统导航、文件缩放与手写笔等功能，使教师在课堂教学过程中既可很好地利用现代教学的优势，又可很好地保持传统教学的优势.

◆ 教学系统的扩展：教学系统内设置了丰富的扩展端口，教师在课堂教学过程中，可以多种方式(Word、Powerpoint、Flash 等)链接和补充教学建设内容.

◆ 教学备课系统：搜集并整理了大量的教学资源和备课元素，可供教师修改选用，充分展现各位教师的个性化授课特点.

◆ 数学实验案例库与数学实验演示系统结合，可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验教学.

《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 25 000 余道，具有以下特点:

◆ 试题类型丰富：含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等.

◆ 组卷功能强大：教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，通过人工

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

调整按钮，可以很方便地对该试卷中的试题进行增删与替换.

◆ 直接实现试卷的 Word 排版，并能在成卷后实现对试题的编辑修改.

◆ 大容量试卷库：试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全真试卷，供用户参考；用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

◆ 二次开发功能：使用单位可对系统进行包括试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

大学数学立体化教材服务网 (www.math123.cn) 是专门为采用我们立体化教材的师生提供配套教学服务的网站. 网站设计了教材简介、教学系统、题库系统、下载园地、教学论坛、数学实验、背景资源、考研资讯、征订信息等主要栏目，并有丰富的教学资源供广大师生下载. 网站力图建设成为国内大学数学教与学的通用平台，在教学论坛栏目中，搜集、整理和转载了当前国内有关大学教育、专业教学等方面共同关心的议题和新闻，广大师生可在其中发表自己的意见和建议.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令我们欣慰的是，与当初启动这个项目时相比，现在大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境 (从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设) 和软硬件技术 (从软件开发平台到计算机相关硬件技术) 都已经非常成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师教学个性化的问题也因鼠标笔、手写屏和平板电脑的问世而迎刃而解了.

七年以来，尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类) 出版以来，我们的工作得到了国内许多同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

编　　者

2007 年 6 月 20 日

目　　录

习题答案

第6章 多元函数微积分

在前面几章中，我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为一元函数．但在许多实际问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量（因变量）与另外多个变量（自变量）的相互依赖关系，由此引入了多元函数以及多元函数的微积分问题．本章将在一元函数微积分学的基础上，进一步讨论多元函数的微积分学．讨论中将以二元函数为主要对象，这不仅因为与二元函数有关的概念和方法大多有比较直观的解释，便于理解，而且这些概念和方法大多能自然推广到二元以上的多元函数．

§6.1 空间解析几何简介

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就．它通过点和坐标的对应关系，把数学研究的两个基本对象"数"和"形"统一起来，使得人们既可以用代数方法研究解决几何问题(这是解析几何的基本内容)，也可以用几何方法解决代数问题．

本节我们仅简单介绍空间解析几何的一些基本概念，它们包括空间直角坐标系、空间两点间的距离、空间曲面及其方程等概念．这些内容对我们学习多元函数的微分学和积分学将起到重要的作用．

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组（即点的坐标(x,y)）对应起来．同样，为了把空间的任一点与有序数组对应起来，我们建立了**空间直角坐标系**．

过空间一定点O，作三条相互垂直的数轴，依次记为$\boldsymbol{x}$**轴**（**横轴**）、$\boldsymbol{y}$**轴**（**纵轴**）、$\boldsymbol{z}$**轴**（**竖轴**），统称为**坐标轴**．它们构成一个空间直角坐标系$Oxyz$（见图6-1-1）．

空间直角坐标系有右手系和左手系两种．我们通常采用右手系(见图6-1-2)，其坐标轴的正向按如下方式规定：以右手握住z轴，当右手的4个手指从x轴正向以$\pi/2$角度转向y轴正向时，大拇指的指向就是z轴的正向．

