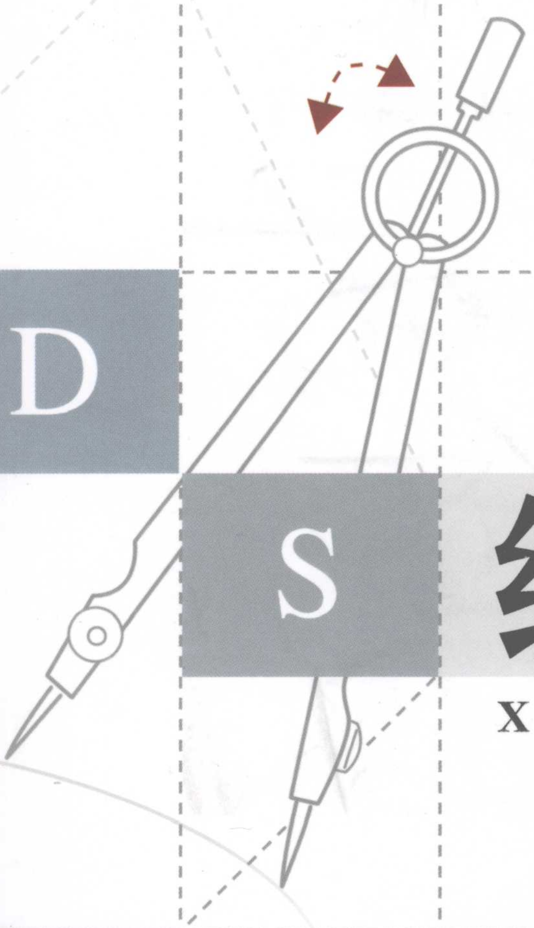
高等院校经济管理类专业
经济数学基础系列教材

总主编 赵新泉
副总主编 徐冬林
主审 葛翔宇

X



$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D S

线性代数

XIAN XING DAI SHU

刘康泽 ◎主编
李政兴 ◎副主编

中国财政经济出版社

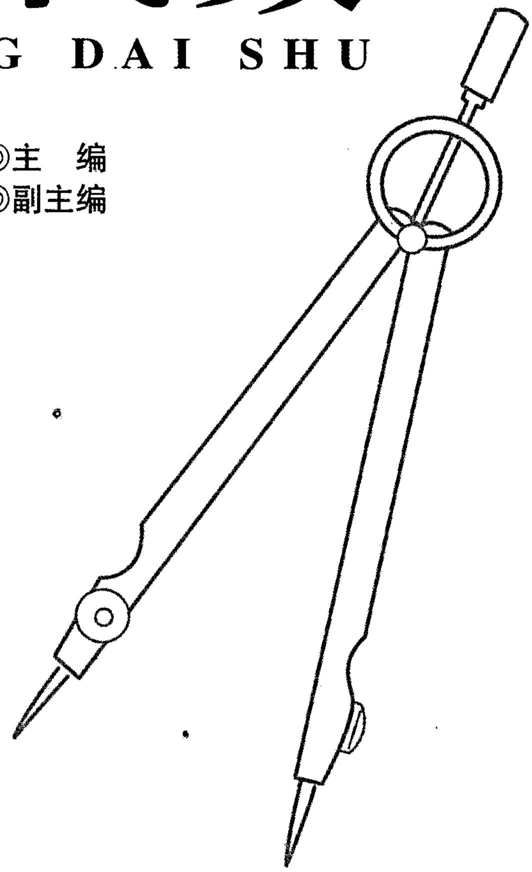
线性代数

高等院校经济管理类专
经济数学基础系列教
总 主 编 赵新
副总主编 徐冬
主 审 葛翔

线性代数

XIAN XING DAI SHU

刘康泽 ◎主 编
李政兴 ◎副主编



中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／刘康泽主编．—北京：中国财政经济出版社，2007.9
（高等院校经济管理类专业经济数学基础系列教材/赵新泉总主编）
ISBN 978-7-5095-0145-0

Ⅰ．线… Ⅱ．①刘…②李… Ⅲ．线性代数－高等学校－教材
Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 125233 号

