



新课标解题方法一点通系列

新课标高中数学 解题方法 一点通

主 编 梁开华

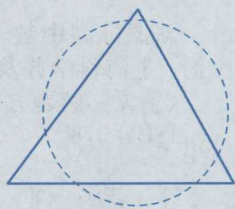


方法决定成绩
点拨开通思路

上海科学普及出版社

新课标解题方法一点通系列

新课标



高中数学解题方法

主 编 梁开华

编写人员 梁开华 刘 达

高福如 周 臻

郑 亮 陈兴国

祝海峰 余勇波

唐艺琳



上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标高中数学解题方法一点通/梁开华主编. —上海: 上海科学普及出版社, 2007. 8
(新课标解题方法一点通系列)
ISBN 978-7-5427-3767-0

I. 新… II. 梁… III. 数学课-高中-解题
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 100948 号

责任编辑 张建青

新课标解题方法一点通系列
新课标高中数学解题方法一点通

主编 梁开华

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号 邮政编码 200070)

<http://www.pspsh.com>

各地新华书店经销 上海中华印刷有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 17.125 字数 690 000

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-3767-0/O·227 定价: 26.00 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题

请向出版社联系调换



前言

001

不论是全国的还是地方的新课程标准,都希望“人人学有价值的数学;人人都能获得必需的数学”,由此才“使不同的人在数学上得到不同的发展”。而在学习内容上,则“应当是现实的、有意义的、富有挑战性的”。这样的教材设计理念,是相当耐人寻味的。正基于此,学习的评价意识启迪人们更为关注的,不单是学习的结果,更需重视学习的过程以及映射其中的情感和态度。帮助学生形成多方位素质与能力的培养与历练,尤其是理性地对待数学学习,在理解与掌握已有知识与经验的基础上,学会分析与解决所遇到的新问题。把现实问题数学化和数据化,力求达到有效而简明的解决,这正是数学所追求的境界,数学所期待于教与学的。

本书的构架思想与编写原则,正是贯彻这样理念与想法的最新尝试。参加本书编写的人员,一般都有多年甚至十多年高三执教的经历,且老年教师,中壮年教师,青年教师恰各占三分之一;专注于高考命题研究与实践者占半数以上。因此,这样的一个有经验、有活力、有研究精神的群体组合,使本书带有相当显著的特点。本书所期望和给予读者的,相信在你认真研读以后,会形成比较强烈的感觉,可概括聚焦为这样几个字:

把握一个“准”字。本书的定位正是“有价值”和“必需”,因此,面向的是大众读者群体。这样,本书内容的聚汇就有很明确的把卡关口,过难的内容和题被过滤和改编了;另一方面,又相当维系“挑战性”,高考是选拔人才的,不可能降低要求和门槛。所以,内容和题不但是基本的,更往往是重要的和典型的;力求举一反三。这个“准”字的辩证意味,在章节比重、知识点设置、关键问题选取等方面随处可见。本书不希望面面俱到、主次不分;也反对只是高考题模拟题的堆砌;本书紧扣高考

的方向和要求,也不想束缚于高考指挥棒的桎梏.因此,对赘沓繁难问题说“不”!也不失精采情节的展开.重要的考虑就是,你能更多地获益其中.

突出一个“新”字.高一新生往往在入学知识衔接上出现问题,本书把“不等式”设置于第1章,“集合”设置于第2章,就是希望开始的学习简单一些,不要铺得太开,先打个好基础;另外,“向量”的基本知识提前介入,且有个综合应用的安排,作用与效果不言而喻.这个“新”字,更散见于内容与题目之中.本书的题目取源广,格调新,且有相当自编改编的比重.如前已述,本书编写者中,云集不少拟题高手.更由于指导思想的较高视点和分寸有度,对读者的学用应当是相当有利的.这个“新”字,在数学的思想方法和解题技巧上,又可谓匠心独运.除了众所周知的“方程与函数”、“数形结合”、“分类讨论”、“归纳、代换、转化”等思想以外,与本书编辑思想“一点通”要则相融和的,是本书还介绍“列表法”、“数阵”、“分形”、“对称”、“对应”、“计点”、“评估之量化”等相当可观、省人的新思维和新理念,其意义已经远超于学知识做题目.这正是本书之优势强势的重要方面之一吧!

