

院士数学讲座专辑

张景中◎著

数学家的

眼光

——张景中院士献给中学生的礼物

[2007增补版]

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

数学家的 眼光

—— 张景中院士
献给中学生的礼物

[2007增补版]

张景中◎著


图书在版编目 (C I P) 数据

数学家的眼光:2007 增补版/张景中著.—北京:中国少年儿童出版社,2007.8(2007.12 重印)
(中国科普名家名作·院士数学讲座专辑)
ISBN 978-7-5007-8657-3

I. 数... II. 张... III. 数学—少年读物 IV.01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 076886 号

SHU XUE JIA DE YAN GUANG

 出版发行:中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

出版人:李学谦
执行出版人:赵恒峰

丛书策划:薛晓哲 著者:张景中
责任编辑:许碧娟 美术编辑:缪惟
责任校对:尤根兴 责任印务:金文涛

社址:北京市东四十二条 21 号 邮政编码:100708

总编室:010-64035735 传真:010-64012262

发行部:010-84037667 010-64032266-8269

h t t p : // www . ccppg . com . cn

E - m a i l : zbs @ ccppg . com . cn

印刷:河北新华印刷二厂 经销:新华书店

开本:880×1230 1/32 印张:7.5

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 12 月河北第 2 次印刷

印数:10051—25050 册

ISBN 978-7-5007-8657-3/O·91 定价:14.50 元

图书若有印装问题,请随时向印务部退换。

景中：

承寄大作小册，甚为欣赏。该书似当
译成英文，此间亦有友人可担任此项工作。
不知在放庵中否？

此书尚有他著否？可否代为收集，
连同另一本大作寄下。该价若干乞告，当请
南开友人汇正。劳神先谢。

祝暑好。

陳省身

SHUXUEJIADÉ
YANGUANG

SHUXUEJIADÉ
YANGUANG

YANGUANG

SHUXUEJIADÉ
YANGUANG

com

中国科普名家名作系列

(数学部分)

“华罗庚专辑”(华罗庚 著)《从孙子的神奇妙算谈起》(18.5元);《聪明在于勤奋 天才在于积累》(12.5元)。

“院士数学讲座专辑”(张景中 著)《数学家的眼光(2007增补版)》(14.5元);《从 $\sqrt{2}$ 谈起》(8.5元);《新概念几何》(14元);《帮你学数学》(9元);《数学与哲学》(9元);《漫话数学》(14元);《数学杂谈》(14元);《从数学教育到教育数学》(12元)。

“数学故事专辑”(李毓佩 著)《荒岛历险》(12元);《爱克斯探长》(10元);《奇妙的数王国》(11元)。

“名家精品集萃”《算得快》(刘后一著 9元);《数学花园漫游记》(马希文著 8元);《科学发现纵横谈》(王梓坤著 12元);《函数和极限的故事》(张远南著 15元);《概率和方程的故事》(张远南著 13元);《图形和逻辑的故事》(张远南著 15元)。

“趣味数学专辑”(谈祥柏 著)《数学营养菜》(9元);《登上智力快车》(8.5元);《故事中的数学》(12.5元);《好玩的数学》(14元)。

想了解本丛书更多信息,请登陆中国少年儿童新闻出版总社网站(www.ccppg.com.cn)点击“网上书店”——“科普读物”。

咨询电话:010-64003056

邮购地址:100708北京东四12条21号中国少儿出版社 薛晓哲

目 录

SHUXUEJIADYANGUANG

Content

数学家的世界

温故知新

三角形的内角和	1
了不起的密率	8
会说话的图形	16
从鸡兔同笼谈起	27
定位的奥妙	34

正反辉映

相同与不同	42
归纳与演绎	46
精确与误差	53
变化与不变	59

巧思妙解

椭圆上的蝴蝶	67
无穷远点在哪里	74
用圆规画线段	83
佩多的生锈圆规	89
自学青年的贡献	98

青出于蓝

圈子里的蚂蚁	110
--------------	-----

目 录

Content SHUXUEJIADUYANGUANG

三角形里一个点	114
大与奇	128
不动点	136

偏题正做

洗衣服的数学	145
叠砖问题	153
假如地球是空壳	160
地下高速列车	167

见微知著

珍珠与种子	175
抛物线的切线	179
无穷小是量的鬼魂?	186
极限概念: 严谨但是难懂	188
不用极限概念能定义导数吗?	192
导数新定义初试锋芒	198
轻松获取泰劳公式	208
成功后的反思	213
抛物线弓形的面积	219
微积分基本定理	223
不用极限定义定积分	227
微积分基本定理的天然证明	232