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www.cfeph.cn
E-mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码：100036
发行处电话：88190406 财经书店电话：64033436
北京中兴印刷有限公司印刷 各地新华书店经销
787×1092 毫米 16 开 12.75 印张 312 000 字
2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月北京第 1 次印刷
印数：1—5 060 定价：18.00 元
ISBN 978-7-5095-0145-0/O·0006
（图书出现印装问题，本社负责调换）

序

Preface

数学作为自然科学的重要分支在经济学与管理学领域得到日益广泛的应用．判断现代学科成熟与否在很大程度上要考察其对数学知识的应用程度．经济学与管理学学科的成熟发展，得益于数学工具、数学模型在这两门学科上的深入应用，因此培养经济学、管理学与数学相结合的复合型人才已成为经济全球化和知识经济时代的一种趋势．为了探索和建立我国高等院校经济管理类数学课程教学内容和课程体系，在中国财政经济出版社大力支持下，我们承担了湖北省教育厅和中国财政经济出版社的教学研究课题《经济管理类数学实践课教学创新研究》和《经济管理类数学课程教材改革探索与建设》．该课题的建设目标是：紧密配合《高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作》，深入研究探索在现代教育技术的平台上，建成适应经济管理类专业创新人才培养需要的数学课程体系和立体化教材体系．

在教学研究课题的研究过程中，我们始终围绕着以上建设目标，从我国财经类院校经济管理数学教学现状的调查研究与分析入手，不断拓宽专业视野、加强应用和实践环节，使得课题成果之一的经济数学基础系列教材具有以下特点：

1. 教材在现有经济管理类数学教学基本要求的基础上，略有拓宽与加深，以满足近年来高校部分新增专业对数学更高要求的需要．

2. 教材内容叙述深入浅出，言简意赅，可读性强，便于学生自学，能够启发和培养学生的自学能力．

3. 考虑到经济管理类专业数学教学的目标与特点，在保证数学的严谨性、逻辑性的前提下，教材删除了一些不必要的推理论证过程，突出了理论的应用，强化了理论与实际的结合．

4. 教材由主、辅两部分组成：主教材由《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》三个分册组成；辅教材为上述三个分册的同步辅导书，它们将以释疑解惑并帮助理解概念和理论，掌握典型例题解法和技巧为目标编写，并将在主教材出版后出版，便于不同的读者选用．

5. 将本套教材中有应用部分的内容置于书末，以方便教师根据不同专业的需要选用．

6. 为了使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，教材中除选编相当数量的典型例题外，还选配了一定数量的习题，并附有习题参考答案．

本套教材既考虑到了教学内容的深度与广度以及经济、管理类各专业对数学课程的教

学基本要求，又考虑到了与教育部最新颁布的研究生入学考试数学三和数学四的考试大纲中的内容相衔接，符合经济、管理类各专业对数学要求越来越高的趋势．全套教材的编写注重适当渗透现代数学思想，加强对学生应用数学方法解决经济问题的能力的培养，以适应新时代对经济、管理人才的培养要求．本套教材既保持了数学学科本身的系统性、逻辑性、严密性和科学性，又有利于培养学生的逻辑思维及解决实际问题的能力，而且适当降低了一些纯数学的理论要求，加强了一些经济学、管理学后继课程中的应用内容，以便能较好地满足经济管理学科对数学的要求．

本套高等院校经济管理类专业经济数学基础系列教材由赵新泉任总主编，徐冬林任副总主编，葛翔宇任主审．全套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》三个分册．《微积分》分册由杨皓主编，罗捍东副主编，编写分工为：李玲侠编写第一、二、三章；杨皓编写第四章；罗捍东编写第五章；阎国光编写第六、七章；熊波编写第八章；贺胜柏编写第九、十章．《线性代数》分册由刘康泽主编，李政兴副主编，编写分工为：姚毅编写第一、六章；高潮编写第二章；李政兴编写第三、四章；刘康泽编写第五、七章．《概率论与数理统计》分册由王明华主编，汪家义副主编，编写分工为：汪家义编写第一章；常金华编写第二、三章；陈幸龄编写第四、五章；贾希辉编写第六章；吴唯实编写第七章；王明华编写第八、九章以及本书的附表．朱霞等老师在教材编写过程中做了大量的工作．本套教材的出版得到了中南财经政法大学、中国财政经济出版社各方领导的大力支持，中国财政经济出版社伍景华编辑及其他工作人员在整个组稿过程中作了大量的工作，我们在此对他们表示衷心的感谢！