强调一个“好”字.内容要好,题目要好,问题的解法也要好.这个“好”字,在“分析”与“点拨”上,也要显现特色,以更有助于理解、思考以及进一步的研究.事实上,本书的许多问题也确实是有余味的,比如问题的给出与解决,一改传统的呆板模式,往往进一步形成动态的,常识的,蕴含知识与现实背景的,拓展为更广阔知识空间的,如此等等.

本书在成书过程中欠缺与不足在所难免,热忱欢迎专家同仁和广大读者批评指正,以及在网进行交流切磋.

网 址: <http://www.liangma.org> 或 <http://liangma.xicp.net/>
E-mail: liangkaihua1946@126.com

梁开华

2007.5



目 录

基础知识

001

➤ 第1章 不等式	3
第1节 不等式性质的讨论	4
第2节 一定范围解域的各类不等式解法	6
第3节 绝对值不等式	9
第4节 特殊范围解域的不等式	10
第5节 基本不等式及其应用	13
第6节 本章小结	18
习题训练	22
➤ 第2章 集合、命题和条件	24
第1节 集合语言和图示语言,子集与空集	25
第2节 集合的交、并、补运算	28
第3节 命题判断与推出关系	32
第4节 条件关系	35
第5节 本章小结	38
习题训练	41
➤ 第3章 函数及其基本性质	44
第1节 函数概念及相关运算	44
第2节 函数的奇偶性和单调性	48
第3节 函数值域及各种主要类型的函数最值问题	52
第4节 一些特征性函数的图像分析	57
第5节 本章小结	62
习题训练	68
➤ 第4章 一些基本初等函数	71
第1节 幂函数及其图像与性质	71
第2节 指数函数及其图像与性质	74

第3节 对数(含指数)问题的相关计算	77
第4节 反函数以及对数函数的图像与性质	80
第5节 简单的指数、对数方程(不等式)	86
第6节 本章小结	89
习题训练	94

➤ 第5章 平面向量	97
第1节 向量的概念及应用	97
第2节 向量的数量积	101
第3节 本章小结	105
习题训练	107

三角知识

➤ 第6章 三角比、三角函数及反三角函数	113
第1节 三角比	114
第2节 三角函数	117
第3节 反三角函数	122
第4节 本章小结	124
习题训练	128

➤ 第7章 三角公式及其综合运用	131
第1节 三角公式	131
第2节 综合运用	135
第3节 本章小结	140
习题训练	142

➤ 第8章 解斜三角形,简单的三角方程	145
第1节 解斜三角形	146
第2节 简单的三角方程	150
第3节 本章小结	153
习题训练	155

数列知识

➤ 第9章 数列、通项与求和	159
第1节 数列,等差、等比数列的通项	159
第2节 数列的求和	164



第3节 本章小结	169
习题训练	174
➤ 第10章 数列的递推式,算法和统计	177
第1节 数列的递推式	177
第2节 简单算法和统计	182
第3节 本章小结	188
习题训练	193
➤ 第11章 数列的极限和数学归纳法	197
第1节 数列的极限与无穷递缩等比数列的和	197
第2节 数学归纳法	201
第3节 本章小结	204
习题训练	209

解析知识

➤ 第12章 直线和圆	213
第1节 直线方程和两条直线间的相互关系	213
第2节 简单的线性规划	224
第3节 圆的方程	229
第4节 直线与圆的位置关系	233
第5节 本章小结	237
习题训练	242
➤ 第13章 直线与圆锥曲线	244
第1节 圆锥曲线的方程	244
第2节 直线与圆锥曲线的位置关系	252
第3节 本章小结	259
习题训练	267
➤ 第14章 解析几何中的几个专题问题	270
第1节 轨迹问题	270
第2节 求参数范围的问题	277
第3节 最值问题	283
第4节 本章小结	287
习题训练	293

