

当代西方教师教育译丛

如何培养学生的数感

Teaching Number Sense

[英]朱莉娅·安吉莱瑞
(Julia Anghileri)

著

徐文彬 译



北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

当代西方教师教育译丛

如何培养学生的数感

Teaching Number Sense

[英]朱莉娅·安吉莱瑞 著
(Julia Anghileri)

徐文彬 译



北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

版权声明

本书中文简体版由英国 Continuum International Publishing Group 授权北京师范大学出版社在中国境内独家出版发行。版权所有,翻印必究!

本书英文版由 Continuum International Publishing Group 2000 年出版。

Chinese simplified language edition published by Beijing Normal University Press, Copyright ©2006, Beijing Normal University Press.

Authorized translation from the English language edition, entitled Teaching Number Sense by Julia Anghileri, published by Continuum International Publishing Group, copyright ©2000 by Continuum International Publishing Group.

All rights reserved. No part of this book may be or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Continuum International Publishing Group.

图书在版编目(CIP)数据

如何培养学生的数感 / (英)安吉莱瑞(Anghileri, J.)著;徐文彬译. —北京:北京师范大学出版社, 2007. 4

(当代西方教师教育译丛)

ISBN 978-7-303-08358-9

I. 如... II. ①安... ②徐... III. 数学课—教学法—小学
IV. G623. 502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 150322 号

北京市版权局著作权合同登记图字:01 - 2007 - 1125 号

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn

北京新街口外大街 19 号

邮政编码:100875

出版人:赖德胜

印刷:北京新丰印刷厂

经销:全国新华书店

开本:170 mm×230 mm

印张:9.5

字数:128 千字

印数:1~5 000

版次:2007 年 4 月第 1 版

印次:2007 年 4 月第 1 次印刷

定价:17.00 元

责任编辑:李丽 美术编辑:贾刚

责任校对:张春燕 责任印制:董本刚

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话:010-58800697

本书如有印装质量问题,请与出版部联系调换。

出版部电话:010-58800825

谨以此书献给

埃莉和埃维

目 录

第一章 数感的形成

- 1 / 数感和学校课程
- 2 / 数感的开始
- 3 / 数感教学的目标
- 4 / 数感是怎样形成的
- 6 / 理解的重要意义
- 7 / 培养心理意象
- 11 / 开发课堂教学资源
- 12 / 解决问题或探索结构
- 13 / 数学教学的目的

第二章 计数和认识数字

- 16 / 数字的基数和序数形式
- 16 / 计数对于解释数字的重要意义
- 17 / 学习计数
- 19 / 阶段和过程
- 25 / 培养计数技能
- 26 / 介绍开发心理意象的教学资源
- 27 / 培养计数的灵活性

第三章 走近符号系统

- 32 / 数字符号
- 36 / 寻找模式
- 38 / 运算符号
- 40 / 培养孩子们对数字的“感觉”

第四章 加法和减法

- 44 / 语言的形式化

- 44 / 加、减法与计数的联系
- 46 / “加2”的级数
- 47 / 加法计数策略中的级数
- 48 / 数字事实
- 49 / 减法计数策略中的级数
- 51 / 加、减法的关联
- 52 / 问题转换与联系生成
- 53 / 加、减法的书面记录形式
- 54 / 阅读符号
- 56 / 运用“数字组块”进行计算
- 59 / 两个两位数的加、减心算法
- 61 / 错误分析

第五章 乘法和除法

- 65 / 早期经验
- 66 / 数字模式和逆运算
- 67 / 余数
- 67 / 学习计数模式
- 68 / 意义的多样性
- 69 / 介绍乘法符号
- 70 / 交换律
- 71 / 介绍除法符号
- 72 / 强化三重数组的重要意义
- 73 / 学习数字事实
- 75 / 把乘法和除法扩展到10的倍数和10的乘方
- 75 / 逐步发展孩子们对乘法的理解
- 77 / 乘以较大数字的心算策略
- 79 / 乘法表之外的除法运算
- 80 / 除数是两位数的除法
- 80 / 非正式方法和“混乱”的运算方法