温故知新

三角形的内角和

美籍华人陈省身教授是当代举世闻名的数学家，他十分关心祖国数学科学的发展。人们称赞他是“中国青年数学学子的总教练”。

1980年，陈教授在北京大学的一次讲学中语惊四座：

“人们常说，三角形内角和等于 180° 。但是，这是不对的！”

大家愕然。怎么回事？三角形内角和是 180° ，这不是数学常识吗？

接着，这位老教授对大家的疑问作了精辟的解答：

说“三角形内角和为 180° ”不对，不是说这个事实不对，而是说这种看问题的方法不对，应当说“三角形外角和是 360° ”！

把眼光盯住内角，只能看到：

三角形内角和是 180° ；

四边形内角和是 360° ；

五边形内角和是 540° ；

.....

n 边形内角和是 $(n-2) \times 180^\circ$ 。

这就找到了一个计算内角和的公式。公式里出现了边数 n 。

如果看外角呢？

三角形的外角和是 360° ；

四边形的外角和是 360° ；

五边形的外角和是 360° ；

.....

任意 n 边形外角和都是 360° 。

这就把多种情形用一个十分简单的结论概括

起来了。用一个与 n 无关的常数代替了与 n 有关的公式，找到了更一般的规律。

设想一只蚂蚁在多边形的边界上绕圈子（图 1-1）。每经过一个顶点，它前进的方向就要改变一次，改变的角度恰好是这个顶点处的外角。爬了一圈，回到原处，方向和出发时一致了，角度改变量之和当然恰好是 360° 。

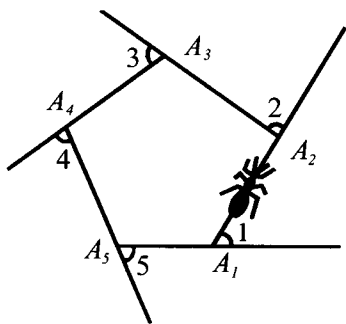


图 1-1

这样看问题，不但给“多边形外角和等于 360° ”这条普遍规律找到了直观上的解释，而且立刻把我们的眼光引向了更广阔的天地。

一条凸的闭曲线——卵形线，谈不上什么内

角和与外角和。可是蚂蚁在上面爬的时候，它的方向也在时时改变。它爬一圈，角度改变量之和仍是 360° （图 1-2）。

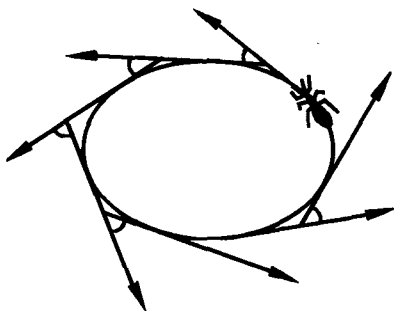


图 1-2

“外角和为 360° ”，这条规律适用于封闭曲

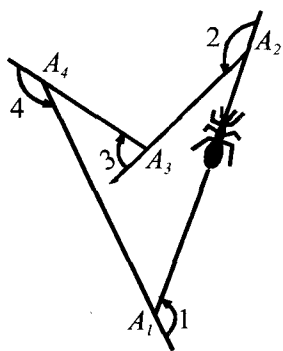


图 1-3

线！不过，叙述起来，要用“方向改变量之和”来代替“外角和”罢了。

对于凹多边形，就要把“方向改变量总和”改为“方向改变量的代数和”（图 1-3）。不妨约定：逆

时针旋转的角为正角，顺时针旋转的角为负角。当蚂蚁在图示的凹四边形的边界上爬行的时候，在 A_1 、 A_2 、 A_4 处，由方向的改变所成的角是正角： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 4$ ；而在 A_3 处，由方向的改变所成的角是负角： $\angle 3$ 。如果你细细计算一下，这 4 个角正负相抵，代数和恰是 360° 。

上面说的都是平面上的情形，曲面上的情形又是怎样呢？地球是圆的。如果你沿着赤道一直向前走，可以绕地球一圈回到原地。但在地面上测量你前进的方向，却是任何时刻都没有变化。也就是说：你绕赤道一周，方向改变量总和是 0° ！

