非线性微分代数系统的控制理论与应用

张秀华　张庆灵　著

3

科学出版社
www.sciencep.com

非线性微分代数系统的控制理论与应用

张秀华　张庆灵　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了非线性微分代数系统的稳定性，在无源分析和耗散性理论的基础上，给出了非线性微分代数系统的无源性定义和研究的新理论、新结果，主要内容包括：非线性微分代数系统的几种类型，双线性广义系统稳定性分析与控制，一类双线性广义系统的故障检测观测器设计，离散广义双线性系统的切换控制器设计，具有微分代数模型的电力市场稳定性，微分代数系统的无源性和优化的应用，微分代数系统分岔的概念和有关分析。

本书适合系统与控制科学、应用数学、工程数学及相关专业的高年级大学生、研究生、教师及科技工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性微分代数系统的控制理论与应用/张秀华，张庆灵著. —北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-019752-8

Ⅰ. 非… Ⅱ. ①张…②张… Ⅲ. 微分代数—非线性控制系统 Ⅳ. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 131610 号

责任编辑：张 扬 /责任校对：邹慧卿

责任印制：赵德静 /封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 9 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2007 年 9 月第一次印刷 印张：12

印数：1—2 500 字数：223 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换<明辉>)

前　言

由微分方程和代数方程混合而形成的系统称为微分代数系统，该系统是微分系统对复杂系统描述的推广。单一应用传统的控制理论和方法难以满足复杂控制系统的设计要求。要想从数学上精确描述某一现实运动，我们必须同时考虑该运动的动力学方程和运动环境带来的运动限制。就一般情形而言，动力学方程是一个微分方程，而运动限制则由一个代数系统来描述，从这个意义上来说，微分代数系统是精确刻画现实运动最重要的工具之一。非线性微分代数系统的理论和应用成为了近年来国内外控制界关注的热点研究领域。

为了学习和研究这一课题，我们编写了本书。在编写过程中我们参考了有关的重要专著和相关的众多期刊文献，其中大部分为作者多年来从事非线性微分代数系统的理论与应用研究工作的一些最新成果。不同的学者和研究人员处理非线性微分代数系统的方法各不相同，我们这里不作一一介绍。本书的讨论基本上建立在稳定性分析和无源性分析与控制理论的基础上，在此基础上便于建立统一的体系。利用了非线性微分代数系统的几何线性化理论，对具有非线性负荷的电力系统非线性控制的理论和方法进行了深入的研究，使得无源性理论在励磁系统中得到应用。

全书共分 11 章，第 1 章概述了微分代数系统理论的发展过程，然后介绍了微分代数系统研究课题的发展状况及理论发展与研究概述。对所研究系统的应用背景给予了叙述。同时对一类非线性微分代数系统——广义双线性系统控制理论发展与研究作了概述。第 2 章介绍本书所涉及的数学基础知识和数学理论知识。第 3 章主要讨论了非线性微分代数系统的稳定性问题。第 4 章主要讨论了非线性微分代数系统的无源性问题。第 5 章讨论双线性广义系统的稳定性分析与一类时滞双线性广义系统稳定性分析与镇定。第 6 章讨论了一类双线性广义系统的故障检测观测器的设计问题。第 7 章研究了离散广义双线性系统的稳定控制问题和一类非线性离散广义系统的切换控制器设计问题。第 8 章给出了非线性微分代数系统的分岔理论及一系列的定义和定理。第 9 章讨论了一类具有微分代数模型的电力市场稳定性问题。第 10 章讨论了非线性微分代数系统在电力系统的应用。第 11 章将无源性应用在微分代数模型的励磁系统中。另外还介绍了基于受控微分代数系统灵敏度分析的紧急控制。