第六章 笔算

- 84 / 孩子们的直观方法
- 85 / 从非正规到正规的笔算方法

- 85 / 书面记录的发展阶段
- 87 / 加、减法的笔算方法
- 88 / 顺序法
- 89 / 十分法
- 92 / 使用积木来模拟运算
- 94 / 乘、除法的笔算方法
- 95 / 两位数的乘法
- 97 / 两位数和三位数的乘法
- 98 / 建立联系
- 99 / 多位数除以一位数的除法
- 100 / 除数是两位数的除法
- 102 / 算法附言

第七章 小数、分数和百分数

- 106 / 百分数入门
- 107 / 形成小数概念
- 107 / 乘以10和除以10
- 108 / 小数的运算
- 109 / 小数的乘法和除法
- 110 / 介绍分数
- 110 / 数轴上分数的位置
- 113 / 分数的计算
- 114 / 分数的乘法
- 116 / 分数的除法
- 118 / 分数或小数的运算
- 118 / 应用技术

第八章 教学方法

- 121 / 在情境中进行数字运算
- 123 / 根据入学时孩子们的已有水平进行教学
- 124 / 作为听众的教师
- 126 / 作为社会活动的数字运算教学
- 127 / 辨认和消除误解
- 128 / 有效教学方法的特征

- 130/ 心算策略的教学
131/ 使用计算器激励并提升孩子们的能力
133/ 走进新一代的数学思想家

参考文献

译者后记

第一章 数感的形成

每个教师在教学中都可能会遇到这种情况，即有些孩子不能准确地解决一些简单的算术题目。每当此时，教师就会感到很沮丧。事实上，不管是教师还是学生，无论他们付出多大的努力，在教师教授算术符号时，总会有学生对此感到困惑和迷茫。比如，在计算“ $? - 4 = 9$ ”和“ $100 \div 25 = ?$ ”这类题目时，年龄大一些的学生很可能会竭尽全力去寻找合适的计算程序来解决问题，而不会去努力找出题目中数字的相关联系。但是，有些孩子则能应用自己掌握的数字事实来解决问题。所以，教师不仅要努力让孩子们学会灵活熟练地运用数字，而且要让他们意识到，了解数字之间的关联有助于他们根据已知的计算结果来理解新的问题。我们把孩子们具有的这种对数字之间关联的意识以及灵活地解决数字问题的能力称为其对数字的“感觉”或“数感”。孩子们具有“数感”的典型特征是他们能对所遇到的数字模式和计算过程做出归纳，并能把新知识和已有知识相联系。在数感的形成过程中，怎样教会孩子们认识并理解其中的数字关联是本书关注的焦点，在此也会着重讨论在学习过程中孩子们所要学习的主要内容。

数感和学校课程

过去，“算术”意味着乘法表和四则运算（就是在笔算过程中涉及的

加、减、乘、除的简便计算方法)。随着时间的推移,“算术”的意义已经被简化为不需要深层次理解的标准算术运算。目前,人们普遍认为,在学习过程中对所教的计算程序进行反复的“演算和练习”,并不能帮助孩子们为今后在科技高度发达的社会中的生活做好准备,现在的教学方法应该对如何能体现出逻辑结构中潜在的数字和数字运算之间关系的教学给予更多重视。教师要鼓励孩子们进行心算、观察数字模式、预测计算结果,并讨论其中存在的数字联系,而不是仅仅教他们如何进行笔算。

数学课程改革已经把标准计算程序的教学转变为让孩子们学会辨别数字模式和数字关系,并在两者之间生成联系的教学。只有这样,孩子们才能形成对数字的洞察力,并对数字产生“感觉”。科克罗夫特报告用“数字的熟悉感”一词来形容“有计算能力的成年人”所必需的特征之一(Cockcroft, 1982)。最近,英国小学(1~6 年级)数学教学方案(DfEE, 1999)使用“计算能力”来区分“孩子们对数字的精通程度,它涉及理解数字系统中数字的信息和能力、大量的计算技巧以及在不同情境下解决数字问题的倾向和能力”(DfEE, 1998)。“计算能力”的培养不仅需要教孩子们笔算的方法,还要教他们综合应用心算和预测结果的方法,从而得到正确的计算结果。对于如何“选择”合适的计算策略、反思并解释计算的过程和结果而言,口算在其中所起的作用越来越大。

