张人智 高文明/编著

智明考研数学

2008综合备考指南

2008 ZONGHE BEIKAO ZHINAN

经济版

江西出版集团
江西科学技术出版社
北京出版社

ZHIMING KAOYAN SHUXUE

智明考研数学

2008 综合备考指南

2008 ZONGHE BEIKAO ZHINAN

江西出版集团
江西科学技术出版社
北京出版社

张人智 高文明/编著

经济版

图书在版编目(CIP)数据

智明考研数学2008综合备考指南(经济版)/张人智 等编著.—南昌:江西科学技术出版社,2007.5
ISBN 978-7-5390-3052-4
Ⅰ.智… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ.013
中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第062933号

国际互联网(Internet)地址:
http://www.jxkjcbs.com
选题序号:**ZK**2006081

智明考研数学2008综合备考指南(经济版) 张人智 等编著

出版 发行	江西出版集团·江西科学技术出版社
社址	南昌市蓼洲街2号附1号 邮编:330009 电话:(0791)6623491 6639342(传真)
印刷	江西农大印刷厂
经销	各地新华书店
开本	730mm×980mm 1/16
字数	570千字
印张	25
印数	2000册
版次	2007年5月第1版 2007年5月第1次印刷
书号	ISBN 978-7-5390-3052-4
定价	38.00元

目录

第一部分 微积分

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　微积分

第一章　函数·极限·连续

§1　函数

一、函数的概念

设 D 为非空数集，f 是一个确定的对应规则，如果对 D 中每一个 x，按照对应规则 f，有唯一的一个数 y 与之对应，则称 y 是 x 的一个函数，记为 $y=f(x)$. 数集 D 是函数的定义域，记为 D_f，变量 y 的取值范围称为函数的值域，记为 Z_f.

在函数概念中的两个要素：定义域 D_f 及对应规则 f. 仅当定义域与对应规则完全相同时，才表示同一个函数，否则表示不同的函数. 例如，函数 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$，它们的对应规则相同，但定义域不同，因而是两个不同的函数.

函数的定义域是自变量的取值范围. 当函数是用解析式来表示时，则使运算有意义的自变量可能取值的集合，即为定义域.

例 1.1　设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

【分析】 应先解出 $\varphi(x)$，再从 $\varphi(x)$ 的表达式确定其定义域.

【解】 $f(x)=e^{x^2}$，所以 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$

又因为 $f[\varphi(x)]=1-x$，所以 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，即 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，注意到 $\varphi(x)\geqslant 0$，因此 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

所以，$\varphi(x)$ 的定义域为 $\ln(1-x)\geqslant 0$，即 $x\leqslant 0$ 或 $(-\infty,0]$.

例 1.2　设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

【分析】 解决这类问题需注意函数表示法的"变量无关性"，仅需确定函数的定义域与对应规则. 即 $y=f(x)$，$u=f(v)$ 均表示同一函数.

【解】 由

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \qquad ①$$

令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $t=\dfrac{1}{x}$，故有

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct \qquad ②$$

联立①、②式，解得 $$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$$

二、函数的基本性质

（一）奇偶性

设$f(x)$是定义在区间X上的函数，如果对$\forall x\in X$恒有

$$f(x)=f(-x)\qquad (\text{或}f(x)=-f(-x))$$

则称$f(x)$为区间X上的偶函数（或$f(x)$为奇函数）.

【注】①奇、偶函数的定义域一定是对称区间，若定义域不是对称区间，就谈不上函数的奇、偶性.

②奇、偶函数的几何特征：偶函数$y=f(x)$的图形关于y轴对称，奇函数$y=f(x)$的图形关于坐标原点中心对称.

例 1.3 判别下列函数的奇偶性：

(1)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (2)$f(x)+f(-x)$ (3)$f(x)-f(-x)$

(4)$y=f'(x)$，其中$f(x)$为可导的奇函数. (5)$y=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，其中$f(x)$为连续的偶函数.

【解】(1) 令$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数

(2) 令$F(x)f(x)+f(-x)$，则

$$F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=F(x)$$

所以$F(x)$是偶函数.

(3) 令$G(x)=f(x)-f(-x)$，则

$$G(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)=-G(x)$$

所以$G(x)$是奇函数.

(4) 已知$f(-x)=-f(x)$

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=f'(x)$$

所以$f(x)$为偶函数.

(5) 已知$f(-x)=f(x)$，令$g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则

$$g(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令}u=-t}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=-g(x)$$

所以$g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$为奇函数.

例 1.4 证明：在对称区间$(-a,a)$内定义的任意函数$f(x)$，必可表示为一个偶函数$H(x)$与一个奇函数$G(x)$之和，且这种表示法是唯一的.

