快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

高等数学
习题精解精练

（配同济大学第五版教材·高教版）

主　编　沈　艳

● 课后习题 精析 精解
● 同步训练 勤学 勤练

XITI
JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

快乐大本·优秀教材辅导

KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

高等数学
习题精解精练

（配同济大学第五版教材·高教版）

主　编 沈　艳
副主编 贾念念 邱　威 樊赵兵
主　审 陈林珠

XITI
JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第五版)教材而编写的辅导书。本书按教材的章节顺序编排,每章包括书后习题解析和同步训练题及答案两部分内容,旨在帮助学生熟练掌握解题的基本方法和技巧,巩固所学的知识,开阔视野。

本书可作为高等学校学生学习高等数学的辅导书,也可供教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题精解精练/沈艳主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.4

ISBN 978-7-81073-976-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.沈…　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第046901号

出版发行　哈尔滨工程大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码　150001
发行电话　0451-82519328
传　　真　0451-82519699
经　　销　新华书店
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×1 092mm　1/16
印　　张　18.75
字　　数　290千字
版　　次　2007年4月第1版
印　　次　2007年4月第1次印刷
定　　价　20.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

高等数学是高等院校理工科各专业的一门基础课。处于新世纪高等教育改革发展的大环境下，各高校基于增强素质教育的考虑，逐渐压缩高等数学的课内教学课时，给高等数学初学者带来了不便，无形中增加了他们的学习难度。与此同时，自 2003 年以来，全国硕士研究生入学考试中，高等数学的总分由以前的 100 分提高到现在的 150 分，更加体现了高等数学在硕士研究生入学考试中的举足轻重的地位。为了帮助初学者的理解和消化，也为了帮助考研学生对高等数学知识的系统把握，我们编写了这本辅导教材。

本书中各章由书后习题解析、同步训练题及答案两部分组成。书后习题解析给出了《高等数学》(第五版)教材课后习题的详细解答，同步训练中的习题用来检验读者对该章基本知识和基本技能的掌握。

本书由樊赵兵(第 1,7,8 章)、贾念念(第 2,9,10 章)、邱威(第 3,11,12 章)、沈艳(第 4,5,6 章)编写。全书由沈艳统稿，哈尔滨工程大学理学院陈林珠教授主审了全书。

在本书的编写过程中，我们得到了哈尔滨工程大学理学院数学系领导和广大教师的鼓励和协助，同时得到校有关部门的帮助，在此一并表示感谢。

由于水平有限，书中难免有不妥之处，恳切希望广大读者批评指正。

编　者

2007 年 3 月

目　录

第1章　函数与极限

书后习题解析

习题1－1

1.设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$,$B=[-10,3)$,写出 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式.

解
$$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$$
$$A\setminus B=A\cap B^C=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$$
$$A\cap B=[-10,-5)$$
$$A\setminus(A\setminus B)=A\cap(A\cap B^C)^C=A\cap(A^C\cup B)=[-10,-5)$$

2.设 A、B、C 是任意三个集合,证明对偶律:$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明　$\forall x\in(A\cap B)^C$,则 $x\notin A\cap B$,有
$$x\notin A\Rightarrow x\in A^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$$
$$x\notin B\Rightarrow x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$$
即 $(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$.反之可得 $A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$.

综上所述,得 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3.设映射 $f:X\to Y$,$A\subset X$,$B\subset X$,证明:

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;　　(2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明　(1)$\forall x\in A\cup B$,有 $x\in A$ 或 $x\in B$,则 $f(x)\in f(A)$ 或 $f(x)\in f(B)$,则 $f(x)\in f(A)\cup f(B)$,即 $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$;反之,$\forall y\in f(A)\cup f(B)$,有 $y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$,则 $x\in A$ 或 $x\in B$.

于是有 $x\in A\cup B$,使得 $f(x)=y$,则 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

综上所述,得 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.同理可证(2).

4.设映射 $f:X\to Y$,若存在一个映射 $g:Y\to X$,使 $g\circ f=I_X$、$f\circ g=I_Y$,其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射,即对于每一个 $x\in X$,有 $I_Xx=x$;对于每一个 $y\in Y$,有 $I_Yy=y$.证明:f 是双射,且 g 是 f 的逆映射:$g=f^{-1}$.