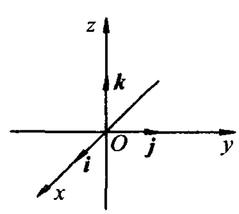

图 6-1-1

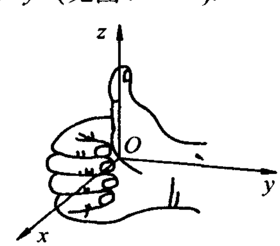

图 6-1-2

3条坐标轴中每两条坐标轴所在的平面 xOy，yOz，zOx 称为**坐标面**. 3个坐标面把空间分成8个部分，每个部分称为一个**卦限**，共8个卦限. 其中 $x>0, y>0, z>0$ 部分为第Ⅰ卦限，第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向来确定. 第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 面的下方，由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限，按逆时针方向来确定(见图6-1-3).

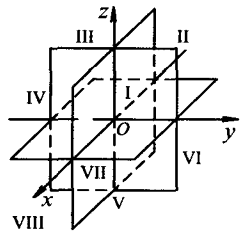

图 6-1-3

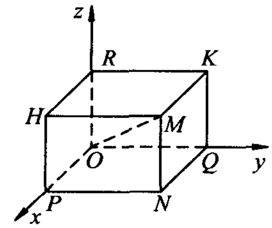

图 6-1-4

定义了空间直角坐标系后，就可以用一组有序实数组来确定空间点的位置. 设 M 为空间中任意一点(见图6-1-4)，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 P、Q、R 三点，这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x, y, z. 这样空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反之，若给定一有序数组 x, y, z，就可以分别在 x 轴、y 轴、z 轴找到坐标分别为 x，y，z 的三点 P、Q、R，过这三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面的交点就是由有序数组 x, y, z 所确定的唯一的点 M. 这样就建立了空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系. 这组数 x，y，z 称为**点 M 的坐标**，并依次称 x，y 和 z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**，坐标为 x, y, z 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，在 x 轴的点，其纵坐标 $y=0$，竖坐标 $z=0$，于是坐标为 $(x, 0, 0)$. 同理，y 轴上的点的坐标为 $(0, y, 0)$；z 轴上的点的坐标为 $(0, 0, z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$；yOz 面上的点的坐标为 $(0, y, z)$；zOx 面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

设点 $M(x, y, z)$ 为空间一点，则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $A(x, y, -z)$；关于 x 轴的对称点为 $B(x, -y, -z)$；关于原点对称的点为 $C(-x, -y, -z)$.

二、空间两点间的距离

我们知道，在平面直角坐标系中，任意两点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

现在我们来给出空间直角坐标系中任意两点间的距离公式.

设空间直角坐标系中有两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，过这两点各作三个分别垂直于坐标轴的平面，这6个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图6-1-5).

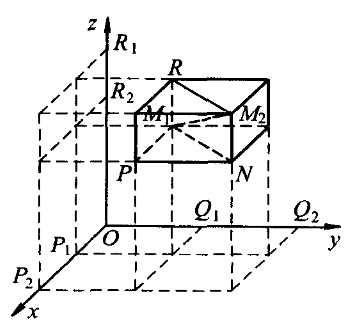

图 6-1-5

由于 $\triangle M_1NM_2$、$\triangle M_1PN$ 为直角三角形，所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

因为 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,\quad |PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$

$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$

所以，便得到空间两点间的距离公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.2}$$

例 1 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解 因为 P 在 x 轴上，故可设 P 点坐标为 $(x,0,0)$，由于

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},\quad |PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2},$$

$$|PP_1|=2|PP_2|,$$

即

$$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2},$$

从而解得 $x=\pm1$，所求点为 $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$.

三、曲面及其方程

1. 曲面方程的概念

在日常生活中，我们常常会看到各种曲面，例如，反光镜面、一些建筑物的表面、球面等. 类似在平面解析几何中把平面曲线看做是动点的轨迹一样，在空间解析几何中，曲面也可看做是具有某种性质的动点的轨迹.

