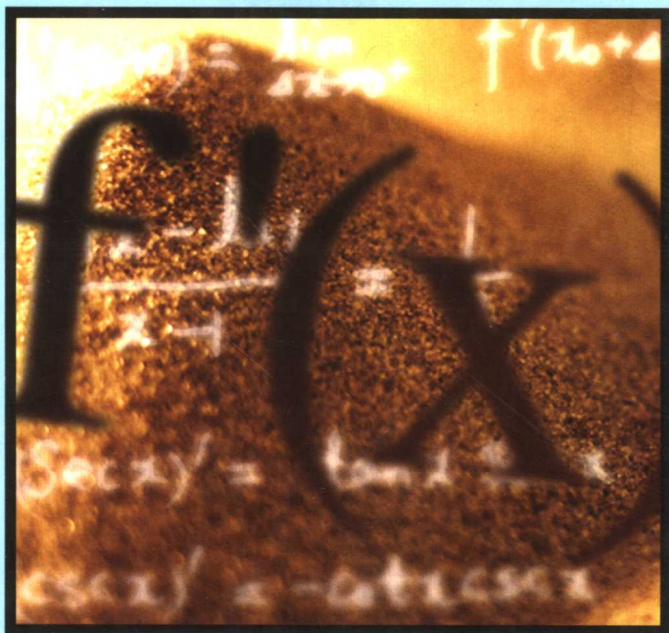


南开大学公共数学系列教材

高等数学

习题课讲义 (下)

赵志勇 薛运华 / 编著



南开大学出版社

南开大学公共数学系列教材

高等数学习题课讲义

(下)

赵志勇 薛运华 编著



南开大学出版社
天津

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课讲义. 下 / 赵志勇, 薛运华编著. 一天
津: 南开大学出版社, 2007. 4

(南开大学公共数学系列教材)

ISBN 978-7-310-02670-8

I. 高... II. ①赵... ②薛... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 031345 号

版权所有 侵权必究

南开大学出版社出版发行

出版人: 肖占鹏

地址: 天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码: 300071

营销部电话: (022)23508339 23500755

营销部传真: (022)23508542 邮购部电话: (022)23502200

*

河北省迁安万隆印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷

787×960 毫米 16 开本 18.25 印张 2 插页 345 千字

定价: 30.00 元

如遇图书印装质量问题, 请与本社营销部联系调换, 电话: (022)23507125

总序

高等数学是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课。由于各个学科门类的情况差异较大,该课程又形成了包含多个层次多个类别的体系结构。层次不同,类别不同,教学目标和教学要求也就有所不同,课程内容的深度与宽度也就有所不同,自然所使用的教材也应有所不同。

教材建设是课程建设的一个重要方面,属于基础性建设。时代在前进,教材也应适时更新而不能一劳永逸。因此,教材建设是一项持续的不可能有“句号”的工作。

20世纪80年代以来,南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材。其中,如《文科数学基础》一书作为“十五”国家级规划教材由高等教育出版社于2003年出版,经过几年的使用取得较好收效。这些教材为南开的数学教学作出了重要贡献,也为公共数学教材建设奠定了基础,积累了经验。

21世纪是一个崭新的世纪。随着新世纪的到来,人们似乎对数学也有了一个崭新的认识:数学不仅是工具,更是一种素养,一种能力,一种文化。已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑。他尤其对大学生们寄予厚望。他不仅关心着数学专业的学生,也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子。2004年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题字,并与获奖学生合影留念。这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策。另一方面,近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现。这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求。而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进。现在呈现在读者面前的便是南开大学公共数学系列教材。

本套教材的规划和出版得到了南开大学教务处、南开大学数学科学学院和南开大学出版社的高度重视、悉心指导和大力支持。此项工作是南开大学新世纪教学改革项目“公共数学课程建设改革与实践”的重要内容之一。编委会的各位老师为组织、规划和编写本套教材付出了不少心血。此外,还有很多热心的老师和同学给我们提出了很多很好的建议。对来自方

