普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学

上册

东南大学高等数学教研室 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学

上册

东南大学高等数学教研室 主 编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，吸收了教育部立项支持的“电子与电气信息类专业人才培养改革成果的整合与深化”项目的部分研究成果，总结多年来东南大学高等数学教学改革的实践而编写的一本改革教材。

本书分为上、下两册，第一至第四章为上册，主要内容为一元函数微积分和常微分方程，第五至第十章为下册，主要内容为多元函数微积分、级数与复变函数等。另外还包括数学实验及三个附录，书后附有部分习题的参考答案。

本书可作为理工科院校电子信息与电气学科各专业及其他需要学习复变函数的工科专业的高等数学课程教材，也可作为相关专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/东南大学高等数学教研室主编．—北京：高等教育出版社，2007.7

ISBN 978-7-04-021736-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．东…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第088531号

策划编辑 李艳馥　**责任编辑** 董达英　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 黄建英
版式设计 史新薇　**责任校对** 王　超　**责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京北苑印刷有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007年7月第1版
印　　张	21.25	印　　次	2007年7月第1次印刷
字　　数	390 000	定　　价	22.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　21736-00

前　言

本书作为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，吸收了教育部立项支持的“电子与电气信息类专业人才培养改革成果的整合与深化”项目的部分研究成果，总结多年来东南大学高等数学教学改革的实践而编写的一本改革教材。作为改革教材诸多模式中的一种模式，本书力求突出以下几点：

1. 对教学内容进行整合和改革，将复变函数的主要内容融入高等数学课程。既注意到实分析与复分析在处理问题的思想方法上的相通之处，也强调了各自的特点，使实分析与复分析有机结合，相互呼应，相互渗透。这是本教材最鲜明的特色。同时，将传统的高等数学中的空间解析几何的内容并入线性代数成为几何与代数课程，实行高等数学课程和几何与代数课程同步教学。

2. 讲解数学内容的同时，加强对学生应用能力的培养。注意对基本概念、基本理论和基本方法的几何背景和实际应用背景的介绍，选取与电类专业有关的例题与习题，增强学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

3. 突出数学的基本思想和基本方法，削减次要内容。在一元函数积分学部分，将不定积分与定积分相结合，以定积分为主线，不定积分主要介绍换元法和分部积分法两种基本积分法，淡化不定积分的计算技巧，对有理函数积分法等内容只作了简略介绍。

4. 为学生学习现代数学的其他内容提供展示的窗口及利用计算机工具“用数学”提供延伸的接口。尽量使用现代数学语言、术语和符号。增加了Mathematica这一数学软件的介绍和利用Mathematica进行数学试验的内容等。

5. 考虑到与目前高中数学教学内容的衔接，在第一章中介绍了复数的有关内容，并将数学归纳法及某些常见曲线作为附录。

此外，在习题的编排上，除每小节后给出一定量的练习外，每章后面设有总习题，其中的习题包括综合题、有一定难度的题，教师可根据学生的实际情况选用。

本书分为上、下两册，上册包括一元函数的极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程及其应用等内容，下册包括多元函数微分学及其应用(含解析函数)、多元函数积分学及应用，复变函数的积分，级数(含复级数)等内容。本书主要面向高等院校的电类专业和需要学习复变函数的工科专业。

本书的第一、四、七、八章由董梅芳老师编写，第二、五、六、九、十章及附录由黄骏老师编写，第三章由张勤老师编写，数学实验由贺丹老师编写，全书的插图由杨明老师绘制。全书由黄骏和董梅芳老师统稿。

在本书的编写过程中，得到了东南大学教务处及数学系老师的大力支持，数学系的管平教授对本教材的编写提出了许多有益的意见和建议，在此，我们表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中不妥与错误之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2006. 12

目　　录

第一章　一元函数的极限与连续

数学是研究现实世界中数量关系与空间形式的科学. 从研究常量到研究变量，从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体，是人类对世界认识的一大飞跃，是数学发展中的一个转折，也是初等数学与高等数学研究对象的区别所在. 微积分是高等数学的核心内容，函数是微积分的研究对象，极限理论是微积分的基础，极限的思想是微积分中最重要的一种思想方法. 本章将介绍数列极限与函数极限的概念、性质及求极限的方法，连续函数的概念与性质. 为了准确而深刻地理解函数与极限的概念和理论，本章还将对中学已学过的集合、函数等知识作简要的复习和适当的补充.