证明: 令 $H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,则 $H(x)$ 是偶函数,$G(x)$ 是奇函数,且 $f(x)=H(x)+G(x)$.

下证唯一性:若还有偶函数 $H_1(x)$ 与奇函数 $G_1(x)$,使得 $f(x)=H_1(x)+G_1(x)$,则

$$H(x)+G(x)=H_1(x)+G_1(x)$$

或者

$$H(x)-H_1(x)=-G(x)+G_1(x)$$

用 $-x$ 代入上式,并注意到 $H(x)-H_1(x)$ 仍为偶函数,$-G(x)+G_1(x)$ 仍为奇函数

$\therefore$

$$H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x)$$

两式相加得

$$2(H(x)-H_1(x))=0$$

$\therefore\ H(x)=H_1(x)$ 且由此可得 $G(x)=G_1(x)$.

(二)周期性

设 $f(x)$ 是定义在区间 X 上的函数,若存在一个与 x 无关的正数 T,使得对 $\forall x\in X$,恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 把满足上式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期.

【注】 周期函数不一定有最小的正周期. 例如,狄里克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

任意正有理数都是 $D(x)$ 的正周期,而没有最小的正有理数.

例 1.5 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的,以 T 为周期的连续奇函数,则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 T 为周期的周期函数.

证明: 由奇函数及周期函数的积分性质可得

$$\begin{aligned}F(x+T)&=\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)\end{aligned}$$

所以,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(三)单调性

设 $f(x)$ 在区间 X 上定义,如果对 $\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad\text{或}f(x_1)>f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 是区间 X 上的(严格)单调增加(或单调减少)函数(当不等号"<",">"改为"≤","≥"时,常称为不减不增的).

函数的单调性的判定及单调区间的确定,若 $f(x)$ 在 X 上可导时,则用导数来确定显得方便,若 $f(x)$ 在 X 上没有告知可导时,只能用定义来判定.

【注】 函数的单调性是函数的一个区间性质. 同一函数在定义域的不同区间段上,可能呈现不同的单调性. 因而,指明函数的单调性时,需要指明呈现单调性的区间.

例 1.6 验证函数 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增加.

证明:【方法一】$\forall x_1,x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),x_1< x_2$

$$\because \sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}$$

由于 $x_1 < x_2$，$-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0,\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$

$\therefore \sin x_2 - \sin x_1 > 0$

故 $y = \sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加

【方法二】因为$(\sin x)' = \cos x$,当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时,$\cos x > 0$,因此,$y' > 0$,所以 $y = \sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加.

(四)有界性

设$f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果存在 $M > 0$,使得对 $\forall x \in X$,有$|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界,否则,称为无界函数.

【注 1】函数的有界性是函数的区间性质. 函数是有界或无界是对某个区间而言.

【注2】无界函数与无穷大量的区别:在某个变化趋势下,$f(x)$ 是无穷大量,则$f(x)$ 在某个区间上一定是无界的. 反之,$f(x)$ 在某个区间上是无界函数,则$f(x)$ 不一定是无穷大量. 例如,$y = x\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上无界,但$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$ 不存在,因而不是无穷大量.

例 1.7 设数列的通项为

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{n} & 若 n 为奇数 \\ \dfrac{1}{n} & 若 n 为偶数 \end{cases}$$

则当 $n \to +\infty$ 时,x_n 是______.

(A)无穷大量　(B)无穷小量　(C)无界变量　(D)有界变量(1991. V)

【解】应选(C). 因为$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1} = +\infty$,而$|x_{2k}| < 1$,所以当$n\to\infty$ 时,x_n 的极限不存在,因而是无界变量.

例 1.8 当 $x \to 0$ 时,变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是______.

(A)无穷小量　(B)无穷大量

(C)有界但非无穷小量　(D)无界但非无穷大量　(1993. Ⅲ)

【解】应选(D). 因为当 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n} = \infty$,而当 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ 时,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}0 = 0$,所以当 $x \to \infty$ 时$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 的极限不存在,且变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是无界

但非无穷大量.

【注】无穷大量是用变量的极限过程来描述,即变量的极限为 ∞. 当自变量的某个变化趋势下,极限不存在时,该变量此时不可能为无穷大量.