定义 1 在空间直角坐标系中，如果曲面 S 上任一点坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的任何点的坐标都不满足该方程，则方程 $F(x,y,z)=0$ 称为**曲面 S 的方程**，而曲面 S 就称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形（见图 6－1－6).

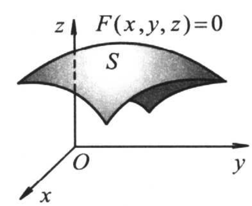

图 6－1－6

建立了空间曲面与其方程的联系后，我们就可以通过研究方程的解析性质来研究曲面的几何性质.

空间曲面研究的两个基本问题是：

(1) 已知曲面上的点所满足的几何条件，建立曲面的方程；

(2) 已知曲面方程，研究曲面的几何形状.

例 2 建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 是球面上任一点（见图 6－1－7). 根据题意有

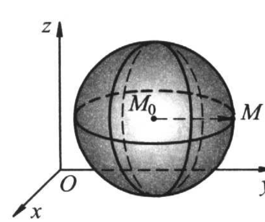

图 6－1－7

$$|MM_0|=R,$$

由于

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

所以
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$
特别地，球心在原点时，球面方程为
$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 3 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

解 对原方程配方，得
$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5,$$
所以，原方程表示球心在点 $M_0(1,-2,0)$，半径为 $R=\sqrt{5}$ 的球面方程.

下面我们再介绍一些常见的曲面及其方程，它们包括平面、柱面和二次曲面等.

2. 平面

平面是空间中最简单而且最重要的曲面. 可以证明空间中任一平面都可以用三元一次方程
$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1.3}$$
来表示，反之亦然. 其中 A、B、C、D 是不全为零的常数. 方程 (1.3) 称为**平面的一般方程**.

具有特殊位置的平面方程:

(1) 平面通过坐标原点: $Ax+By+Cz=0$.

(2) 平面平行于 z 轴: $Ax+By+D=0$;

平面平行于 y 轴: $Ax+Cz+D=0$;

平面平行于 x 轴: $By+Cz+D=0$.

(3) 平面平行于 xOy 面: $Cz+D=0$, 特别地, xOy 面: $z=0$;

平面平行于 yOz 面: $Cx+D=0$, 特别地, xOy 面: $x=0$;

平面平行于 zOx 面: $Cy+D=0$, 特别地, xOy 面: $y=0$.

例如, $x+y+z=1$, $y=3$, $x+y=0$ 等均表示空间中的平面(见图6-1-8(a)、(b)、(c)).

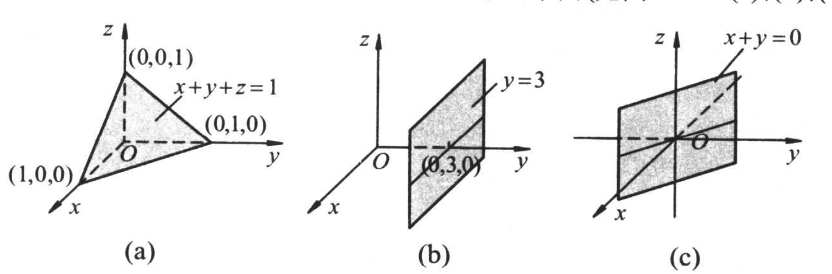

图 6-1-8

注: 在平面解析几何中, 一次方程表示一条直线; 在空间解析几何中, 一次方程表示一个平面. 例如, $x+y=0$ 在平面解析几何中表示一条直线, 而在空间解析几何中则表示一个平面 (见图 6-1-8(c)).

例 4 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程.

解 依题意, 这个平面通过 x 轴, 即平面平行于 x 轴且通过坐标原点, 从而可设

该平面方程为

$$By + Cz = 0,$$

又因平面过点 $(4, -3, -1)$，因此有

$$-3B - C = 0, \text{ 即 } C = -3B.$$

以此代入所设方程，再除以 $B\,(B \neq 0)$，便得到所求方程为

$$y - 3z = 0.$$

下面我们再引入一种平面方程：

设一平面的一般方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

若此平面与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$, $R(0, 0, c)$ 三点（见图 6-1-9），其中 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$，则这三点均满足平面方程，即有

$$aA + D = 0, \quad bB + D = 0, \quad cC + D = 0,$$

解得 $$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

代入所设平面方程中，得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

这个方程称为**平面的截距式方程**，其中 a, b, c 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的**截距**.