空间知识

➤ 第15章 直线与平面	299
第1节 平面的基本性质	299
第2节 空间两直线的位置关系	302
第3节 直线与平面、平面与平面的位置关系	305
第4节 空间向量与立体几何	309
第5节 本章小结	315
习题训练	319
➤ 第16章 简单的几何体	322
第1节 棱柱、棱锥、棱台的概念	322
第2节 棱柱、棱锥、棱台的计算	326
第3节 欧拉定理与球	330
第4节 本章小结	333
习题训练	338

实践知识

➤ 第17章 数学建模和应用题	343
习题训练	358

离散知识

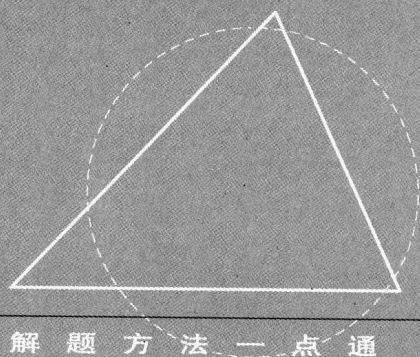
➤ 第18章 矩阵、行列式、线性方程组	367
习题训练	375
➤ 第19章 排列、组合、二项式定理和概率	377
第1节 排列、组合	377
第2节 二项式定理	380
第3节 概率	384
第4节 本章小结	387
习题训练	393
➤ 第20章 复数初步	396
习题训练	403



➤ 第 21 章 参数方程与极坐标	405
第 1 节 曲线的参数方程与普通方程	405
第 2 节 极坐标	410
第 3 节 本章小结	414
习题训练	419
➤ 第 22 章 导数初步	422
习题训练	428

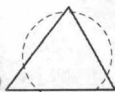
综合知识

➤ 第 23 章 向量知识的综合应用	431
习题训练	445
➤ 第 24 章 特殊值、代换、数形结合与分类讨论	449
习题训练	459
➤ 第 25 章 中点、对称、对应等问题	462
习题训练	472
➤ 第 26 章 列表、数阵、新思维等问题	475
习题训练	486
➤ 高考数学模拟试卷一	490
➤ 高考数学模拟试卷二	495
➤ 高考数学模拟试卷三	499
➤ 高考数学模拟试卷四	504
➤ 参考答案与提示	509