三、分段函数

分段函数是指在函数定义域的不同区间段上有着不同的表达式的函数. 常见的几种重要的分段函数:

(一) 符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\\-1 & x<0\end{cases}$$

显然有 $|x|=x\operatorname{sgn}x$

(二) 狄里克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

(三) 黎曼(Riemann) 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 }x\in(0,1),x=\dfrac{p}{q},\text{且}(p,q)=1\\0 & \text{当 }x=0,1,\text{或 }x\in(0,1)\text{ 且 }x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

(四) 取整函数 $[x]$ 与尾数函数 (x)

$y=[x]$ 为 x 的最大整数部分,(x) 为 x 的非负小数部分,容易看到,$x=[x]+(x)$

$$x-1<[x]\leqslant x;\qquad 0\leqslant(x)<1$$

四、初等函数

(一) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f,如果对 Z_f 中任一 y 值,从 $y=f(x)$ 中可唯一确定一个 x 值,则变量 x 是变量 y 的函数,记为

$$x=\varphi(y)$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $y=f^{-1}(x)$.

【注1】$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合;$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 是对称的.

【注2】只有一一对应的函数才有反函数. 特别地,若 $y=f(x)$ 在 X 上是严格单调增加(减少),设与 X 相对应的值域是 Y,则函数 $y=f(x)$ 必存在反函数 $x=\varphi(y)$,且它在 Y 上是严格单调增加(减少)的.

求 $y=f(x)$ 的反函数,只需将 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出,得到 x 用 y 表示的解析式,再将该表达式中的 x 与 y 对换即可得到.

例 1.9 求 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数

【解】令 $t = \sqrt{1+4x}$,则 $y = \dfrac{1-t}{1+t}$,于是

$$t = \frac{1-y}{1+y}, \text{即} \sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y}$$

所以 $$x = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2 - 1\right] = -\frac{y}{(1+y)^2}$$

所求反函数为 $$y = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

(二) 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ,若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$,则定义 $y = f[\varphi(x)]$为 x 的函数,其中 x 为自变量,u 是中间变量,y 是因变量(函数).

【注】函数复合以后,其定义域一般要变化. $y = f[\varphi(x)]$的定义域一般是 D_φ 的真子集,即使得 $\varphi(x) \in D_f$ 的那部分 $x \in D_\varphi$ 构成.

将两个或两个以上的函数进行复合,常用代入法、分段分析法等方法:

1. 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代. 这种方法适用于初等函数的复合.

例 1.10 求函数 $y = \ln(1-2\cos x)$ 的定义域与值域.

【解】由 $1 - 2\cos x > 0$ 可以得到 $\cos x < \dfrac{1}{2}$. 因此,解得函数的定义域为

$$D = \left\{x \,\middle|\, 2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5}{3}\pi, k \in Z\right\}$$

又因为$\max\limits_{x\in D}(1-2\cos x) = 3$, $\min\limits_{x\in D}(1-2\cos x) = 0$,根据对数函数的单调性,函数的值域为$(-\infty, \ln 3]$.

例 1.11 已知$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,验证$f\{f[f(f(x))]\} = x$,并求$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)(x \neq 0,1)$

解:$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = x$$

$$\therefore \quad f\{f[f(f(x))]\} = f(f(x)) = x$$

又 $$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1} = 1-x$$

2. 分段分析法

对最外层函数定义域的各个区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得到复合函数. 这种方法适用于初等函数与分段函数,或分段函数之间的复合.

例 1.12 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$$

求$f[f(x)]$

【解】用分段分析法：当$x\geqslant 0$时，$f(x)=1$，故$f[f(x)]=f(1)=1$

当$-1\leqslant x<0$时，$f[f(x)]=f(1+x)=f(1)=1$

当$x<-1$时，$f[f(x)]=f(1+x)=1+(1+x)=2+x$

$$\therefore \qquad f[f(x)]=\begin{cases}1 & x\geqslant -1\\ x+2 & x<-1\end{cases}$$

3. 图示法

借助函数图像的直观性将函数进行复合. 这种方法适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的复合.

例 1.13 设$f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-x} & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$，求$f[\varphi(x)]$.

【解】令$u=\varphi(x)$. 首先作出$u=\varphi(x)$的图像（见图 1－1），再在图中找出$y=f(u)$的分界点$u=0$（即x轴）.

从图中可以看出，当$x<0$时，$u=e^{-x}$，当$x\geqslant 0$时，$u=x^2$，代入$y=f(u)$中得到

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ e^{-x} & x<0\end{cases}$$

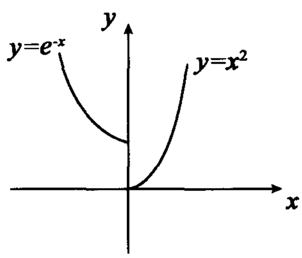

图 1－1

（三）初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等称为基本初等函数. 由常数与基本初等函数经过有限次四则运算或复合而成，并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

初等函数是高等数学中最基本的研究对象. 因为初等函数在其定义域中是连续的，因而掌握初等函数的特征尤为重要.