虽然我们尽了很大的努力，但由于水平有限和时间仓促，教材中一定会存在错误和问题，恳请使用本教材的师生多提宝贵意见，以便我们再版时改进．

编　者

2007 年 7 月

目 录

Contents

第 1 章　行列式 …… (1)
§1.1　二阶与三阶行列式 …… (1)
§1.2　排列及其逆序数 …… (5)
§1.3　n 阶行列式的定义 …… (7)
§1.4　n 阶行列式的性质 …… (10)
§1.5　行列式的展开定理 …… (15)
§1.6　克莱姆（Cramer）法则 …… (22)
习题一 …… (25)

第 2 章　矩阵 …… (31)
§2.1　矩阵的概念 …… (31)
§2.2　矩阵的运算 …… (33)
§2.3　几种特殊结构的矩阵 …… (39)
§2.4　方阵的逆矩阵 …… (42)
§2.5　分块矩阵 …… (46)
§2.6　矩阵的初等变换与初等矩阵 …… (51)
§2.7　矩阵的秩 …… (60)
习题二 …… (64)

第 3 章　线性方程组 …… (69)
§3.1　线性方程组的高斯消元法 …… (69)
§3.2　向量的线性相关性 …… (79)
§3.3　向量组的极大无关组与秩 …… (88)
§3.4　线性方程组解的结构 …… (95)
习题三 …… (103)

第 4 章　向量空间 …… (108)
§4.1　向量空间及其子空间 …… (108)

§4.2 向量的内积与正交向量 …… (112)
§4.3 正交矩阵 …… (119)
习题四 …… (120)

第5章 特征值与特征向量 …… (123)
§5.1 矩阵的特征值与特征向量 …… (123)
§5.2 矩阵的相似关系 …… (129)
§5.3 矩阵的相似对角化 …… (130)
§5.4 实对称矩阵的相似对角化 …… (137)
§5.5 若当（Jordan）标准形简介 …… (142)
习题五 …… (144)

第6章 二次型 …… (148)
§6.1 二次型及其对称矩阵、矩阵合同 …… (148)
§6.2 化二次型为标准形 …… (151)
§6.3 二次型的正定性及正定矩阵 …… (162)
习题六 …… (166)

第7章 线性代数在经济管理中的应用 …… (168)
§7.1 经济最优化中的应用 …… (168)
§7.2 投入产出模型 …… (175)
§7.3 线性规划简介 …… (180)

习题参考答案 …… (187)

第1章

Chapter 1

行　列　式

行列式是研究矩阵、线性方程组、矩阵的特征值等内容的重要工具，是线性代数的基础．本章介绍行列式的概念、性质以及行列式的应用．

§1.1　二阶与三阶行列式

首先，回顾用消元法解线性方程组的过程．对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

可以通过先消去其中一个变元，而求得另一个变元的值的方法，将第一个方程两边同乘以 a_{22}，第二个方程两边同乘以 a_{12}，两者相减消去 x_2，得到关于 x_1 的方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

类似地，将方程组（1.1）的第二个方程两边同乘以 a_{11}，第一个方程两边同乘以 a_{21}，两者相减消去 x_1，得到关于 x_2 的方程

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，容易得到方程组（1.1）的唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

二元线性方程组（1.1）的系数组成二行二列的系数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ 与数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 有密切联系，定义数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为系数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ 的二阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

式中，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式第 i 行、第 j 列的元素，其中，第一下标 i 为行标，第二下标 j 为列标.