新 课 标 高 中 数 学 解 题 方 法 一 点 通

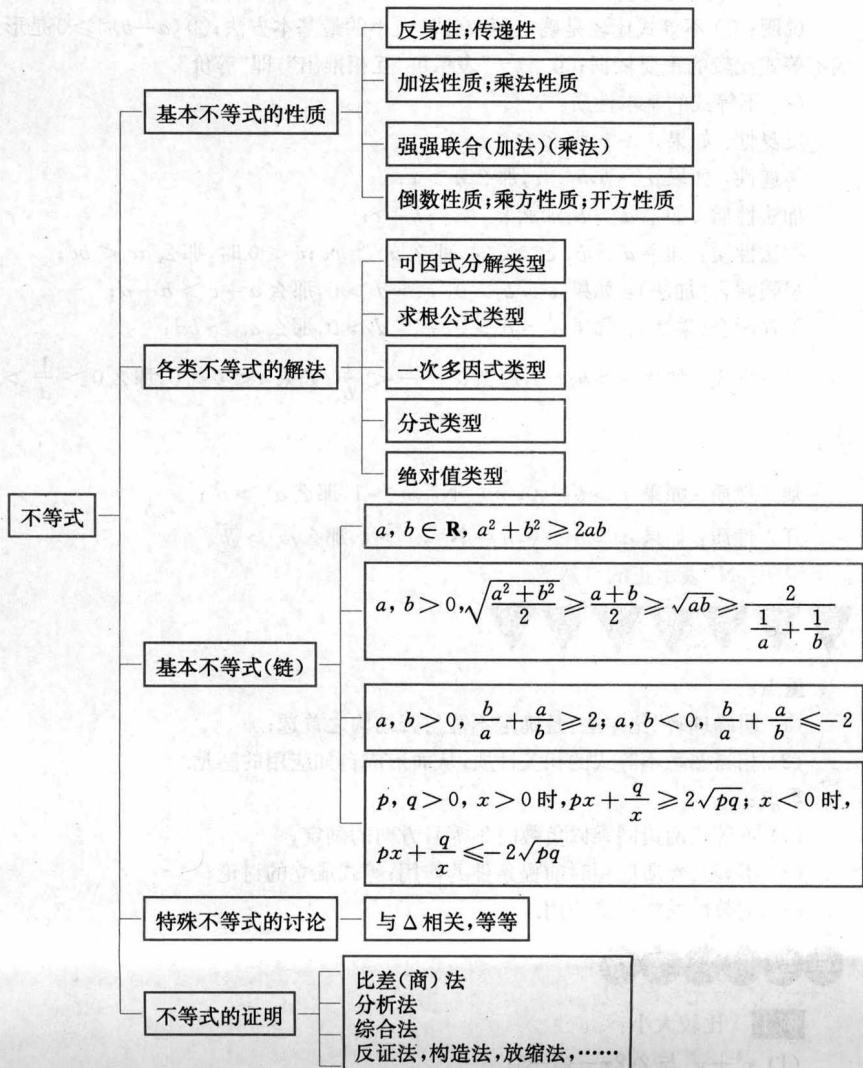
基础知识



第一章

不等式

知识网络(不等式应用题见第 17 章)



第1节 不等式性质的讨论

知 识 点 提 要

(1) 不等式的比较: $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$; $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$; $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

说明: ① 不等式比较是确定两数(式)大小的最基本方法; ② $(a-b)^2 \geq 0$ 是形成不等式比较的重要依据; ③ “ $\Leftrightarrow$ ”表示可“互相推出”, 即“等价”.

(2) 不等式的基本性质:

反身性: 如果 $a>b$, 那么 $b<a$;

传递性: 如果 $a>b, b>c$, 那么 $a>c$;

加法性质: 如果 $a>b$, 那么 $a+c>b+c$;

乘法性质: 如果 $a>b, c>0$ 时, 那么 $ac>bc$; $c<0$ 时, 那么 $ac<bc$;

强强联合(加法): 如果 $a>b>0, c>d>0$, 那么 $a+c>b+d$;

强强联合(乘法): 如果 $a>b>0, c>d>0$, 那么 $ac>bd$;

倒数性质: 如果 $a>b>0$, 那么 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$; 如果 $a<b<0$, 那么 $0>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;

乘方性质: 如果 $a>b>0, n \in \mathbf{N}^*, n>1$, 那么 $a^n>b^n$;

开方性质: 如果 $a>b>0, n \in \mathbf{N}^*, n>1$, 那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

说明: $\mathbf{N}^*$ 表示正的自然数.

重 点 与 难 点 扫 描

重点:

- (1) 明确理解“比差法”是确定不等与否结构之首选;
- (2) 相当熟悉不等式的相关性质, 从而形成自如应用的感觉.

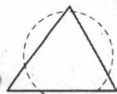
难点:

- (1) 不等式两边同乘以负数时不等号方向的确定;
- (2) 不等式性质应用时前提条件的作用; 等式成立的讨论;
- (3) 倒数性质的正确应用.