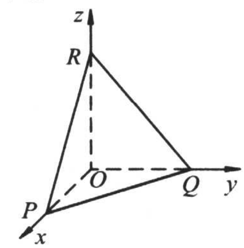

图 6-1-9

3. 柱面

定义 2 平行于某定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的轨迹称为**柱面**. 这条定曲线 C 称为柱面的**准线**，直线 L 称为柱面的**母线**.

例 5 方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 在空间中表示怎样的曲面？

解 在 xOy 面上，它表示圆心在原点 O，半径为 R 的圆；在空间直角坐标系中，注意到方程不含竖坐标 z，因此对空间一点 (x, y, z)，不论其竖坐标 z 是什么，只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足方程，这一点就落在曲面上，即凡是通过 xOy 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x, y, 0)$，且平行于 z 轴的直线 L 都在此曲面上. 因此，此曲面可以看做是平行于 z 轴的直线 L（母线）沿着 xOy 面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$（准线）移动而形成的，称此曲面为**圆柱面**（见图 6-1-10).

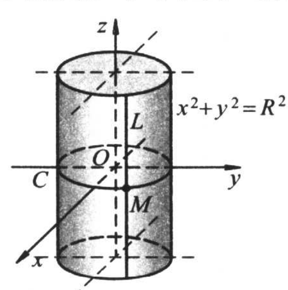

图 6-1-10

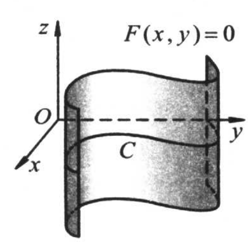

图 6-1-11

一般地，在空间解析几何中，不含 z 而仅含 x, y 的方程 $F(x, y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的一个柱面，xOy 面上的曲线 $F(x, y) = 0$ 是这个柱面的一条准线（见图 6-1-11).

例如，方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴、准线为 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$ 的柱面，这个柱面称为**抛物柱面**（见图6–1–12）.

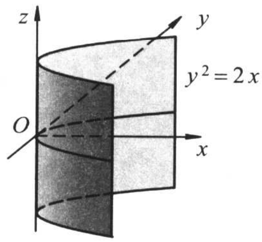

图 6–1–12

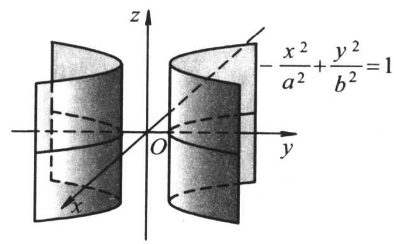

图 6–1–13

方程 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴、准线为 xOy 面上的双曲线 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的柱面，这个柱面称为**双曲柱面**（见图6–1–13）.

4. 二次曲面

关于二次曲面，我们不做深入的讨论，仅介绍几种常见的二次曲面及其方程.

(1) **椭球面**.

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0) \tag{1.4}$$

所确定的曲面称为**椭球面**(见图6–1–14).

特别地，当 $a=b=c$ 时，方程 (1.4) 变成

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

此即为我们熟知的以原点为圆心、a 为半径的球面方程.

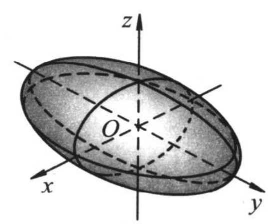

图 6–1–14

(2) **椭圆抛物面**.

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} \quad (p\text{与}q\text{同号}).$$

以 $p>0$, $q>0$ 的情形为例，椭圆抛物面的典型图形如图6–1–15所示.

(3) **双曲抛物面**（**马鞍面**）.