【注】分段函数一般不是初等函数，但有些分段函数能用一个式子表示时，仍为初等函数. 例如，$y=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 0\\ 2x+1 & x>0\end{cases}$ 可以表示为$y=\frac{1}{2}(3x+\sqrt{x^2})+1$ $(-\infty<x<+\infty)$，因而该函数仍是初等函数.

习题 1.1

填空题

1. 已知$f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则$\varphi(x)=$ ________，定义域为__________.

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则$f\{f[f(x)]\}=$ ________. （2001. Ⅱ）

3. 设$f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$，则$f[f(x)]=$ ________.

4. 若$f(x)=\max\{2|x|,|x+1|\}$,则$f(x)$的分段函数表达式为________,$f(x)$的最小值是________.

5. 设$f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 0,1)$,则$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=$________.

选择题

6. 设函数$f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$,则$f(x)$是(　　)

(A) 偶函数　(B) 无界函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

7. $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是(　　)

(A) 有界函数　(B) 单调函数　(C) 周期函数　(D) 偶函数

8. 设$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$,则$g[f(x)]=$(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

参考答案

1. $\arcsin(1-x^2)$,$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　2. 1　3. $\begin{cases}1 & x\geqslant -1\\ x+2 & x<-1\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}-2x & x<-\dfrac{1}{3}\\ x+1 & -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 2x & x>1\end{cases}$,最小值$\dfrac{2}{3}$　5. $1-x$　6. B　7. D　8. D

§2　极限

一、基本概念与基本结论

(一) 数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\Leftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$,存在正整数$N$,使得当$n>N$时,恒有

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

(二) 函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$,$\exists M>0$,使得当$|x|>M$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.类似地定义$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当$0<|x-a|<\delta$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$.

关于极限定义的注:

【注 1】在定义 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 中,函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可以没有定义.

【注 2】极限反映的是函数在某一点的邻域(去心邻域)内的性质.在极限的定义中,要注意自变量的变化趋势.例如,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$,而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(三)右、左极限

右极限:$f_+(x)=f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当 $0<x-a<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

左极限:$f_-(a)=f(a-0)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当 $0<a-x<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

定理:$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f(a-0),f(a+0)$ 存在且相等.

(四)数列极限与函数极限的关系

定理(Heine):设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内有定义,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是,对任意数列 $\{x_n\}$,$x_n\neq x_0$,$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=x_0$,均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

定理主要应用在两个方面:(1)判断极限不存在,即找两个不同的数列 $\{x_n\}$,$\{x'_n\}$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x_0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)$,则当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的极限不存在.(2)计算数列的极限,可以通过该定理,转化为计算函数的极限.

二、极限的基本性质

就函数的极限说明极限的基本性质,数列极限的性质类似.

(一)唯一性:如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 存在,那么极限值是唯一的.

(二)局部有界性:如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$|A|<+\infty$,那么在 $x=a$ 的邻域内,$f(x)$ 有界.即 $\exists M>0,\exists\delta>0$,对 $\forall x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$,有 $|f(x)|<M$.

(三)局部保号(保序)性:若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,且 $A>B$,则 $\exists\delta>0$,使得对 $\forall x,0<|x-a|<\delta$,都有 $f(x)>g(x)$.特别地,若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$A>B$,则 $\exists\delta>0$,对 $\forall x,0<|x-a|<\delta$ 时,有 $f(x)>B$.

反之,若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,且 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)\geqslant g(x)$,则 $A\geqslant B$.

注意,即使在 $x=a$ 的邻域内,恒有 $f(x)>g(x)$,也只能得到 $A\geqslant B$.例如,对 $\forall n\in N^+$,都有 $\frac{1}{n}>0$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

三、无穷小量与无穷大量

(一)定义

1.以 0 为极限的变量称为无穷小量

【注】变量 α 是无穷小量,一定是指在自变量的某个变化趋势下.

2. 在自变量的某个变化过程中，$f(x)$ 的绝对值无限增大，则称 $f(x)$ 为无穷大量. 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$（无穷大量是极限不存在的一种形式）

（二）无穷小的性质

1. **定理**：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

2. **定理**：无穷小的运算性质

（i）有限多个无穷小的代数和仍为无穷小量；

（ii）有限多个无穷小量的乘积仍为无穷小量；

（iii）有界变量与无穷小的乘积是无穷小量.

（三）无穷小的比较

设 $x\to a$（或 $x\to+\infty$）时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是无穷小量.