课程改革在全球范围内已全面展开,并且以美国学校数学课程与评估标准(NCTM, 1989)和全澳学校声明(AEC, 1991)最为典型,它们都把培养学生形成“数感”作为学校课程教学的主要目标。当前,“数感”这一名词在课程改革文件中俯拾即是,它指的是计算策略中的“灵活性”和“创造性”,反对过分强调没有思维的计算程序。培养学生的“数感”不仅要培养他们的数学理解力,也要培养他们积极的学习态度和信心,而这些正是现有数学课程教学所欠缺的。

数感的开始

最初,孩子们通过观察、倾听和抄写数字等方法学习相互独立的数字知识。事实上,从一开始,教师就应该鼓励孩子们辨别数字应用的不

同方法以及数字应用间的关系。比如数字 6，它既是与六个物体的总数相联系的数字，也是 5 之后 7 之前的数字，又可以被看成是“ $2+2+2$ ”“ $4+2$ ”以及“ $3+3$ ”的模式。随着孩子们对单个数字的体验逐步加深，他们能逐渐地意识到每个数字是怎样和其他众多数字联系起来的。

早期对数字运算的体验也为孩子们提供了许多数字结构间的重要联系，这些重要联系有助于孩子们加深对数字的理解。例如，当把一个物体加入到一个集合中时，它并不意味着需要重新数整个集合内的物体才能得出集合内物体的总数，因为计数顺序中后面的数字就是新集合内物体的数量。同样，从集合中拿出一个物体时，计数顺序中前面的一个数字就是集合内物体的数量。通过这种方式，可以让孩子们了解到加法、减法以及计数之间是相互联系的，而这些联系正是形成有效计算策略的基础，这一点会在以后的章节中继续讨论。

数感是高度个性化的产物，它不仅和孩子们已有的数字概念相联系，也和怎样形成这些概念相联系。数感所培养的思维方式能让孩子们迅速地辨别出数字之间的重要联系，如可以认识到“ $32 \div 16$ ”比“ $32 \div 17$ ”要简单，或者认识到要从 38 开始数，可以迅速地计算出“ $47 - 38$ ”的结果。数感也是一种用数字和运算法则进行灵活计算的能力，如教师要让孩子们知道“48”不仅是“ $40 + 8$ ”，也是“ $50 - 2$ ”和“24 的 2 倍”；“ $8 \times \frac{1}{4}$ ”不仅是“8 个 $\frac{1}{4}$ ”，也是“ $8 \div 4$ ”。数字之间相互联系的方式、不同的可能表达形式及其与不同运算相联系的意义，所有这些在孩子们建立起数字与计算之间的联系中都起着至关重要的作用，而数字与计算之间的联系又恰巧对他们数感的形成有重要影响。

数感教学的目标

21 世纪的生活所必需的技能和理解力之一就是对数字模式和数字关系的辨认，这些模式和关系是对数字进行有效运算的重点。我们期待着孩子们会主动地将现实生活中遇到的问题和恰当的数字呈现之间形成联系，并且期待他们能够灵活巧妙地找到合适的解题方法。

数感……体现的是应用数字和量化方法作为交流、加工、解释信息的倾向和能力。它使人们意识到数学是有某种规律的。
(Mcintosh 等, 1992)

目前, 我们已经开发出了新的评价体系来满足社会不断发展变化的需求, 新的评价体系不再是具有固定模式的数字运算, 而且这些运算也不需要标准的笔算程序。我们期望学生能够从图形和表格中获取信息, 计算空缺的数字, 并且研究数字模式。根据这些数字模式, 孩子们能够提出合适并有助于他们辨别数字关系的问题。我们也期望孩子们能选择最合适的计算程序, 包括决定是否需要使用计算器等。这些新颖的教学观点标志着数学教学的新开端。因此, 就目前而言, 仅仅教给孩子们相互独立的计算程序已经远远不够, 教会他们如何找出数字之间的联系则成为数学教学的当务之急。