方面面的关心、支持和帮助，我们在这里一并表示衷心感谢。

由于我们的水平有限，缺点和不足在所难免，诚望读者批评指正。

南开大学公共数学系列教材编委会

2006年6月

前言

鉴于大学非数学类专业对数学素质要求愈来愈高,《高等数学》课程的教学越来越受到高校的重视,习题课作为《高等数学》的重要辅助课程,在帮助学生深入理解课程内容、熟练掌握并灵活运用所学数学方法方面起着非常大的作用。多年的实践教学证明,习题课是整个教学活动中一个不可缺少的重要环节。南开大学数学科学学院高等数学教学部历来重视习题课的建设,并且得到全校各主管部门的领导和相关学院的学生的的大力支持和帮助。他们坚持规范和创新并重,从而使习题课教学的水平逐年提高,教学效果也日益显著。作者把习题课教学中的一些经验和想法整理编辑成册,诚望同行批评指正。

本书下册包括空间解析几何和矢量代数、多元函数微积分、级数、广义积分和微分方程等《高等数学》课程第二、三学期的教学内容,全书的结构采取专题“课”的形式,适合于每周两个课时的习题课教学安排。

在每个专题“课”中,“本课重点内容提示”部分归纳基础理论,深入剖析重点和难点,从课本内容升华出数学思想,力图使读者对相关知识有更加深入透彻的理解和把握。“精讲例题和分析”部分选择了一定数量且题型比较广泛的典型例题。讲解中注重体现严谨的数学逻辑思维,详尽地阐释了解题的方法和技巧,并将各类相似题型加以联系比较,旨在帮助读者通过习题训练,在掌握常用的数学方法和技巧的过程中对基础知识融会贯通、灵活运用。部分题目给出一题多解,目的是为开阔思路,借此提高读者的解题能力。“课外练习”部分选取了不同难度的练习题,由易到难,由浅入深,由单一到综合,适合于不同基础的同学使用,体现了分类教学的理念。七个“综合训练”选取了一些常考题型题目,适合读者对知识掌握程度进行自我评价。

本书所选例题和习题,大部分来源于南开大学《高等数学》课程的课堂和习题课教学题目,还有少量来源于近年全国硕士研究生入学考试统考试题和天津市大学生数学竞赛的真题。

本书可作为非数学类专业的高等数学学习题课教材和课外辅导的教学参

考用书，可作为学生课下同步练习或期末考试复习用书，也可作为考研复习或者自学的学习资料。

本书分上下两册，上册由薛运华完成，本册由赵志勇完成。张效成教授、薛峰老师在本书的策划方面给了很多中肯的意见，并且张效成教授仔细审阅了初稿。本书稿付印前在南开大学物理学院试用了一学期，薛运华、王立云等老师通过教学实践，为本书的进一步修订提出了宝贵意见，在此表示感谢。

本书得到了南开大学人事处提供的科研启动经费支持，特此致谢。

由于编者的水平有限，书中难免会有疏漏之处，请读者批评指正。

编 者
于南开园

目 录

第一课 空间直角坐标和矢量的基本运算.....	1
1.1 本课重点内容提示.....	1
1.2 精讲例题与分析.....	2
1.2.1 基本习题讲解.....	2
1.2.2 拓展习题讲解.....	3
1.3 课外练习.....	4
第二课 矢量的数量积、矢量积和混合积.....	5
2.1 本课重点内容提示.....	5
2.2 精讲例题与分析.....	6
2.2.1 基本习题讲解.....	6
2.2.2 拓展习题讲解.....	8
2.3 课外练习.....	9
第三课 空间中的平面和直线.....	10
3.1 本课重点内容提示.....	10
3.2 精讲例题与分析.....	12
3.2.1 基本习题讲解.....	12
3.2.2 拓展习题讲解.....	15
3.3 课外练习.....	17
第四课 二次曲面.....	18
4.1 本课重点内容提示.....	18
4.2 精讲例题与分析.....	19
4.2.1 基本习题讲解.....	19
4.2.2 拓展习题讲解.....	20
4.3 课外练习.....	22