第一节　预 备 知 识

本节介绍集合的概念、集合的基本运算、一些常用的集合以及映射与函数的基本概念和简单性质.

1.1　集合及其运算

我们将具有某种特定性质的对象的全体称为一个**集合**(简称**集**)，组成这个集合的对象称为该集合的**元素**(简称**元**)，通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记为 $a\in A$；否则就说 a 不属于 A，记为 $a\notin A$. 含有限个元素的集合称为**有限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，用 $\varnothing$ 表示；既不是有限集也不是空集的集合称为**无限集**.

集合的表示方法有两种：一种是列举法，即把它的所有元素都列出来，写在一个花括号内. 另一种方法是指明集合中元素所具有的性质，将具有性质 $P(a)$ 的元素 a 所构成的集合记为

$$A=\{a \mid a \text{ 具有性质 } P(a)\}$$

习惯上，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$；全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}_+,\ p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

以后，下标符号“+”表示集合内排除0的集，例如，$\mathbf{N}_+$表示正整数集，$\mathbf{R}_+$表示非零实数集.

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 x 和 y 为任意的实数，i 称为虚单位，满足 $\mathrm{i}^2=-1$. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记作 $x=\mathrm{Re}\,z$，$y=\mathrm{Im}\,z$.

全体复数构成的集合记为 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{C}=\{z=x+\mathrm{i}y\mid x,y\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}.$$

设 a，$b(a<b)$为两个实数，称所有大于 a 小于 b 的实数构成的集合为开区间，记为(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\},$$

类似地，可以定义

闭区间 $\quad [a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间 $\quad [a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；

$\quad (a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

以上区间统称为有限区间，此外还有无限区间：

$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\};$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\};$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\};$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

设 x_0 是给定的一个实数,$\delta>0$,特别地,称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为 x_0 **的 δ 邻域**，记为 $N(x_0,\delta)$，即

$$N(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

称在开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内去掉点 x_0 的集合为 x_0 **的 δ 去心邻域**，记为 $\mathring{N}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{N}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

今后，当不需要指明 δ 的具体数值时，常将邻域 $N(x_0,\delta)$简记为 $N(x_0)$，将去心邻域 $\mathring{N}(x_0,\delta)$简记为 $\mathring{N}(x_0)$.

设 A，B 是两个集合，若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或称 A 含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)；若 $A\subseteq B$，且有元素 $a\in B$，但 $a\notin A$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$；若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

例如，有限区间均为 $\mathbf{R}$ 的真子集；当复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的虚部 $y=0$ 时，$z=x$

为实数，因此实数集 **R** 是复数集 **C** 的真子集.

规定空集是任何集合的子集，即对任何集合 A，都有 $\varnothing\subseteq A$. 显然有 $A\subseteq A$，又若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

集合的基本运算有三种：并、交、差.

设 A，B 是两个集合，则包括了 A 和 B 中所有元素的集合称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$

若 $A\cap B=\varnothing$，则说 A 与 B 不相交。若 $A\cap B\neq\varnothing$，则说 A 与 B 相交。由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记为 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

例如，$\mathring{N}(x_0,\delta)$ 为 $N(x_0,\delta)$ 与 $\{x_0\}$ 的差集，即 $\mathring{N}(x_0,\delta)=N(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}$.

差集 $A\backslash B$ 并不要求 $A\supseteq B$. 如果 $A\supseteq B$，则称差集 $A\backslash B$ 为 B 在 A 中的**补集**或**余集**，记为 $\complement_A B$. 如果在研究某一问题时，所考虑的一切集合都是某个集合 X 的子集，常称 X 为基本集或全集，称 X 中的任何子集 A 在 X 中的补集 $X\backslash A$ 为 A 的补集或余集，记为 $\complement A$.

集合的运算满足下列运算法则.