二阶行列式（1.3）的计算也可以根据图 1.1

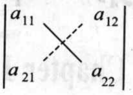


图 1.1

来记忆. 图 1.1 中，a_{11}与 a_{22}之间的实线连线为主对角线，a_{12}至 a_{21}的虚线连线为次对角线. 二阶行列式就是主对角线上的两元素的乘积和次对角线上两元素的乘积之差.

按照式（1.3）的记号，式（1.2）中的分子也可以用行列式分别表示为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

记方程组（1.1）的系数行列式为 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，当$D \neq 0$时，可用行列式表示出方程组（1.1）的解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{1.4}$$

例 1.1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$$

解 系数行列式为 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，

又 $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$，$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$.

所以方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{6}{2} = 3, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{2}{2} = 1. \end{cases}$$

下面考察三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

经过类似于用消元法解二元线性方程组的计算和整理过程，可以得到当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$$

时，方程组（1.5）的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{32}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+a_{23}a_{31}b_1+a_{13}b_3a_{21}-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}b_3a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}a_{32}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}. \end{cases}$$

可以观察到 x_1，x_2 和 x_3 的分母相同，且分子具有和分母类似的结构特征，即都包括 3! 个乘积项．因此，类似二元线性方程组（1.1）的解（1.4）的形式，引入三阶行列式的定义，以简化方程（1.5）的解的形式．

将 3^2 个数组成三行三列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

定义为三阶行列式，它表示表中所有不同行，不同列三个元素的乘积的代数和，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.6}$$

三阶行列式的值可以用图 1.2 来记忆．

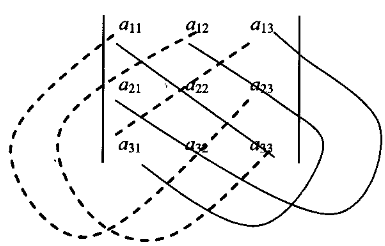


图 1.2

图 1.2 中，沿主对角线方向各实线相连的三个数的积取正号，沿次对角线方向各虚线相连的三个数的积取负号．所得各项的代数和为式（1.6）所示的三阶行列式．

根据三阶行列式（1.6）的定义，可以简化三元线性方程组（1.5）的解的形式．

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则当 $D\neq0$ 时，三元线性方程组（1.5）的解可以简化表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases} \tag{1.7}$$

通过观察，可以看到 D 为方程组（1.5）的系数所确定的三阶行列式，$D_j(j=1,2,3)$ 为用方程组右端常数 b_1，b_2，b_3 代替 D 中第 j 列元素而得到的三阶行列式．

例 1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

解
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=1\times3\times6+2\times1\times2+1\times3\times4-1\times4\times1$$
$$-2\times3\times6-2\times3\times1=-12$$

例 1.3 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2-3x_3=2, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$$
$$+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1=-5\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times0+1\times2\times1$$
$$-4\times1\times(-3)-2\times(-2)\times(-1)-0\times1\times1=6,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1\times2\times(-1)+4\times(-3)\times(-1)+1\times2\times0$$
$$-1\times0\times(-3)-2\times4\times(-1)-(-1)\times2\times1=20,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\times1\times0+2\times(-2)\times(-1)+4\times2\times1$$
$$-1\times1\times2-2\times(-2)\times0-(-1)\times1\times4=14.$$

因为系数行列式 $D\neq0$，所以由公式（1.7）得方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{6}{5},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{20}{-5}=-4,\ x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{14}{5}.$$

§1.2 排列及其逆序数

在上一节中，定义了二阶、三阶行列式，为了将其推广到 n 阶行列式，先引入 n 级排列的概念.

定义 1.1 由 n 个不同的数 1，2，…，n 排成的一个有序数组，称为一个 n 级全排列，简称 n 级排列.

例如，123 是一个由数 1，2，3 排成的 3 级排列；2341 是由数 1，2，3，4 排成的一个 4 级排列.