综合训练一 空间解析几何与矢量代数部分	23
第五课 多元函数的极限、连续、偏导数和全微分	25
5.1 本课重点内容提示	25
5.2 精讲例题与分析	27
5.2.1 基本习题讲解	27
5.2.2 拓展习题讲解	29
5.3 课外练习	31
第六课 复合函数和隐函数的偏导数	33
6.1 本课重点内容提示	33
6.2 精讲例题与分析	34
6.2.1 基本习题讲解	34
6.2.2 拓展习题讲解	36
6.3 课外练习	38
第七课 偏导数的几何应用与方向导数	39
7.1 本课重点内容提示	39
7.2 精讲例题与分析	40
7.2.1 基本习题讲解	40
7.2.2 拓展习题讲解	42
7.3 课外练习	44
第八课 二元函数的泰勒展式和极值	45
8.1 本课重点内容提示	45
8.2 精讲例题与分析	46
8.2.1 基本习题讲解	46
8.2.2 拓展习题讲解	48
8.3 课外练习	51
综合训练二 多元函数微分学部分	53
第九课 二重积分	56
9.1 本课重点内容提示	56
9.2 精讲例题与分析	58
9.2.1 基本习题讲解	58
9.2.2 拓展习题讲解	62

9.3 课外练习	66
第十课 三重积分	68
10.1 本课重点内容提示	68
10.2 精讲例题与分析	70
10.2.1 基本习题讲解	70
10.2.2 拓展习题讲解	73
10.3 课外练习	76
第十一课 重积分的应用	78
11.1 本课重点内容提示	78
11.2 精讲例题与分析	79
11.2.1 基本习题讲解	79
11.2.2 拓展习题讲解	81
11.3 课外练习	83
综合训练三 重积分部分	85
第十二课 第一型、第二型曲线积分	88
12.1 本课重点内容提示	88
12.2 精讲例题与分析	90
12.2.1 基本习题讲解	90
12.2.2 拓展习题讲解	93
12.3 课外练习	96
第十三课 格林公式、平面曲线积分与路径无关的条件	98
13.1 本课重点内容提示	98
13.2 精讲例题与分析	99
13.2.1 基本习题讲解	99
13.2.2 拓展习题讲解	101
13.3 课外练习	106
第十四课 第一型、第二型曲面积分	108
14.1 本课重点内容提示	108
14.2 精讲例题与分析	110
14.2.1 基本习题讲解	110
14.2.2 拓展习题讲解	112

14.3	课外练习	114
第十五课	高斯公式、斯托克斯公式、空间曲线积分与路径无关的条件 ...	116
15.1	本课重点内容提示	116
15.2	精讲例题与分析	117
15.2.1	基本习题讲解	117
15.2.2	拓展习题讲解	118
15.3	课外练习	121
第十六课	矢量分析和场论初步	123
16.1	本课重点内容提示	123
16.2	精讲例题与分析	124
16.2.1	基本习题讲解	124
16.2.2	拓展习题讲解	125
16.3	课外练习	126
综合训练四	曲线曲面积分部分	127
第十七课	数项级数	130
17.1	本课重点内容提示	130
17.2	精讲例题与分析	133
17.2.1	基本习题讲解	133
17.2.2	拓展习题讲解	136
17.3	课外练习	139
第十八课	幂级数的基本性质	141
18.1	本课重点内容提示	141
18.2	精讲例题与分析	143
18.2.1	基本习题讲解	143
18.2.2	拓展习题讲解	148
18.3	课外练习	149
第十九课	幂级数的展开式和应用	151
19.1	本课重点内容提示	151
19.2	精讲例题与分析	152
19.2.1	基本习题讲解	152
19.2.2	拓展习题讲解	154

19.3 课外练习	156
第二十课 傅里叶级数	157
20.1 本课重点内容提示	157
20.2 精讲例题与分析	159
20.2.1 基本习题讲解	159
20.2.2 拓展习题讲解	161
20.3 课外练习	163
综合训练五 级数部分	164
第二十一课 广义积分	167
21.1 本课重点内容提示	167
21.2 精讲例题与分析	169
21.2.1 基本习题讲解	169
21.2.2 拓展习题讲解	172
21.3 课外练习	174
第二十二课 含参变量的积分	176
22.1 本课重点内容提示	176
22.2 精讲例题与分析	178
22.2.1 基本习题讲解	178
22.2.2 拓展习题讲解	180
22.3 课外练习	182
第二十三课 一阶微分方程	183
23.1 本课重点内容提示	183
23.2 精讲例题与分析	185
23.2.1 基本习题讲解	185
23.2.2 拓展习题讲解	187
23.3 课外练习	189
第二十四课 高阶微分方程	190
24.1 本课重点内容提示	190
24.2 精讲例题与分析	191
24.2.1 基本习题讲解	191
24.2.2 拓展习题讲解	194