证明　$\forall x_1$、$x_2\in X$,且 $x_1\neq x_2$ 有 $f(x_1)$、$f(x_2)\in Y$.由于 $g\circ f=I_X$,则 $\forall x_1$、$x_2\in X$,由 $g(f(x_1))=x_1\neq x_2=g(f(x_2))$,即 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则 f 是单射.

$\forall y\in Y$,有 $g(y)\in X$,且 $f(g(y))=y$,则 $\exists x=g(y)\in X$,使得 $f(x)=y$,则 f 是满射.

综上所述,f 既是单射又是满射,则 f 是双射.

令 $Y=\mathbf{R}_X$,则 g 是 $\mathbf{R}_X\to X$ 的映射,对于每个 $y\in\mathbf{R}_X$,有 $g(y)=x$.则
$$f(x)=f(g(y))=I_Yy=y$$
故 g 是 f 的逆映射.

5.设映射 $f:X\to Y$,$A\subset X$.记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$,证明:

(1)$f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2)当 f 是单射时,有 $f^{-1}(f(A))=A$.

证明　(1)$\forall x\in A$,令 $y=f(x)\in f(A)$,有 $f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))=x$,则 $A\subset f^{-1}(f(A))$.

(2)对于 $\forall x\in f^{-1}(f(A))$,$\exists y\in f(A)$,使得 $f^{-1}(y)=x$,即 $y=f(x)$.

由于 $y\in f(A)$,则 $\exists x'\in A$ 使得 $f(x')=y$,又因为 f 是单射,所以 $x'=x$,$x\in A$.则 $f^{-1}(f(A))=A$.

6.求下列函数的自然定义域.

(1)$y=\sqrt{3x+2}$;　　(2)$y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(4)$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5)$y=\sin\sqrt{x}$;　　(6)$y=\tan(x+1)$;

(7)$y=\arcsin(x-3)$;　　(8)$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

(9)$y=\ln(x+1)$;　　(10)$y=e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1)$3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$;

(2)$1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$;

(3)$\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-1,0)\cap(0,1]$;

(4)$4-x^2>0\Rightarrow x\in(-2,2)$;

(5)$x\geqslant 0$;

(6)$x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,k=0,1,2,\cdots$;

(7)$|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$;

(8)$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\x\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,3]$;

(9)$x+1>0\Rightarrow x>-1$;

(10)$x\neq 0$.

7.下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$;

(2)$f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4)$f(x)=1,g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解　(1)不相同.因为 $\lg x^2$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;而 $2\lg x$ 的定义域是$(0,+\infty)$.

(2)不相同.因为$f(x)=x$的值域为$\mathbf{R}$;而$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$的值域为非负实数$[0,+\infty)$,即它们的对应规则不相同.

(3)相同.因为$\sqrt[3]{x^4-x^3}$与$x\sqrt[3]{x-1}$的定义域都是$\mathbf{R}$且与对应规则都相同.

(4)不相同.因为 $g(x)=\begin{cases}1 & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,1,\cdots\\ \text{不存在} & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,1,\cdots\end{cases}$,所以$f(x)\neq g(x)$.

8.设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$,求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$;$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;$\varphi(-2)=0$.
$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

9.试证下列函数在指定区间内的单调性.

(1)$y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1)$;

(2)$y = x + \ln x, (0, +\infty)$.

证明 (1)$\forall x_1、x_2 \in (-\infty, 1)$,且 $x_1 < x_2$,则

$$\frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1(1-x_2) - x_2(1-x_1)}{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0$$

即$\frac{x_1}{1-x_1} < \frac{x_2}{1-x_2}$,故 y 是单调增函数.

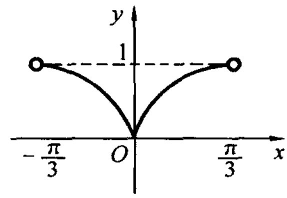

图 1-1

(2)$\forall x_1、x_2 \in (0, +\infty)$,且 $x_1 < x_2$,则

$$x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2 = x_1 - x_2 + \ln \frac{x_1}{x_2}$$

因为 $x_1 - x_2 < 0, 0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$,所以 $\ln \frac{x_1}{x_2} < 0, x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2$,故 y 是单调增函数.

10.设$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

证明 $\forall x_1、x_2 \in (-l, 0)$,且 $x_1 < x_2$,则 $-x_1、-x_2 \in (0,l)$,且 $-x_2 < -x_1$.由于$f(x)$在$(-l,l)$内是奇函数,且在$(0,l)$内单调增加,则$f(-x_2) - f(-x_1) = -f(x_2) + f(x_1) < 0$,从而$f(x_1) < f(x_2)$,所以$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

11.设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的.证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明略(应用奇函数、偶函数的定义).