一般地，由 n 个不同的数 1，2，…，n 组成的 n 级排列记为 $i_1i_2\cdots i_n$，其中 i_1，i_2，…，i_n 互不相同，即 i_1 是 1，2，…，n 中的某一个数，i_2 是余下的 $n-1$ 个数中的某一个数，….因此 n 级排列的总数为

$$P_n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1=n!\ .$$

例如，由 1，2，3 三个数字组成的所有 3 级排列共有 $3\times2\times1$ 种，它们是：123，213，321，132，231，312.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有某个较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面，即 $i_t>i_s(s>t)$ 时，就称 i_t 与 i_s 构成了一个逆序.一个排列的逆序的总数称为这个排列的逆序数.记为 $t(i_1i_2\cdots i_n)$.

求排列的逆序数的步骤为：首先求第二个元素 i_2 与其前面的元素之间的逆序数 N_1，其次求第三个元素 i_3 与其前面的元素之间逆序数 N_2，…，最后求第 n 个元素 i_n 与其前面的元素之间的逆序数 N_{n-1}，N_1，…，N_{n-1}加起来就是这个排列的逆序数.

排列的逆序数还可以按以下步骤来求：先求第一个元素 i_1 与其后面的元素之间的逆序数，再求第二个元素 i_2 与其后面的元素之间逆序数，…，最后求第 $n-1$ 个元素 i_{n-1}与其后面的元素之间的逆序数，将这些逆序数加起来便是此排列的逆序数.

例 1.4 求排列 54321 的逆序数.

解 在此 5 级排列中，

4 的前面比 4 大的数有一个（5），构成一个逆序；

3 的前面比 3 大的数有两个（5 和 4），构成两个逆序；

2 的前面比 2 大的数有三个（5，4 和 3），构成三个逆序；

1 的前面比 1 大的数有四个（5，4，3 和 2），构成四个逆序；

所以这个排列的逆序数为 $1+2+3+4=10$，即 $t(54321)=10$.

定义 1.3 逆序数为奇数的排列为奇排列，逆序数为偶数的排列为偶排列.规定逆序数为零的排列为偶排列.

例 1.5 排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0，它是偶排列（此排列常叫自然排列）

解 排列 4235617 的逆序数为 7，它是奇排列.

例 1.6 问排列 $n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列，还是偶排列？

解 由于

$$t(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$是偶数，排列是偶排列；

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}$是奇数，排列是奇排列.

定义 1.4 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果互换两个数 i_s 和 i_t 的位置，其它的数位置不变，由此得到一个新的排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$. 这种变换称为一个对换，记为对换 (i_s, i_t).

例如，45312 经过一次对换后变成 54312.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性发生改变.

证明

(1) 先证明特殊情况，假设在某一个 n 级排列中，互换两个相邻数的位置，在互换前，这个 n 级排列为

$$\cdots p \quad q\cdots,$$

则互换两个相邻数 p，q 的位置后得到一个新的 n 级排列是

$$\cdots q \quad p\cdots,$$

由于互换前后，排列中除了 p，q 这两个数的顺序发生了改变以外，其它任意两个数的顺序都没有发生改变，因此，新排列比原排列增加（或减少）了一个逆序，那么原排列与新排列的奇偶性相反，即在一个排列中对换两个相邻的数的位置会改变该排列的奇偶性.

(2) 再证明一般情况，假设在某一个 n 级排列中，互换两个不相邻数的位置，设排列为

$$\cdots p \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k \quad q\cdots,$$

其中互换的两个数之间有 k 个数. 则互换 p，q 位置的过程可以理解为 p 经过分别与 a_1，a_2，…，a_k，q 的 $k+1$ 次相邻的对换后得到一个 n 级排列为

$$\cdots a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k \quad q \quad p\cdots,$$

然后 q 再经过 k 次相邻的对换后，得到一个新的 n 级排列是

$$\cdots q \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k \quad p\cdots.$$

由于原排列变成新排列经过了 $2k+1$ 次相邻的对换，因此对换后的排列改变了奇偶性.

综合上述两种情况，任意排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

例如，排列 45312 的逆序数为 $0+2+3+3=8$，该排列是偶排列. 设它经过一次对换后，变成的新排列为 54312，那么，这个新排列的逆序数为$1+2+3+3=9$，该排列是奇排列.

定理 1.2 在全体 $n(n>1)$ 级排列中，奇排列与偶排列各占一半.

请读者自己证明.