圈子小一点，你在房间里走一圈，方向改变量看来仍是 360° 。

不大不小的圈子又怎么样呢？如果让蚂蚁沿着地球仪上的北回归线绕一圈，它自己感到的（也就是在地球仪表面上测量到的）方向的改变量应当是多少呢？

用一个圆锥面罩着北极，使圆锥面与地球仪表面相切的点的轨迹恰好是北回归线（图 1-4）。这样，蚂蚁在球面上的方向的改变量和在锥面上方向的改变量是一样的。把锥面展开成扇形，便可以看出，蚂蚁绕一圈，方向改变量的总和，正好等于这个扇形的圆心角（图 1-5）：

$$\theta = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{2\pi r}{l} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{2\pi l \sin 23.5^\circ}{l}$$

$$\approx 143.5^\circ \left(\text{圆锥侧面展开成扇形的圆心角 } \theta = \frac{2\pi r}{l} \right)$$

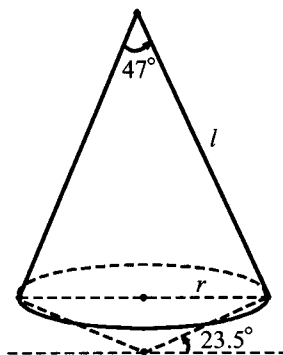


图 1-4

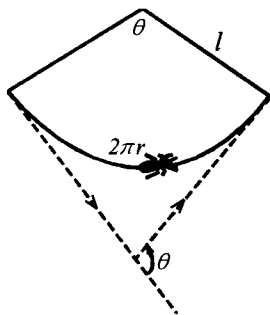


图 1-5

要弄清这里的奥妙，不妨看看蚂蚁在金字塔上沿正方形爬一周的情形（图 1-6）。它的方向在拐角

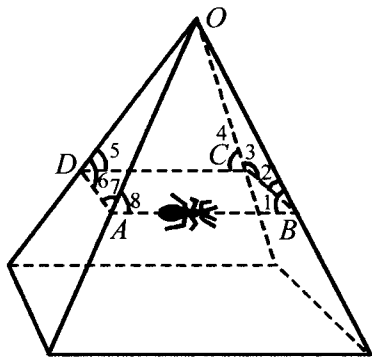


图 1-6

处改变了多大角度？把金字塔表面摊平了一看便知：在 B 处改变量是 $180^\circ - (\angle 1 + \angle 2)$ ；绕一圈，改变量是

$$\begin{aligned} & 4 \times 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 \\ & \quad + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8) \\ & = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA \end{aligned}$$

这个和，正是锥面展开后的“扇形角”（图 1-7）！

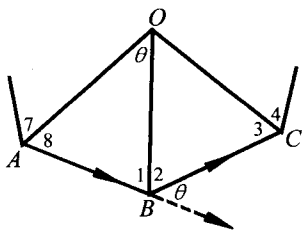


图 1-7

早在 2000 多年前，欧几里德时代，人们就已经知道三角形内角和是 180° 。到了 19 世纪，德国数学家、被称为“数学之王”的高斯，在对大地测量的研究中，找到了球面上由大圆弧构成的三角形内角和的公式。又经过几代数学家的努力，直到 1944 年，陈省身教授找到了一般曲面上封闭曲线方向改变量总和的公式（高斯—比内—陈公式），把几何学引入了新的天地。由此发展出来的“陈氏类”理论，被誉为划时代的贡献，在理论物理学上有重要的应用。

从普通的、众所周知的事实出发，步步深入、推广，挖掘出广泛适用的深刻规律。从这里显示出数学家透彻、犀利的目光，也表现了数学家穷追不舍、孜孜以求的探索真理的精神。

了不起的密率

提起中国古代的数学成就，都会想起南北朝时期的祖冲之。提起祖冲之，大家最熟悉的是他在计算圆

周率 π 方面的杰出贡献，他推算出：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

他是世界上第一个把 π 值准确计算到小数点后第七位的人。

祖冲之还提出用 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的近似分数。人们早一些时候已经知道 π 的一个近似分数是 $\frac{22}{7}$ ，但误差较大。祖冲之把 $\frac{22}{7}$ 叫“约率”，把 $\frac{355}{113}$ 叫“密率”。 $\frac{355}{113}$ 传到了日本，日本人把它叫“祖率”。

很多人都知道用 $\frac{355}{113}$ 表示 π 的近似值是一项了不起的贡献。但是，它的妙处，却有不少人说不出，或者说不全。

首先，它相当精确：

$$\frac{355}{113} = 3.14159292035\dots$$

而

$$\pi = 3.1415926535897\dots$$