12.下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1)$y = x^2(1-x^2)$; (2)$y = 3x^2 - x^3$; (3)$y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4)$y = x(x-1)(x+1)$; (5)$y = \sin x - \cos x + 1$; (6)$y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$.

解 (1)、(3)、(6) 是偶函数是容易验证的;(2) 与(5) 经验证既非奇函数又非偶函数;(4) 是奇函数,因为 $f(-x) = -x(-x-1)(-x+1) = -x(x+1)(x-1) = -f(x)$.

13.下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1)$y = \cos(x-2)$;(2)$y = \cos 4x$;(3)$y = 1 + \sin \pi x$;(4)$y = x\cos x$;(5)$y = \sin^2 x$.

解 易验明(1)、(2)、(3)、(5) 是周期函数,(1) 的周期为 2π;(2) 的周期为$\frac{\pi}{2}$;(3) 的周期为2;(5) 的周期为 π;(4) 不是周期函数.

14.求下列函数的反函数:

(1)$y = \sqrt[3]{x+1}$; (2)$y = \frac{1-x}{1+x}$; (3)$y = \frac{ax+b}{cx+d}\ (ad - bc \neq 0)$;

(4)$y = 2\sin 3x\ \left(-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}\right)$; (5)$y = 1 + \ln(x+2)$; (6)$y = \frac{2^x}{2^x + 1}$.

解 (1) 反函数为 $y = x^3 - 1$;

(2) 反函数为 $y = \frac{1-x}{1+x}$;

(3) 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}, x(a - cy) = dy - b$,则 $x = \frac{dy - b}{a - cy}$,故所求反函数为 $y = \frac{dx - b}{a - cx}$;

(4) 反函数为 $y = \frac{1}{3}\arcsin \frac{x}{2}\ (-2 \leqslant x \leqslant 2)$;

(5) 由 $y = 1 + \ln(x+2)$,有 $e^{y-1} = x + 2, x = e^{y-1} - 2$,所求反函数为 $y = e^{x-1} - 2$;

(6) 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$,有 $2^x(1-y)=y$,$x=\log_2\frac{y}{1-y}$,所求反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$ $(0<x<1)$.

15.设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 $f(x)$ 有界 $\Rightarrow \exists M$,使 $|f(x)|\leqslant M \Rightarrow -M\leqslant f(x)\leqslant M$,则上界为 M,下界为 $-M$;反之 $f(x)\leqslant M$, $f(x)\geqslant m$,令 $M'=\max(|M|,|m|)$,则 $|f(x)|\leqslant M'$,所以 $f(x)$ 有界.

16.在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值.

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\frac{\pi}{6},x_2=\frac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\frac{\pi}{8},x_2=\frac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$;

(4) $y=e^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$;

(5) $y=u^2,u=e^x,x_1=1,x_2=-1$.

解 (1) $y=\sin^2x,y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4},y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$;

(2) $y=\sin 2x,y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y(1)=\sqrt{2},y(2)=\sqrt{5}$;

(4) $y=e^{x^2},y(0)=1,y(1)=e$;

(5) $y=e^{2x},y(1)=e^2,y(-1)=e^{-2}$.

17.设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$; (3) $f(x+a)$ $(a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

解 (1) $x^2\in[0,1]\Rightarrow x\in[-1,1]$;

(2) $\sin x\in[0,1]\Rightarrow x\in[2k\pi,(2k+1)\pi],k=0,1,\cdots$;

(3) $x+a\in[0,1]\Rightarrow x\in[-a,1-a]$;

(4) $\begin{cases}x+a\in[0,1]\\x-a\in[0,1]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-a,1-a]\\x\in[a,a+1]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[a,1-a] & 0<a\leqslant\frac{1}{2}\\ \varnothing & a>\frac{1}{2}\end{cases}$.

18.设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\0 & |x|=1\\-1 & |x|>1\end{cases}$,$g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解
$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e & |x|<1\\1 & |x|=1\\e^{-1} & |x|>1\end{cases}$$

其图像为图 1-2(a);

$$f[g(x)]=e^x\begin{cases}<1 & x<0\\=1 & x=0\\>1 & x>0\end{cases}\approx f[g(x)]=\begin{cases}1 & |x|<0\\0 & |x|=0\\-1 & |x|>0\end{cases}$$

其图像为图 1-2(b).