数感是怎样形成的

从一开始接触数字, 孩子们就已经在寻找数字之间的联系, 这些联系能培养他们思维的灵活性, 而这种灵活性正是形成数感的特征。通过计数中的数字模式, 孩子们形成了某些数字之间的联系。在后面的章节中, 会具体说明如何教孩子们计数是学会计算的重要准备这一问题。这里的“计数”并不仅仅指孩子们最早体验到的“单元”计数, 还包括以 2, 5, 10, 100 为间隔的计数, 这些计数可以从任一数字开始, 可以往前数也可以往后数。当这些数字模式和算术运算相联系的时候, 这些数字模式便能促使孩子们找到有效的计算策略。

我们可以帮助孩子们在计算之间、在计算和问题中出现的特殊数字之间建立联系。读者可以花一些时间做以下三道计算题: $25+26$, $39+17$ 和 $12+35$, 根据相关的计算结果和数字联系, 每个题目都可以应用不同的计算策略。根据“已知事实” $25+25=50$, 可以迅速地推算出第一题的结果。第二题可以转化成 $40+16=56$, 而第三题很有可能要用到“拆

分”数字的方法，以找到 $10+30+2+5$ 的数字组合，或者找出某个相似的数字组合。由此可见，应用标准的计算程序可能没有根据数感选择适当的计算策略有效。

数感指的是一个人对数字和运算的一般理解力，以及灵活应用这种理解力的倾向和能力，用这种方式可以做出明智的数学判断，并开发出应用数字和运算法则的有效策略。(Mcintosh 等，1992)

根据麦金托什等人(Mcintosh 等，1992)的分析，数感主要在三个领域起重要作用：

- 数字知识和数字的简便性——数字的顺序感；多样化的数字呈现形式；数字相对和绝对数量的判断；思考数字的基准参考体系。

- 运算知识和运算的简便性——理解运算结果；意识到所应用的规则；运算之间的关系。

- 把数字、运算的知识及其简便性应用到需要用数字进行推理的问题中——理解问题情境和合适的解题策略之间的关系；意识到存在多样化的数字呈现方式；应用有效的数字表征形式和/或方法的倾向；检验数据和结果的倾向。

数字知识涉及孩子们所要理解的数字系统的结构和规则，即从理解整数扩展到理解有理数(有理数可以用分数和小数来表示)，以及理解这些数字系统相互联系的方式。运算的简便性就是掌握运算之间的联系，如两倍和乘以2的意义是一样的。它包括让孩子们理解什么时候可以应用某些规则 and 知识，如在加法和乘法中，数字的位置是可以交换的，这样 $8+3$ 就等同于 $3+8$ ， 8×3 就等同于 3×8 。另一方面，对于减法和除法来说，交换数字的位置就意味着要用不同的解题方法进行不同的计算。应用数字知识必须让孩子们理解在问题解决过程中需要应用何种运算，以及何时适合取近似值，并且要根据原始问题来理解计算的过程和结果。

在运算时，有些数字关系是重要的数字运算组块，可以把这些关系

看成是计算的“基准”，如构成 10 的数字组合，或者是 0.5 ， $\frac{1}{2}$ ， 50% 之间的等值关系。当出现新的计算问题时，不管它是以文字还是以符号的形式出现，有效的解题策略首先是仔细思考数字，辨别这些数字和已知数字事实或数字联系之间的关系。随着孩子们对已知数字事实及其之间的相互关系理解的加深，他们的数感也会进一步发展。但是，如何让缺乏经验的孩子知道哪些事实是重要的和必须了解的，而哪些事实是很容易就能够从其他已知事实中推断出来的，对这些问题的判断将会因人而异。这时，孩子们的数学能力会逐渐地出现明显差异。在数学能力中被称为“七年间隔”的现象变得日益突出，一些小学高年级 11 岁的孩子表现出的数学能力并不比 7 岁的孩子的平均能力强，而其他一些 11 岁的孩子则表现出了 14 岁孩子的平均能力(Cockcroft, 1982)。这就表明在数学教学中使用的“学习迟钝者”这一说法是不恰当的，因为这些学习困难的孩子通常是因为辨别不出数字之间的相互关系才导致他们最终不得不学习更多的、相互独立的计算程序(Gray& Tall, 1994)。这里涉及的孩子是指那些不能辨别出加法、减法和计数之间关系的孩子们，而掌握这三种各不相关的计算过程的孩子们也是如此。从较小的数字开始往前计数可以进行减法运算是早期计算中的“基准”之一。