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p\text{与}q\text{同号}).$$

以 $p>0$, $q>0$ 的情形为例，双曲抛物面的典型图形如图6–1–16所示.

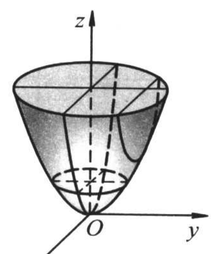

图 6–1–15

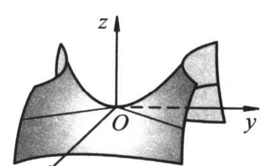

图 6–1–16

(4) **单叶双曲面**.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0) \text{（见图6–1–17）}.$$

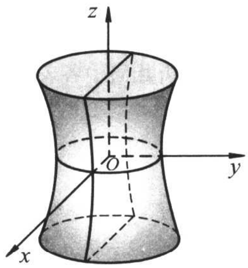

图 6-1-17

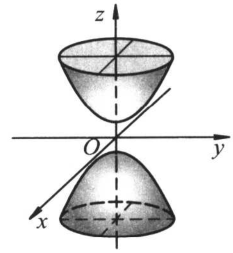

图 6-1-18

(5) **双叶双曲面**.

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1\ (a>0,\ b>0,\ c>0)$ (见图6-1-18).

(6) **二次锥面**.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0\ (a>0,\ b>0,\ c>0)$ (见图6-1-19).

二次锥面的一种常见形式是

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

若用平面 $z=h$ 去截它，所得截痕均为圆，此方程表达的曲面称为**圆锥面**.

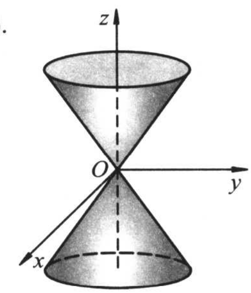

图 6-1-19

习题 6-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？
   $A(1,-2,3)$; $B(2,3,-4)$; $C(2,-3,-4)$; $D(-2,-3,1)$.
2. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？并指出下列各点的位置：
   $A(3,\ 4,\ 0)$; $B(0,\ 4,\ 3)$; $C(3,\ 0,\ 0)$; $D(0,\ -1,\ 0)$.
3. 求点 (a,b,c) 关于 (1) 各坐标面，(2) 各坐标轴，(3) 坐标原点的对称点的坐标.
4. 自点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，求出各垂足的坐标.
5. 求点 $M(4,\ -3,\ 5)$ 到各坐标轴的距离.
6. 一动点与两定点 $(2,3,1)$ 和 $(4,\ 5,\ 6)$ 等距离，求该动点的轨迹方程.
7. 求以点 $O(1,\ 3,\ -2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程.
8. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形？

(1) $x=2$; (2) $y=x+1$; (3) $x^2+y^2=4$; (4) $x^2-y^2=1$.

9. 指出下列各方程表示哪种曲面：

(1) $x^2+y^2+z^2=1$; (2) $x^2+y^2-2z=0$; (3) $x^2-y^2=0$;

(4) $x^2+y^2=0$; (5) $xyz=0$; (6) $y-\sqrt{3}z=0$;

(7) $y^2-4y+3=0$; (8) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$; (9) $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$;

(10) $x^2=4y$; (11) $z^2-x^2-y^2=0$.

10. 方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ y=3\end{cases}$ 在平面解析几何与空间解析几何中各表示什么?

11. 求曲面 $x^2+9y^2=10z$ 与 yOz 平面的交线.

12. 指出下列各方程组表示什么曲线:

(1) $\begin{cases}x+2=0\\ y-3=0\end{cases}$; (2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=20\\ z-2=0\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}x^2-4y^2+9z^2=36\\ y=1\end{cases}$; (4) $\begin{cases}x^2-4y^2=4z\\ y=-2\end{cases}$.

13. 指出下列各平面的特殊位置:

(1) $x=0$; (2) $3y-1=0$; (3) $2x-3y-6=0$; (4) $x-\sqrt{3}y=0$;

(5) $y+z=1$; (6) $x-2z=0$; (7) $6x+5y-z=0$.

14. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 xOy 面且经过点 $(2,-5,3)$; (2) 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$ 的平面方程;

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$.

15. 确定 k 的值,使平面 $x+ky-2z=9$ 适合下列条件之一:

(1) 经过点 $(5,-4,-6)$; (2) 在 y 轴上的截距为 -3.

§6.2 多元函数的基本概念

一、平面区域的概念

与数轴上邻域的概念类似,我们引入平面上点的邻域的概念.

设 $P(x_0,y_0)$ 为直角坐标平面上一点,δ 为一正数,称点集

$$\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

为点 P 的 **δ 邻域**,记为 $U_\delta(P)$,或简称为邻域,记为 $U(P)$.

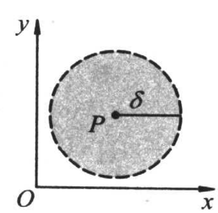

图 6-2-1

根据这一定义,点 P 的 δ 邻域实际上是以点 P 为圆心、δ 为半径的圆的内部(见图6-2-1).

设 E 是平面上的一个点集,P 是平面上的一个点,则点 P 与点集 E 之间必存在以下三种关系之一.

(1) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\subset E$,则称 P 为 E 的**内点**(见图6-2-2中的点 P_1).

(2) 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称点 P 为 E 的**外点**(见图6-2-2中的点 P_2).

(3) 如果点 P 的任意一个邻域内既有属于 E 的点也有不属于 E 的点,则称点 P 为 E 的**边界点**(见图6-2-2中的点 P_3).

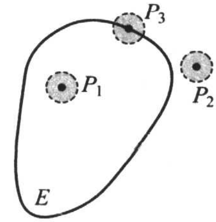

图 6-2-2

点集 E 的边界点的全体称为 E 的**边界**.

根据上述定义可知，点集 E 的内点必属于 E，而 E 的边界点则可能属于 E 也可能不属于 E.

如果点集 E 内任意一点均为 E 的内点，则称 E 为**开集**.

例如，点集 $E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是一个开集，圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 均为 E 的边界.

设 E 为一点集，如果点集 E 内的任何两点都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 E，则称点集 E 是**连通的**.

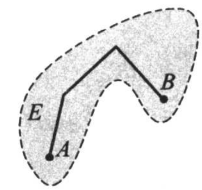

图 6-2-3

连通的开集称为**区域**或**开区域**（见图 6-2-3）. 开区域连同它的边界一起称为**闭区域**.

例如，$E_1=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ 为一闭区域（见图 6-2-4），而 $E_2=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 为一开区域（见图 6-2-5）.

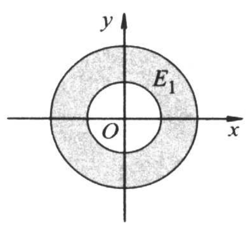

图 6-2-4

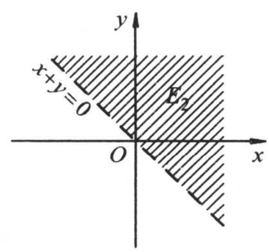

图 6-2-5

对于点集 E，如果存在某一正数 K，使得 $E\subset U_K(O)$，则称 E 为**有界集**（见图 6-2-4 的区域 E_1），其中 O 为坐标原点. 否则称为**无界点集**（见图 6-2-5 的区域 E_2）.

二、二元函数的概念

定义 1　设 D 是平面上的一个非空点集，如果对于 D 内的任一点 (x,y)，按照某种法则 f，都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是 D 上的**二元函数**，它在 (x,y) 处的函数值记为 $f(x,y)$，即

$$z=f(x,y),$$

其中 x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 点集 D 称为该函数的**定义域**，数集 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的**值域**.

类似地，可定义三元及三元以上的函数. 当 $n\ge 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**.

例 1　求二元函数

$$f(x,y)=\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$$

的定义域.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com