19.已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40°$(图 1-3).当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系,并指明其定义域.

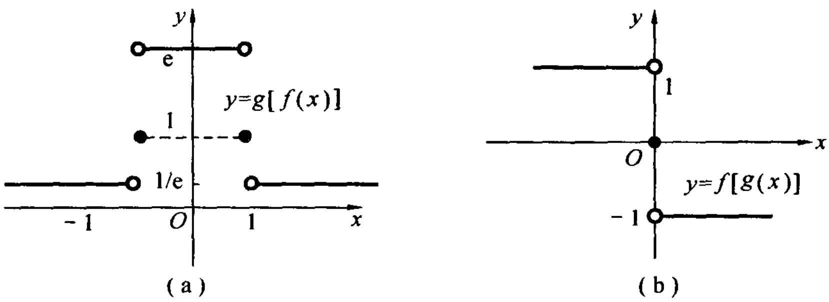

图 1-2

解 由于 $AB = CD = \frac{h}{\sin 40°}$, $AD = BC + 2h\cot 40°$,有

$$S_0 = \frac{h}{2}(BC + AD) = h(BC + h\cot 40°)$$

即 $BC = \frac{S_0}{h} - h \cdot \cot 40°$,则

$$L = AB + BC + CD = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40°}{\sin 40°}h, h \in (0, \sqrt{S_0 \tan 40°})$$

20.收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元.厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购 1 台,售价就降低 1 分,但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一商行订购了 1 000 台,厂方可获利润多少?

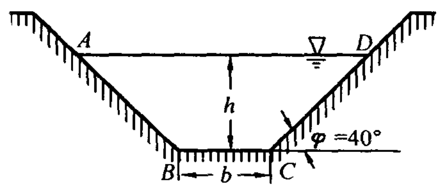

图 1-3

解 (1) $p = \begin{cases} 90 & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 90 - (x - 100) \times 0.01 & 100 < x < 1\,600 \\ 75 & x \geqslant 1\,600 \end{cases}$;

(2) $P = (p - 60)x = \begin{cases} 30x & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 31x - 0.01x^2 & 100 < x < 1\,600 \\ 15x & x \geqslant 1\,600 \end{cases}$.

(3) $P(1\,000) = 21\,000$.

习题 1-2

1.观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n = \frac{1}{2^n}$;(2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;(3) $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$;(4) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$;(5) $x_n = n(-1)^n$.

解 (1) $x_n = \frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$ 极限为 0.

(2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$ 极限为 0.

(3) $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$; $3, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{9}, 2\frac{1}{16}, 2\frac{1}{25}, \cdots$ 极限为 2.

(4) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \cdots$ 极限为 1.

(5) $x_n = n(-1)^n$. $-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \cdots$ 无极限.

2.设数列$\{x_n\}$的一般项$x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$.问$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$?求出$N$,使当$n>N$时,$x_n$与其极限之差的绝对值小于正数$\varepsilon$.当$\varepsilon=0.001$时,求出数$N$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$.事实上,要使$|x_n-0|=\frac{1}{n}\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$或$n>\frac{1}{\varepsilon}$.所以,$\forall\varepsilon>0$,对$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则当$n>N$时,就有$\frac{1}{n}\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|<\varepsilon$,将以上分析找$N$的过程逆推,有$|x_n-0|<\varepsilon$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$.

当$\varepsilon=0.001$时,可取$N=\left[\frac{1}{0.001}\right]=1\,000$;当然取$N>1\,000$的数亦可.

3.根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证明 (1) 欲使$|x_n-a|=\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\sqrt{\varepsilon}$或$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,所以$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$,则当$n>N$时,就有$\left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) 欲使$|x_n-a|=\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{n}<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$或$n>\frac{1}{\varepsilon}$,所以$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则当$n>N$时,就有$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

(3) 欲使$|x_n-a|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon$,只要$\frac{a^2}{n}<\varepsilon$或$n>\frac{a^2}{\varepsilon}$,所以,$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]+1$,则当$n>N$时,就有$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) 欲使$|x_n-a|=|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\frac{1}{10^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$或$n>\frac{1}{\varepsilon}$,所以$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则当$n>N$时,就有$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

4.若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$,并举例说明:如果数列$\{|x_n|\}$有极限,但数列$\{x_n\}$未必有极限.