法则 1 设 A，B，C 为任意三个集合，则下列运算律成立：

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

(3) 分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),$$
$$(A\backslash B)\cap C=(A\cap C)\backslash(B\cap C);$$

(4) 幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

(5) 吸收律 $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，

$A\subseteq B$ 时，$A\cup B=B$，$A\cap B=A$.

法则 2 设 X 为基本集，$A_i(i=1,2,\cdots)$ 为一列集合，则

$$\complement\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\complement A_i,\complement\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\complement A_i,$$

也就是说，一列集合的并的余集等于它们余集的交，一列集合的交的余集等于它们余集的并.

以上法则只要根据集合相等的定义即可验证，法则 2 是集合论中的一个重

要结论，称为**对偶原理**.

设 A，B 为两个集合，称集合

$$\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

为 A 与 B 的 **Descartes**①**(笛卡儿)乘积集**，简称为**乘积集**，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

例如，设 $A=[0,1]$，$B=[0,1]$，则 $A\times B$ 为以$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$为顶点的正方形；$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$表示整个 xOy 平面，记为 $\mathbf{R}^2$，即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

1.2 实数集及其完备性

实数集 $\mathbf{R}$ 是我们特别关注的数集，实数集的下述性质大家是熟悉的，但它的严格证明却很困难，需要用到实数理论.

(1) 关于四则运算(即加、减、乘、除)的封闭性　任意两个实数进行加、减、乘、除(除法要求分母不为零)运算后，其结果仍是实数.

(2) 有序性　任意两个实数 a 和 b，必满足且仅满足下列三种关系之一：

$$a<b,\ a=b,\ a>b,$$

且若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$.

(3) 稠密性　任意两个不相等的实数之间仍有实数.

(4) 完备性　实数集与数轴上的点存在一一对应的关系，即任意一个实数都对应数轴上唯一的一个点，反之，数轴上任意一点也对应唯一的一个实数.

有理数集 $\mathbf{Q}$ 也满足实数集 $\mathbf{R}$ 的前三条性质，即封闭性、有序性、稠密性，但不满足完备性. 例如，在数轴上以原点为中心，单位正方形的对角线长度$\sqrt{2}$为半径画一圆弧，它与坐标轴的交点就不是有理点，即$\sqrt{2}$不是有理数. 有理数集的稠密性只是说明有理数所对应的有理点密集地分布在整个数轴上，但数轴上除了有理点外还有许多空隙，这些空隙即数轴上不是有理点的点，称为无理点，无理点所对应的数称为无理数. 有理数集与无理数集的并集即为实数集，实数充满了整个数轴. 今后我们将对实数与数轴上的点不加区分.

实数集的完备性也称为连续性，它是实数最基本的属性之一，下面的概念和定理刻画了这一基本属性，而下一节将要介绍的极限理论则是建立在实数集完备性的基础之上的.

为了叙述的方便和简洁，以后将采用数学中常用的一些逻辑符号：

---

① Descartes(1596—1650)，法国数学家、物理学家、哲学家，在科学思想方法和认识论方面作出了重大贡献.

“$\forall$”表示“对任给的”或“对所有的”；

“$\exists$”表示“存在”或“有”。

定义 1.1 设 $A\subseteq\mathbf{R}$，$A\neq\varnothing$，若 $\exists L\in\mathbf{R}$，使得 $\forall x\in A$，都有 $x\leqslant L(x\geqslant L)$，则称数集 A **有上(下)界**，并称 L 为 A 的一个**上界(下界)**，若数集 A 既有上界又有下界，则称 A **有界**，否则称 A **无界**.

例 1.1 有限个数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 构成的数集(称为有限数集)是有界的，因为当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时，有

$$\min\ (a_1,a_2,\cdots,a_k)\leqslant a_i\leqslant\max\ (a_1,a_2,\cdots,a_k).$$

数集 $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$是有界的，0 是它的一个下界，1 是它的一个上界.

自然数集 $\mathbf{N}$ 有下界，0 是它的一个下界，但无上界.