理解的重要意义

“理解数字和形成计算方法之间的关系”成为孩子们学习的焦点，它取代了传统课程所要求的“四则运算”。尽管得到的数字结果通常与过去一样，但是现在的学习过程需要孩子们自己建构计算方法。教师的指导则有助于孩子们在理解的同时提高计算效率(Mathematics in the National Curriculum, DFE, 1995)。许多著名心理学家的任务就是引导教师认识到有必要让学生积极参与自己的教学活动，并把注意力集中在培养学生的数学思维，而不是要求他们记忆大量的数字和解题程序。这一点明显体现在教学重点的转变上，即从过去典型的、大量的、标准计算程序的“演算和练习”转变到应用数学上来，让孩子们用数学的方法进行交流，并培养他们的数学推理能力。在学习过程中，孩子们不再是知识的“被

动”接受者。通过讨论自己的解题策略和理解他人所使用的策略，他们开始“积极”地建构自己的数学知识。教师向孩子们解释他们要做什么以及评价他们的解题策略是否合理，将有助于他们形成数学推理能力以及准确表达的技能，所有这些对孩子们各方面的学习都有很大帮助。教学上的这些进步，即把理解性学习作为中心要求，体现了心理学家和研究者的共识，即如何帮助孩子们最有效地学习数学。

教学的主要目标是让孩子们学会理解性学习，但是，我们很难定义理解性学习。目前，已经有两种关于数学的不同理解类型。我们把学生回忆已经学过的计算程序这种理解类型称为“机械性理解”，并把它和“关系性理解”相比较。“关系性理解”是指从知道怎样应用这些知识进行计算扩展到理解为什么这个计算程序有效(Skemp, 1976)。虽然过去的数字运算通常和枯燥的、标准程序的重复练习相联系，但是，数学教学方面的最新趋势则转变为采用研究性教学方法和创设尊重个人思维的课堂环境。“关系性理解”从不要求学习者接受，而是要求他们尝试形成自己独特的理解。斯根普(Skemp)指出，“关系性知识本身就是教学的目标，因为如果孩子们能够从关系性理解中得到满足，他们也许会努力地从关系性角度理解呈现给他们的新知识，也会积极主动地寻求新知识，探索新领域……这就使得教师在工作中被要求完成的‘培养学生主动性’的任务变得更加容易”(Skemp, 1976)。

培养心理意象

孩子们对数学的理解是一个循序渐进的过程，即从实际体验数字的活动发展到讨论这些数字体验的活动，从最初用非正式语言对其进行讨论发展到后来的用更多的正式语言进行讨论。之后，他们才开始学习使用数学符号，这些符号体现了数学理性讨论的简洁性和精确性特征。正如在学校待过一段时间，孩子们可以把语言转换成书面形式一样，语言学习也出现了操作性控制和拼写的复杂性。所以，在数学学习过程中，从应用具体经验转变到应用心算方法和符号表征进行计算是需要时间的。

具体经验→抽象/心算方法→符号化关系

从应用具体经验、分类并重新排列不同的物体集合开始，我们可以向孩子们介绍与数字相对应的数字模式。例如，对于数字“3”，我们可以用3颗纽扣、3个玩具或者3级台阶的组合来呈现，但是“3”本身就是这些情境所共有的抽象实质。讨论孩子们的实际经验有助于他们认识到将数字与日常生活中常见的视觉图形相联系的重要性，这些视觉图形为他们心理意象的形成打下了坚实的基础。