证明 $\forall\varepsilon>0$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,所以$\exists N>0$,当$n>N$时,有$|u_n-a|<\varepsilon$,从而$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$,于是$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,总有$||u_n|-|a||<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

反例:$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$,虽有$|u_n|=|(-1)^n|=1$且$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$,但$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在.

5.设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明 因为$\{x_n\}$有界,故存在$M>0$,使得对于一切$n\in N$,均有$|x_n|\leqslant M$.对于$\forall\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,则$\exists N>0$,当$n>N$时,总有$|y_n-0|=|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$,从而$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6.对于数列$\{x_n\}$,若$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,$x_{2k}\to a(k\to\infty)$,证明:$x_n\to a(n\to\infty)$.

证明 对于$\forall\varepsilon>0$,因为$k\to\infty$时,$x_{2k-1}\to a$,所以$\exists N_1>0$,当$k>N_1$时,总有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$,又因为$k\to\infty$,$x_{2k}\to a$,所以$\exists N_2>0$,当$k>N_2$时,总有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$,现取$N_3=\max\{N_1,N_2\}$,则当$k>N_3$时,$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$与$|x_{2k}-a|<\varepsilon$同时成立.

最后取$N=2N_3+1$,当$n>N$时,$n=2k-1$或$n=2k$均有$k>N_3$,从而总有$|x_n-a|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习题1-3

1.根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$;(2) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$;(3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$;(4) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

证明 (1) 由于 $|f(x)-A|=|3x-1-8|=3|x-3|$,要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$,只要 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,所以 $\forall\varepsilon>0$,可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$,则当 x 适合不等式 $0<|x-3|<\delta$ 时,就有 $|3x-1-8|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$;

(2) 由于 $|f(x)-A|=|5x+2-12|=5|x-2|$,要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$,只要 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,所以 $\forall\varepsilon>0$,可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,则当 x 适合不等式 $0<|x-2|<\delta$ 时,就有 $|5x+2-12|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$;

(3) 由于 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x+2|$,要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$,只要 $|x+2|<\varepsilon$,所以 $\forall\varepsilon>0$,可取 $\delta=\varepsilon$,则当 x 适合不等式 $0<|x+2|<\delta$ 时,就有 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$;

(4) 由于 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|$,要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$,只要 $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,所以 $\forall\varepsilon>0$,可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,则当 x 适合不等式 $0<\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\delta$ 时,就有 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

2.根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$,要证 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x^3|}<\dfrac{1}{|x^3|}<\varepsilon$,只须 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$,取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$,于是 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\forall\varepsilon>0$,要证 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$,只须 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,于是 $\forall\varepsilon>0,\exists X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,当 $x>X$ 时,有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3.当 $x\to2$ 时,$y=x^2\to4$.问 δ 等于多少,使当 $|x-2|<\delta$ 时,$|y-4|<0.001$?

解 不妨设 $1<x<3$,要使 $|y-4|<0.001$,即 $|x^2-4|<0.001$,只须

$$|x-2|\cdot(x+2)<5|x-2|<0.001\ (3<x+2<5)$$

即 $|x-2|<\dfrac{0.001}{5}=0.0002$.故可取 $\delta=0.0002$,则当 $|x-2|<\delta$ 时,总有 $|y-4|<0.001$.

4.当 $x\to\infty$ 时,$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to1$.问 X 等于多少,使当 $|x|>X$ 时,$|y-1|<0.01$?

解 要使 $|y-1|=\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<0.01$,只须 $x^2+3>400$,即 $|x|>\sqrt{397}$,取 $X=\sqrt{397}$($X=20$ 亦可),则当 $|x|>X$ 时,总有 $|y-1|<0.01$.

5.证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to0$ 时极限为0.

证明 $\forall\varepsilon>0$,欲使 $||x|-0|=|x|<\varepsilon$,只要取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-0|<\delta$ 时,便有 $||x|-0|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

6.求 $f(x)=\dfrac{x}{x},\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左、右极限,并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

解 由于$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$,所以$f(0^-)=f(0^+)$,即$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

由于$\varphi(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$,$\varphi(0^+)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=1$,所以$\varphi(0^-)\neq\varphi(0^+)$,$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$不存在.