§1.3 n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式，首先用排列的概念来分析三阶行列式的特点．

考察三阶行列式及其数值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

可以看到三阶行列式具备以下几个特点：

（1）三阶行列式是所有位于不同行、不同列的三个元素的乘积的代数和，共有 $3!=6$ 项，且正项和负项的项数各为总项数的一半．

（2）在不考虑符号的情况下，三阶行列式每一项三个元素的行标按 1，2，3 自然序排列，而每一项三个元素的列标为 1，2，3 的一个三级排列．即三阶行列式的每一项都可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的形式，其中 $j_1j_2j_3$ 为 1，2，3 的一个三级排列．

（3）每项的正负号都取决于该项三个元素列标的排列．当列标排列为偶排列时，该项为正；当列标排列为奇排列时，该项为负．如 $a_{12}a_{23}a_{31}$，其列标排列为 231，逆序数为 2，是偶排列，则该项的符号为正．

由三阶行列式的以上几个特点，再结合排列的定义，三阶行列式还可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{t(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{1.8}$$

其中，$t(j_1j_2j_3)$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对列标的全部 6 种排列求和．

类似分析二阶行列式的结构，也能发现同样的规律．下面我们按照这种方式定义 n 阶行列式．

定义 1.5 由 n^2 个元素 a_{ij} 组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和．记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.9}$$

其中，$t(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，和式是对自然数 1，2，…，n 的所有可能的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 所对应的乘积项求代数和，若对应的乘积项列标构成的排列是偶排列则该乘积项取正号，若是奇排列，则该乘积项取负号．因为 n 个自然数 1，2，…，n 一共有 $n!$ 个不同的排列，因此和式中一共有 $n!$ 个乘积项．

在 n 阶行列式 D 中，横排称为行，纵排称为列．从左上角到右下角的对角线称为主对

角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线，主对角线上各元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为主对角元素．行列式有时简记为 $|a_{ij}|$.

与三阶行列式（1.8）式类似，n 阶行列式（1.9）式的特点为：

（1）n 阶行列式的总项数为 $n!$；

（2）每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

（3）将各项中的元素行标按自然数顺序排列后，若列标的排列为偶排列，则该项取正号；如果列标的排列为奇排列，该项取负号．

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

总共有 $4!=24$ 项．乘积 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项，其行标按自然顺序排列，列标排列为 1342，而 $t(1342)=2$ 为偶数，因此，该项取正号．$a_{31}a_{23}a_{14}a_{42}$ 是 D 中取自不同行、不同列的元素的乘积，将该项的行标按自然顺序排列后变成 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，由于列标排列为 4312，且 $t(4312)=5$ 为奇数，所以该项取负号．

从行列式的定义不难看出，如果一个行列式有一行（或一列）的元素全为零，那么在行列式的每一个乘积项中，必含有这个全为零的行（或列）的元素，从而每个乘积项都为零，因此该行列式的值必为零．

例 1.7 计算 n 阶下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在行列式展开的一般项 $(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中，有很多项为零，现考察有哪些项不为零．第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行，由于第一行中只有 a_{11} 不为零，故有 $j_1=1$，即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零；一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行，而第二行中只有 a_{21} 和 a_{22} 不为零，又元素 a_{11} 取自第一列，因此一般项中的第二个元素不能再取自第一列，所以一般项的第二个元素只能取 a_{22}，故有 $j_2=2$，即 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零，依此类推，一般项的列标 $j_3=3$，$j_4=4$，…，$j_n=n$，即 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一个乘积项不为零，所以

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{t(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可计算 n 阶上三角行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

主对角线以外的元素均为零的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为对角形行列式，显然，该行列式的值为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 1.8 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个上三角行列式，所以

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\times 5\times 8\times 10 = 400.$$

例 1.9 计算行列式

$$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix}$$

的值（未写出的元素全为零）.

解 $$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{t[n(n-1)\cdots 21]} 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\,.$$

由于数的乘积满足交换律，因此 n 阶行列式各项中 n 个元素的顺序是可以任意交换的，可以证明

定理 1.3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以写成

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列（证明略）.