典 型 例 题 精 析

例1 比较大小:

- (1) x^2+y^2 与 $2(2x-y)-5$;



$$(2) 2a^2 + 3a + 5\frac{1}{8} + 4b^2 + b \text{ 与 } a^2 - a + 3b^2 + 2b + \frac{7}{8}.$$

分析 比差时,形成不等式 $(a-b)^2 \geq 0$ 是首选.

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \because x^2 + y^2 - 2(2x - y) + 5 &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) \\ &= (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 2(2x - y) - 5.$$

当且仅当 $x = 2, y = -1$ 时等式成立.

点拨 “ $\geq$ ”是指含“ $>$ ”、“ $=$ ”两个式子. 因此,等式成立的条件往往需要强调.

$$\begin{aligned} (2) \because 2a^2 + 3a + 5\frac{1}{8} + 4b^2 + b - (a^2 - a + 3b^2 + 2b + \frac{7}{8}) \\ &= a^2 + 4a + b^2 - b + 4\frac{1}{4} = (a^2 + 4a + 4) + (b^2 - b + \frac{1}{4}) \\ &= (a + 2)^2 + (b - \frac{1}{2})^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\therefore 2a^2 + 3a + 5\frac{1}{8} + 4b^2 + b \geq a^2 - a + 3b^2 + 2b + \frac{7}{8}.$$

当且仅当 $a = -2, b = \frac{1}{2}$ 时等式成立.

点拨 ① 比差时移项、合并不要出错;② 对形成 $(a-b)^2$ 结构要敏感.

例 2 已知 $a < b < 0$, 下列不等式中,正确的是_____ (填序号).

$$\textcircled{1} \frac{1}{a} > \frac{1}{b};$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{|a|} > \frac{1}{|b|};$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{a-b} > \frac{1}{a};$$

$$\textcircled{4} (a + \frac{1}{b})^2 > (b + \frac{1}{a})^2.$$

分析 用好性质是关键.

解: ①式符合倒数性质,正确;②式显然错误;对于③式,不妨举例:

$$a = -10, b = -1, \text{ 则 } \frac{1}{a-b} = -\frac{1}{9}, \frac{1}{a} = -\frac{1}{10}, \text{ 因而③式错误;}$$

对于④式,不妨比差:

$$(a + \frac{1}{b})^2 - (b + \frac{1}{a})^2 = \frac{(ab+1)^2}{b^2} - \frac{(ab+1)^2}{a^2} = \frac{(ab+1)^2}{a^2b^2}(a^2 - b^2),$$

其中: $ab > 0$, 则 $\frac{(ab+1)^2}{a^2b^2} > 0$, 而 $a < b < 0$, 则 $a^2 - b^2 > 0$. 所以④式正确.

故填入①、④.

点拨 (1) 分析③式时,适当取一组数代入不等式用以判断(叫做“特殊值法”),是“小题小做”的灵巧做法;(2) 比差时,形成正确结构是因式分解的重要基本功,对此需要耐心计算.

例 3 选择题:

(1) 如果 $a < b < 0$, 那么下列不等式中正确的是().

- A. $\frac{-a}{-b} < 1$ B. $a^2 < b^2$ C. $b^2 > ab$ D. $a^2 > ab$

(2) 下列表示正确的是().

- A. 若 $ax > b, a \neq 0$, 则 $x > \frac{b}{a}$ B. 若 $a^2x > a^2y$, 则 $x > y$

- C. 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ D. 若 $a > b$, 则 $a^2 > ab$

解: (1) $\because a < b < 0, \therefore -a > -b > 0, \frac{-a}{-b} > 1$, 所以 A 选项错误; 由已知得

B 选项显然错误; 又对于 $a < b < 0$, 两边同乘以 a 或 b , 不等号都改变方向. 故选 D.

(2) A 选项与 D 选项中, a 不明正负, 无法判断其正确; C 选项中, $ac > bd$ 才是正确的; B 选项中, $a^2x > a^2y$ 已经成立, 又 $\because a^2 > 0 \Rightarrow x > y$. 故选 B.