7.证明:若$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时,函数$f(x)$的极限都存在且都等于A,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,$\forall\varepsilon>0$,$\exists x_1>0$,当$x>x_1$时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$;又$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,对于上述的$\varepsilon>0$,$\exists x_2>0$,当$x<-x_2$时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$;

取$x=\max\{x_1,x_2\}$,由上述已证知,对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists x>0$,当$|x|>x$时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

8.根据极限定义证明:函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 必要性:设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$;当$0<x-x_0<\delta$ $(x>x_0)$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;又当$-\delta<x-x_0<0$ $(x<x_0)$时,亦有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$;故$f(x_0^+)=f(x_0^-)$(左右极限存在并且相等).

充分性:设$f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$,则对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1>0$及$\delta_2>0$,当$-\delta_1<x-x_0<0$及$0<x-x_0<\delta_2$时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$;

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$-\delta_1<x-x_0<0$及$0<x-x_0<\delta_2$时,即$0<|x-x_0|<\delta$时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

9.试给出$x\to\infty$时函数极限的局部有界性的定理,并加以证明.

定理 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,则存在$M>0$,使$|x|>M$时,$f(x)$有界.

证明 设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,由$\varepsilon-\delta$定义,取$\varepsilon=1$,存在相应的$M>0$,使对于一切$|x|>M$,都有$|f(x)-A|<1$,则$A-1<f(x)<A+1$.

习题 1－4

1.两个无穷小的商是否一定是无穷小?举例说明之.

解 两个无穷小的商不一定是无穷小.例如,当$x\to0$时,x^2、$2x^2$、x^3、$x\sin\dfrac{1}{x}$都是无穷小,但$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^3}=\infty$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

2.根据定义证明:

(1)$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$为当$x\to3$时的无穷小;

(2)$y=x\sin\dfrac{1}{x}$为当$x\to0$时的无穷小.

证明 (1)$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<\varepsilon$,只须取$\delta=\varepsilon$,则对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\varepsilon$,当$0<|x-3|<\delta$时,有$\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon$,即有$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=0$.

(2)$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$,只须$|x|<\varepsilon$,取$\delta=\varepsilon$,则对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\varepsilon$,当$0<|x|<\delta$时,有$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$,即有$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

3.根据定义证明:函数$y=\dfrac{1+2x}{x}$为当$x\to0$时的无穷大.问x应满足什么条件,能使$|y|>10^4$?

证明 设 $\forall M>0$. 要使 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|>M$, 只要 $\left|\frac{1}{x}\right|>M+2$, 即 $|x|<\frac{1}{M+2}$, 取 $\delta=\frac{1}{M+2}$, 则 $\forall M>0, \exists \delta=\frac{1}{M+2}$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时, 就有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|>\left|\frac{1}{x}\right|-2>M$, 故当 $x\to 0$ 时 $y=\frac{1+2x}{x}$ 是无穷大. 由上述证明可知: 当 $|x|<\frac{1}{10\,002}$ 时, $|y|>10^4$.

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1) $\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$, 而 $x\to\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小, 即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2+0=2$;

(2) $\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$, 而 $x\to 0$ 时, x 是无穷小, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}=1+0=1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表:

解 答案已填在表中.

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时, 皆有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时, 皆有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时, 皆有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时, 皆有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ $0<x-x_0<\delta$ 时, 皆有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<x-x_0<\delta$ 时, 皆有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<x-x_0<\delta$ 时, 皆有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<x-x_0<\delta$ 时, 皆有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ $0<x_0-x<\delta$ 时, 皆有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<x_0-x<\delta$ 时, 皆有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<x_0-x<\delta$ 时, 皆有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists \delta>0$ $0<x_0-x<\delta$ 时, 皆有 $f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall \varepsilon>0, \exists X>0$ 当 $\lvert x\rvert>X$ 时, 皆有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $\lvert x\rvert>X$ 时, 皆有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $\lvert x\rvert>X$ 时, 皆有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $\lvert x\rvert>X$ 时, 皆有 $f(x)<-M$
$x\to+\infty$	$\forall \varepsilon>0, \exists X>0$ 当 $x>X$ 时, 皆有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $x>X$ 时, 皆有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $x>X$ 时, 皆有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $x>X$ 时, 皆有 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall \varepsilon>0, \exists X>0$ 当 $x<-X$ 时, 皆有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $x<-X$ 时, 皆有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $x<-X$ 时, 皆有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $x<-X$ 时, 皆有 $f(x)<-M$