24.3 课外练习	195
综合训练六 广义积分和常微分方程部分	197
综合训练七 期末练习	199
附录A 常用积分公式	203
A.1 基本积分公式	203
A.2 其他常用不定积分公式	204
A.3 常用定积分和广义积分公式	204
附录B 空间解析几何和矢量代数公式	205
附录C 微积分应用公式	206
附录D 二元函数全微分公式	209
附录E 基本泰勒级数	210
附录F 常用傅里叶展开式	211
附录G 课外练习答案与提示	212
G.1 第一课答案	212
G.2 第二课答案	212
G.3 第三课答案	213
G.4 第四课答案	215
G.5 综合训练一答案	215
G.6 第五课答案	218
G.7 第六课答案	219
G.8 第七课答案	220
G.9 第八课答案	222
G.10 综合训练二答案	223
G.11 第九课答案	226
G.12 第十课答案	228
G.13 第十一课答案	230
G.14 综合训练三答案	233
G.15 第十二课答案	236
G.16 第十三课答案	238
G.17 第十四课答案	241

G.18	第十五课答案	242
G.19	第十六课答案	245
G.20	综合训练四答案	246
G.21	第十七课答案	251
G.22	第十八课答案	252
G.23	第十九课答案	255
G.24	第二十课答案	256
G.25	综合训练五答案	257
G.26	第二十一课答案	261
G.27	第二十二课答案	262
G.28	第二十三课答案	263
G.29	第二十四课答案	265
G.30	综合训练六答案	268
G.31	综合训练七答案	269
参考文献		277

第一课 空间直角坐标和矢量的基本运算

1.1 本课重点内容提示

1. 空间直角坐标

为确定空间中的一点的位置，需要确立空间的点与有序实数组之间的对应关系。坐标原点 O ，三条坐标轴： x 轴（横轴）， y 轴（纵轴）， z 轴（竖轴），正向按右手系。三个坐标面： xOy 面， yOz 面， zOx 面。三个坐标面把空间分成八个卦限。

若空间点 M 与有序实数组 x 、 y 、 z 之间有一一对应关系，则称 x 、 y 、 z 为点 M 的直角坐标，记作 $M(x, y, z)$ 。

空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2. 矢量代数的基本概念

矢量（向量）：既有大小又有方向的量。常用 $\vec{a}$ 表示。

矢量的模：矢量的长度。矢量 $\vec{a}$ 的模用 $|\vec{a}|$ 表示。长度为零的矢量，叫做零矢量，记作 $\vec{0}$ 。零矢量没有确定的方向。

单位矢量：模为1的矢量。方向与 $\vec{a}$ 相同的单位矢量： $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 。

基本单位矢量：在三个坐标轴上，以原点为起点分别取三个单位矢量，其方向与坐标轴的方向相同，分别用 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 表示。

3. 矢量的线性运算

矢量的加减：以任何次序相继作矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ，并以前一矢量的终点作为次一矢量的起点，再由第一矢量的起点至最后一矢量的终点所得折线的封闭矢量即为矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ 的和。矢量的减法定义为矢量加法的逆运算。

矢量的数乘：设已知矢量 $\vec{a}$ 和实数 m ，则它们的乘积 $m\vec{a}$ 仍是一个矢量，这矢量的模等于矢量 $\vec{a}$ 与数 $|m|$ 的乘积，并且平行于矢量 $\vec{a}$ 。若 $m > 0$ ，则它的方向与矢量 $\vec{a}$ 的方向相同；若 $m < 0$ ，则它的方向与矢量 $\vec{a}$ 的方向相反；若 $m = 0$ ，它就成为零矢量。

4. 矢量的射影

矢量 $\vec{a}$ 在轴 l 上的射影等于矢量的模乘以轴与矢量的夹角 θ 的余弦, 即

$$Pr_{jl}\vec{a} = |\vec{a}| \cos \theta.$$

有限个矢量的和矢量在轴 l 上的射影等于各矢量在轴 l 上射影的和, 即

$$Pr_{jl}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n) = Pr_{jl}\vec{a}_1 + Pr_{jl}\vec{a}_2 + \cdots + Pr_{jl}\vec{a}_n.$$

5. 矢量的分解和矢量的坐标

若矢量 $\vec{a}$ 在三个坐标轴上的射影分别为 x, y, z , 则 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x, y, z 称为 $\vec{a}$ 的坐标或分量, 记作 $\vec{a} = (x, y, z)$.