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$，同时，也称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小.

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小. 特别，当 $c=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等阶无穷小. 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$（当 $x\to a$ 时）

（四）无穷小的阶

记 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是无穷小量. 如果存在 $k>0$，使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^k}=c(\neq 0)$$

即 $\alpha(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则称 $\alpha(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小，且 k 是无穷小量 $\alpha(x)$ 的阶数.

类似地，若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(x-a)^k}=c(\neq 0)$，称 $\alpha(x)$ 是 $x-a$ 的 k 阶无穷小（$x\to a$ 时）.

（五）无穷小与无穷大的关系

定理：在同一变化趋势下无穷大的倒数为无穷小；非“0”的无穷小量的倒数为无穷大量.

四、极限的计算

极限的计算有各种各样的方法，但大部分情况是多种方法的综合运用.

极限计算的常用方法有：

（一）应用极限的四则运算与函数的连续性

定理（极限的运算法则） 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$

3. 当 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$

【注 1】应用极限的运算法则时,要求分别计算极限的每一个部分极限存在;另一方面,经过运算以后函数的极限存在,不能保证每一部分的极限存在. 例如,$\lim\limits_{n\to\infty}[(-1)^n+(-1)^{n+1}]=0$,但当 $n\to\infty$ 时,$(-1)^n$,$(-1)^{n+1}$ 的极限不存在.

【注 2】四则运算只能进行有限次,即对有限个函数进行运算.

容易看到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}0 & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ \infty & m>n\end{cases}$$

定理:初等函数在其定义域内是连续的.

(二) 应用两个重要极限

两个重要极限是指

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad (\text{或}\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e)$$

经过变量替换以后,可以化为

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1\qquad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e\quad (\text{或}\lim_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e)$$

值得注意的是,在同一个极限式中,“□”的内容应完全相同.

另外,还应熟悉一些简单的极限式及其结果. 例如,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 等等.

(三) 应用等价无穷小替代简化计算

替代原理:设 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时,$\alpha(x)$,$\alpha_1(x)$;$\beta(x)$,$\beta_1(x)$ 是无穷小量,且 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$,$\beta(x)\sim\beta_1(x)$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

实际上,由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$,我们有

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}$$

其他情况类似.

【注】根据替代原理与替代条件,被替代部分在整个极限式中是乘除因子,若被替代部分有指数,指数应是常数(根据幂函数的连续性).

等价无穷小替代在不定式“$\dfrac{0}{0}$”的极限计算中常用.

常用的等价无穷小有:当 $x\to0$ 时

$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,

$\ln(1+x)\sim x$,$e^x-1\sim x$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

(四) 应用拉格朗日(Lagrange)中值定理与泰勒(Taylar)公式

拉格朗日中值定理:$f(x)$ 在$[a,x]$上连续,在(a,x) 内可导,则

$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$　　　ξ 在 x 与 a 之间

泰勒公式:若$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有直到 $n+1$ 阶导数,则

$$f(x)=f(a)+f'(a)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+o((x-a)^n)$$

余项 $R_n(x)$ 应采用皮亚诺余项 $R_n(x)=o(x^n)(x\to 0)$

常用的几个函数的泰勒公式:在 $x=0$ 处

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\quad(x\to 0)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})\quad(x\to 0)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})\quad(x\to 0)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\quad(x\to 0)$$

【注1】应用拉格朗日定理计算极限时,要注意在自变量的变化趋势下,中间值ξ的变化趋势是确定的(常用夹逼准则得到).

【注2】在商式的极限计算中,分子、分母的加项常用泰勒公式,泰勒展开式应取的项数应视极限计算的需要来确定.

(五)应用洛必达(L'Hospital)法则

定理:设$f(x)$,$g(x)$ 满足:

在点 x_0 的某个去心邻域内可导,且 $g'(x)\neq 0$;

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞).

则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也存在(或为 ∞),且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理:设$f(x)$,$g(x)$ 满足:

在点 x_0 的某个去心邻域内可导,且 $g'(x)\neq 0$;

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞).

则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也存在(或为 ∞),且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

洛必达法则主要用于不定式“$\frac{0}{0}$”,“$\frac{\infty}{\infty}$”的极限计算,其他形式的不定式$0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,$+\infty^0$,1^∞,$+0^0$ 则可经过极限式的变化,变量替换等方法化为$\frac{0}{0}$ 或$\frac{\infty}{\infty}$.

【注1】用洛必达法则计算极限时,一般计算量很大.一般要先用等价无穷小替代,及连续函数的性质进行简化,将极限为0的因子代为基本无穷小的式子,并将连续函数因子