点拨 应用不等式的性质, 必须首先弄清概念和条件; 是什么问题, 用哪一条性质, 形成怎样的结果, 应十分明确.

例 4 已知 $x < y$ 且 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, 则 $x - y$ 的范围是_____.

解: $\because x < y \Leftrightarrow x - y < 0$, 又 $\because a \leq x \leq b, -d \leq -y \leq -c$,

$\therefore a - d \leq x - y < 0$.

点拨 给出 $-d \leq -y \leq -c$ 再“强强联合”是解题关键; 但 $x - y \leq b - c$ 则错, 因为 x, y 可能无限接近, 而比 $b - c$ 小.

例 5 已知 $\frac{a}{a-b} > \frac{c}{c-d} > 0$, 求 a, b, c, d 所满足的关系式.

解: 由已知得 $\frac{a-b}{a} < \frac{c-d}{c}$, 即 $1 - \frac{b}{a} < 1 - \frac{d}{c}$,

$\therefore -\frac{b}{a} < -\frac{d}{c}, \therefore \frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

点拨 分母复杂时, 往往用倒数性质, 但必须在结构式同正或同负时进行, 又分子复杂时, 注意分离为多项相加减.

第 2 节 一定范围解域的各类不等式解法

知 识 点 提 要

(1) 在回顾二次函数(与 x 轴有两个交点)图像的基础上给出 $(x-a)(x-b) >$



0 以及 $(x-a)(x-b) < 0$ (其中 $a < b$) 的不等式解域, 进而按图 1-2-1 所示, 给出多因式不等式的解.

(2) 分式结构如 $\frac{(x-p)(x-q)}{x-a} > 0$,

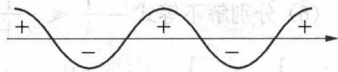


图 1-2-1

转化为 $\begin{cases} (x-a)(x-p)(x-q) > 0 \\ x-a \neq 0 \end{cases}$ 来解.

(3) 二次结构能顺利因式分解时, 先把不等式一边因式分解; 不能顺利因式分解时, 先把不等式当作方程求出二根, 再表示为不等式的解.

(4) 解不等式组要会对解综合.

(5) 根据(已知)不等式的解域, 会构造新的不等式.

重点与难点扫描

007

重点:

(1) 掌握各类不等式解法; 会构造新的不等式; 一定要注意在最简单结构的基础上掌握解法与要领, 循序渐进.

(2) 不等式组的解要会综合.

(3) 注意构造新不等式的解法, 其程式化可定义为“可操作”法.

难点:

(1) 解题过程中易错环节的把握, 如不能忽视分母不为 0 的隐含条件; (最高次) 变量前含负号时先化为正号; 不能随便去分母; 等等.

(2) 注意解题过程中不等式性质的应用.

典型例题精析

例 1 解不等式:

(1) $(x-2)^2 > 9$;

(2) $|x-2| > 3$;

(3) $(x+3)^2 < 16$;

(4) $|x+3| < 4$;

(5) $\frac{1}{x} \leq x$;

(6) $-\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{3}$.

解: (1) $x-2 > 3$ 或 $x-2 < -3$.

即 $x > 5$ 或 $x < -1$.

∴ 原不等式的解是 $x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$.

注意: 其中“ $\in$ ”表示“属于”; “ $-\infty$ ”、“ $+\infty$ ”分别表示“负无穷大”、“正无穷大”; “ $\cup$ ”读作“并”, 表示左右两个“区间”都是解. 不等式的综合解尽量用区间表示.

(2) 解法同(1).

(3) $-4 < x+3 < 4$, 得 $-7 < x < 1$.

(4) 解法同(3).

(5) $\frac{1}{x} - x \leq 0$, 得 $\frac{(1+x)(1-x)}{x} \leq 0$, 转化为 $\begin{cases} x(x-1)(x+1) \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$