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, m 为常数, 则

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z), \quad m\vec{a} = (ma_x, ma_y, ma_z).$$

6. 矢量的模、方向余弦和方向数

矢量的模: 若 $\vec{a} = (x, y, z)$, 则 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

方向余弦: $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$
 $\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

方向数: 与矢量方向余弦成比例的一组实数 l, m, n , 即

$$\frac{l}{\cos \alpha} = \frac{m}{\cos \beta} = \frac{n}{\cos \gamma}.$$

1.2 精讲例题与分析

1.2.1 基本习题讲解

例 1.1 求 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于坐标轴、坐标平面和坐标原点对称的点.

解 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于 x 轴对称的点为 $(x_0, -y_0, -z_0)$;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于 y 轴对称的点为 $(-x_0, y_0, -z_0)$;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于 z 轴对称的点为 $(-x_0, -y_0, z_0)$;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于 yOz 坐标平面对称的点为 $(-x_0, y_0, z_0)$;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于 xOz 坐标平面对称的点为 $(x_0, -y_0, z_0)$;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于 xOy 坐标平面对称的点为 $(x_0, y_0, -z_0)$;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于坐标原点对称的点为 $(-x_0, -y_0, -z_0)$.

例 1.2 求证自空间一点 A 向定圆的任一内接正三角形三顶点所引三矢量的和为定矢量.

证明 取定圆的圆心 O 为原点, 定圆所在的平面为 $z = 0$ 坐标平面, 内

接正三角形一个顶点为 $B(1, 0, 0)$ ，建立空间直角坐标系. 则内接正三角形的另外两个顶点分别为 $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ 和 $D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ，点 A 的坐标为 (x, y, z) . 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} &= [(1, 0, 0) - (x, y, z)] + \left[\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) - (x, y, z)\right] \\ &+ \left[\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) - (x, y, z)\right] = -3(x, y, z) = -3\overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

注 对于此类没有给定坐标系的题目，应当根据问题的需要，选取适当的坐标系，以简化计算.

例 1.3 已知 $|\overrightarrow{AB}| = 11$ ，点 $A(4, -7, 1)$ ，点 $B(6, 2, z)$ ，求 z 的值.

解 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 9, z - 1)$ ， $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 9^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{85 + (z - 1)^2} = 11$ ，解得 $z = 7$ 或 $z = -5$.

例 1.4 已知矢量 $\vec{a} = (5, 7, 8)$ ， $\vec{b} = (3, -4, 6)$ ， $\vec{c} = (-6, -9, -5)$ ，求矢量 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 的模和方向余弦.

解 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, -6, 9)$ ， $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 9^2} = 11$.

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|} = \left(\frac{2}{11}, -\frac{6}{11}, \frac{9}{11}\right).$$

例 1.5 点 M 的矢径与 x 轴成 45° 的角，与 y 轴成 60° 的角，它的长度 r 为6，如果点 M 的坐标中 z 是负的，试求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

解 设 M 的坐标为 (x, y, z) ，则由已知条件

$x = r \cos 45^\circ = 3\sqrt{2}$ ， $y = r \cos 60^\circ = 3$ ， $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = -3$ ，所以 $\overrightarrow{OM} = (3\sqrt{2}, 3, -3)$.

1.2.2 拓展习题讲解

例 1.6 一矢量的起点为 $A(1, 4, -2)$ ，终点为 $B(-1, 5, 0)$ ，试求 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的射影，并求 $|\overrightarrow{AB}|$.

解 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的射影分别为

$$-1 - 1 = -2, \quad 5 - 4 = 1, \quad 0 - (-2) = 2.$$

所以 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.