由定义易知，如果非空数集 A 有上界(或下界)，则它必有无穷多个上界(或下界). 我们自然要问：这无穷多个上界(或下界)中是否存在一个最小上界 β(或最大下界 α)？所谓 A 的最小上界 β(或最大下界 α)，有两层含义，首先 β(或 α)是 A 的上界(或下界)，其次任何小于 β(或大于 α)的数都不是 A 的上界(或下界). 由此得到上(或下)确界的概念.

定义 1.2 设 $A\subseteq\mathbf{R}$，$A\neq\varnothing$，如果存在数 β(或 α)满足下列条件：

(1) $\forall x\in A$，有 $x\leqslant\beta$(或 $x\geqslant\alpha$)；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，使 $x_0>\beta-\varepsilon$(或 $x_0<\alpha+\varepsilon$)，

则称 β 为数集 A 的**上确界**(或 α 为 A 的**下确界**)，记为

$$\beta=\sup A(\text{或 }\alpha=\inf A).$$

由确界的定义可知，如果一个数集存在上确界(下确界)，则此确界必是唯一的.

例 1.2 设数集 $A=\left\{\frac{n}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbf{N}_+\right\}$，证明：(1) $\sup A=1$；(2) $\inf A=\frac{1}{2}$.

证 (1) $\forall n\in\mathbf{N}_+$，有$\frac{n}{n+1}<1$；又 $\forall\varepsilon>0$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$①，则有

$$\frac{n_0}{n_0+1}\in A\quad\text{且}\quad\frac{n_0}{n_0+1}=1-\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}>1-\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=1-\varepsilon,$$

故 $\sup A=1$.

(2) $\forall n\in\mathbf{N}_+$，有$\frac{n}{n+1}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$；又 $\forall\varepsilon>0$，取 $n_0=1$，则有

① $y=[x]$表示取整函数，其定义见后面例 1.7.

$$\frac{n_0}{n_0+1}=\frac{1}{2}\in A \quad 且 \quad \frac{n_0}{n_0+1}=\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\varepsilon,$$

故 $\inf A=\frac{1}{2}$.

应当注意，一个数集 A 的上(下)确界与它的最大(小)值是有区别的. A 的最大(小)值是指 A 中所有数中的最大(小)者，记为 $\max A(\min A)$，而 A 的确界可能属于 A，也可能不属于 A. 因此若 A 有最大(小)值，则该最大(小)值就是 A 的上(下)确界，反之不一定. 在例 1.2 中，$\inf A=\min A=\frac{1}{2}$，$\sup A=1\notin A$，$A$ 没有最大值.

如果数集 A 没有上(下)界，自然也没有上(下)确界，此时，为了方便和统一起见，规定 $\sup A=+\infty\,(\inf A=-\infty)$. 如果数集 A 有上(下)界，那么它是否一定有上(下)确界呢？对于实数集来说，答案是肯定的. 实际上，若 A 是一个非空有上界的实数集，则 A 对应于数轴上的一个点集，A 的所有上界在数轴上是连续分布的实数. 让 A 中的点向右边移动，必存在一点，在该点的右边不再有 A 中的点，该点左边的点都不是 A 的上界，该点对应的数便是 A 的上确界. 对于非空有下界的实数集也有同样的情况. 将这一直观上容易接受的结论叙述出来，就得到如下的所谓**确界存在定理**.

定理 1.1 有上(下)界的非空实数集必有上(下)确界.

确界存在定理是实数完备性的表现，是区别实数集和有理数集的本质属性，对此本书不作详述.

1.3 复数的表示及其运算

在复数集 **C** 中，定义两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，记作 $z_1=z_2$. 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，定义复数的四则运算如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\,(z_2\neq 0).$$

引入复数的代数运算后，符号 i 就不再是必须的了. 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与有序数组 (x,y) 一一对应，因此复数域 **C** 与 **Descartes** 平面 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 相对应，这样的平面称为**复平面**；在此平面上，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**，于是，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用复平面上的点 $P(x,y)$ 来表示.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可以用平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，由此可以定义复数的模

和辐角.