教师也可以用计数模式和数字符号来培养孩子们的心理意象。有些时候，对孩子们来说，计数模式以书面形式呈现要比以口语化形式呈现更为清晰易懂。举例来说，从13开始数，然后每次加10，最后形成的计数模式是“13, 23, 33, 43, 53, 63……”，这里，计数模式中“1, 2, 3……”出现在每个数字的首位，之后是“93, 103, 113……”，此时，通过语言描述所使用的与大的数字相对应的词不太可能表明这种计数模式持续变化的趋势，而用书面形式呈现出来的计数模式则能够使孩子们更清楚地观察到这一趋势，并建立不同的与之相联系的视觉图形，这些都有助于孩子们认识到存在于这些数字之间的关系。

在用抽象数字进行运算之前，可以先让孩子们学习用手指或某些工具来代替实物然后“模仿”具体计算的情境。课堂上，教师可以用珠子或立方体来模仿这些情境。因为这些珠子或立方体能够连接在一起，教师也可以用珠子或立方体等来表示数字。有的时候，人们会更偏爱用立方体，因为立方体不仅可以用来模拟不同的数字，而且在“单位10”和“单位1”中，也可以用来表示数字系统的位值结构（参见图1.1a）。另一种数字呈现模式和计数顺序联系更为紧密，这种呈现模式需要把珠子连接成“珠架”或“珠链”（参见图1.1b）。作为另一种早期数字运算的重点，本书各章节都会出现“位值”和“计数”这两个概念，每一种运算都和不同计算方法的发展相联系。

对孩子们来说，用哪些材料模拟数字并不重要，重要的是要培养他们把数字与视觉材料相联系的心理意象，并且能根据“想像”的情境来解决问题。研究表明，用实物进行运算和用数字进行抽象运算之间存在着一个重要的过渡阶段，这个阶段就是要孩子们通过想像的物体来运算

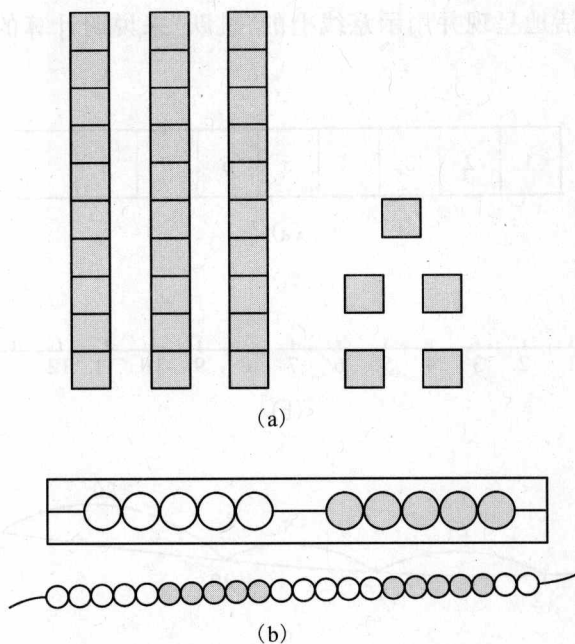


图 1.1 (a)用立方体来表示“单位 10”和“单位 1”
(b)珠架和珠链

(Hughes, 1986)。尽管有些孩子能很自然地学会应用心理意象进行计算，但是其他孩子也许必须要经过某一过渡阶段，在这个过渡阶段中，教师可以覆盖也可以隐藏这些教学材料，以鼓励孩子们在脑海中想像这些物体从而进行计算。

课堂教学资源不仅为呈现个别数字，而且也为说明数字在逻辑结构中的联系方式提供了丰富的图形。通过对各种数轴进行观察，我们会发现数轴上的数字有其严格的顺序，它们模仿的就是计数的顺序。最初，我们可以用珠链上相连的珠子，或者用排列成一直线的立方体，用数字轨道来表示数轴(参见图 1.2a)。在这个阶段，每个物体代表计数顺序中的一个数字，然后，可以让孩子们把数字标签贴到每个物体的区间上，这样数字 12 就可以和数轴上 12 个完整的部分联系起来(参见图 1.2b)。数轴在尺子、天平上随处可见，并且应用测量工具的经验有助于强化孩子们对标准的理解。教师也可以用示意线(empty number line)来模拟心算，在示意线上保留数字呈现的顺序但不标出区间。没有固定的区间，