$z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**为 $$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由直角坐标与极坐标的关系：$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$还可以把复数 z 表示成

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

称为复数的三角表示法，$r=|z|$，θ 称为 z 的**辐角**，记为 Arg$z$. 任一非零复数 z 都有无穷多个辐角，其中只有一个辐角在$(-\pi,\pi]$范围内，这个辐角称之为 z 的主辐角，或 Arg$z$ 的主值，记为 arg z. Arg$z$，arg z 及 $\arctan\frac{y}{x}$之间有如下关系：

$$\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots;$$

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一象限时},\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限时},\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限时},\\ \arctan\frac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第四象限时},\end{cases}$$

其中 $-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$.

当 $z=0$ 时，其模为 0，其辐角无定义.

易证，复数的模和辐角具有以下性质：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\text{(三角不等式)},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2,$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.$$

(上面关于辐角的两个等式中，z_1 和 z_2 为非零复数，等式两边各是无穷多个数(辐角)的集合，等式在集合的意义下成立.)

借助于 Euler①(欧拉)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，复数 z 可表示为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

称之为复数的指数表示法.

复数的各种表示法可以互相转换.

称复数 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 为复数 $z=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathbf{R})$ 的**共轭复数**. 由此定义易知：

---

① Euler(1707—1783)，瑞士人，卓越的数学家和力学家，按 Laplace(拉普拉斯)的说法，欧拉是 18 世纪后半叶全体数学家共同的导师.

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$，$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2) $\overline{\overline{z}} = z$；

(3) $z\overline{z} = [\mathrm{Re}\, z]^2 + [\mathrm{Im} z]^2 = |z|^2$；

(4) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$，$z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im} z$.

为了在复平面上表示无穷远点，我们利用将球面投影到平面上的球极投影，建立复平面与球面上的点的对应.

取一个在原点与平面相切的球面，球面上的 S 点与原点重合(如图 1.1). 通过 S 点作垂直于平面的直线与球面交于 N 点. 我们称 N 为北极，S 为南极. 对于平面上任一点 z，如果用一条直线段将它和 N 连接起来，则该直线段与球面相交于异于 N 的一点 P；反之，对于球面上任一异于 N 的点 P，用一直线段将 N 与 P 连接起来，其延长线与平面交于一点 z，这样就建立了球面上的点(不包括北极点)与平面上的点之间的一一对应。既然复数可以用复平面上的点来表示，复数也可以用球面上异于 N 的点来表示. 从图 1.1 中可以看出，当点 z 无限地远离原点时，或者说当复数的模 $|z|$ 无限地变大时，其在球面上对应的 P 点就无限地接近于 N，为了使复平面与球面上的点无例外地都能一一对应起来，我们规定在平面上有一假想点——无穷远点，它与球面上的北极 N 相对应，无穷远点记作 ∞. 添加了 ∞ 点的复平面称为**扩充复平面**. 扩充复平面与球面上的点一一对应，这样的球面称为**复球面**. 对于扩充复平面上的点来说，∞ 的实部，虚部与辐角均无意义，但无穷远点的模 $|\infty| = +\infty$.

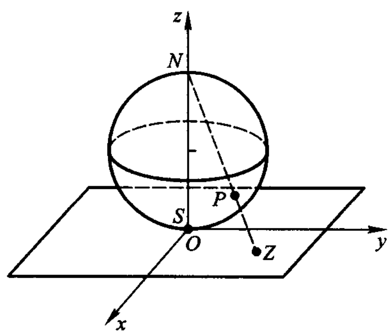

图 1.1

1.4 映射

定义 1.3 设 A，B 是两个非空的集合，若存在一个对应法则 f，使得对每个 $x \in A$，按照 f，在 B 中有唯一的一个元素 y 与之对应，则称 f 是 A 到 B 的一个**映射**，记作

$$f: A \to B，或 f: x \mapsto y = f(x),\ x \in A,$$

并称 y 为 x 在映射 f 下的**像**，x 为 y 在映射 f 下的一个**原像**，集合 A 为映射 f 的**定义域**，常记为 $D(f)$，A 中所有元素的像所组成的集合为 f 的**值域**，记为 $f(A)$，即 $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$.

映射概念中有两个基本要素，即定义域和对应法则，定义域表示映射存在