限于作者的水平和研究兴趣，书中难免有一些纰漏和不足，为些热忱地希望广大读者批评指正。

作　者

2007 年 8 月于东北大学

目　　录

前　言

第 1 章　绪论 …… 1

1.1　微分代数方程 …… 1

1.2　若干微分代数系统的应用实例 …… 4

1.3　双线性广义系统 …… 8

1.4　全书的结构安排 …… 11

第 2 章　数学基础知识 …… 13

2.1　向量和矩阵的范数 …… 13

2.1.1　向量的范数 …… 13

2.1.2　矩阵的范数 …… 14

2.2　矩阵的奇异值分解 …… 15

2.3　微分几何基础 …… 15

第 3 章　非线性微分代数系统的稳定性 …… 21

3.1　微分代数系统的稳定性分析 …… 21

3.1.1　问题的描述 …… 21

3.1.2　解的存在性和唯一性 …… 23

3.1.3　微分代数系统稳定性的几个结论 …… 24

3.1.4　微分代数系统的 Lur′e-Postnikov 结论 …… 34

3.2　电力系统中的应用 …… 35

第 4 章　非线性微分代数系统的无源性 …… 38

4.1　一类非线性微分代数系统的无源性 …… 38

4.1.1　基本概念 …… 38

4.1.2　主要定理 …… 40

4.2　线性广义系统的无源控制 …… 43

4.2.1　无源性分析 …… 43

4.2.2　状态反馈无源控制 …… 46

4.2.3　静态输出反馈无源控制 …… 49

4.2.4　动态输出反馈无源控制 …… 50

4.3　离散线性广义系统的无源控制 …… 54

4.3.1　无源性分析 …… 54

4.3.2　状态反馈无源控制 …… 55

4.4 滞后线性广义系统的无源控制 …… 57
4.4.1 无源性分析 …… 57
4.4.2 无源控制 …… 59
4.5 滞后离散线性广义系统的无源控制 …… 61
4.5.1 无源性分析 …… 61
4.5.2 无源控制 …… 63
4.6 一类非线性广义系统的无源控制 …… 64
4.6.1 无源性分析 …… 64
4.6.2 无源控制 …… 65
第 5 章 双线性广义系统稳定性控制分析 …… 68
5.1 双线性广义系统稳定性控制 …… 68
5.1.1 双线性广义系统稳定控制器的设计 …… 68
5.1.2 一类双线性广义系统的稳定域分析 …… 72
5.2 一类时滞双线性广义系统稳定性分析与镇定 …… 76
5.2.1 稳定性分析 …… 77
5.2.2 镇定方法 …… 78
第 6 章 一类双线性广义系统的故障检测观测器 …… 81
6.1 问题的描述与准备 …… 81
6.2 双线性广义系统故障检测观测器 …… 82
6.2.1 双线性广义系统故障检测观测器的结构与存在定理 …… 82
6.2.2 双线性广义系统故障检测观测器的设计 …… 83
第 7 章 离散广义双线性系统的有关控制问题 …… 90
7.1 离散广义双线性系统的稳定控制 …… 90
7.1.1 准备知识 …… 90
7.1.2 离散广义双线性系统的稳定控制 …… 92
7.1.3 离散广义双线性系统的稳定控制分析 …… 93
7.2 离散广义双线性系统的切换控制器设计 …… 96
7.2.1 预备知识 …… 97
7.2.2 离散广义双线性系统的切换控制器 …… 99
第 8 章 微分代数系统的分岔 …… 104
8.1 结构稳定性 …… 104
8.2 分岔的基本概念与类型划分 …… 107
8.2.1 分岔的基本概念 …… 107
8.2.2 分岔类型的若干划分方法 …… 108
8.3 常见的几种基本分岔的类型 …… 112
8.3.1 静态分岔 …… 112

8.3.2 二维霍普夫(Hopf)分岔 …… 118
8.4 微分代数系统的分岔 …… 121
8.4.1 鞍结分岔 …… 122
8.4.2 跨临界分岔 …… 123
8.4.3 霍普夫分岔 …… 123
8.4.4 奇异诱导分岔 …… 125
第9章 具有微分代数模型的电力市场稳定性 …… 128
9.1 电力市场稳定性 …… 128
9.1.1 电力市场的动态模型 …… 128
9.1.2 电力市场的稳定性分析 …… 129
9.2 电力市场不稳定性 …… 135
9.2.1 简单经济系统的动力学 …… 135
9.2.2 一个单供应者单消费者的例子 …… 136
9.2.3 固定需求情景 …… 137
9.2.4 需求变化的情景 …… 139
9.2.5 拥塞的影响 …… 140
9.2.6 数值例子 …… 142
9.2.7 扩充 …… 147
第10章 微分代数系统在电力系统中的应用 …… 148
10.1 基于非线性微分代数系统的励磁控制器的设计 …… 148
10.2 具有鲁棒的微分代数模型的励磁控制器设计 …… 153
10.2.1 鲁棒微分代数系统控制器设计原理 …… 154
10.2.2 鲁棒微分代数模型励磁控制器的设计 …… 156
10.3 一类鲁棒非线性励磁控制器设计的新方法 …… 158
10.3.1 鲁棒非线性控制器的设计理论 …… 159
10.3.2 鲁棒非线性励磁控制器的设计 …… 160
第11章 微分代数模型系统的无源性和优化的应用 …… 164
11.1 微分代数系统的无源性在励磁系统中的应用 …… 164
11.1.1 预备知识 …… 164
11.1.2 微分代数模型的单机无穷大输电系统的无源性 …… 165
11.2 基于受控微分代数系统灵敏度分析的紧急控制 …… 167
11.2.1 暂稳紧急控制模型 …… 168
11.2.2 求解方法 …… 168
11.2.3 受控非线性微分代数系统灵敏度分析 …… 170
11.2.4 数值仿真 …… 172
参考文献 …… 175

第1章　绪　　论

1.1　微分代数方程

由微分方程和代数方程混合而形成的系统称为微分代数方程，也称为微分代数系统，该系统是微分系统对复杂系统描述的推广. 自从 20 世纪 70 年代初期 Rosenbrock 提出微分代数系统的概念以来，由于其在科学和工程技术领域中的应用背景而受到控制界、数学界以及其他学术界的广泛关注. 近年来，在电网络分析、生态工程、计算机辅助设计与建模及经济学等领域有学者提出了各种类型的微分代数系统.

事实上，要想从数学上精确描述某一现实运动，我们必须同时考虑该运动的动力学方程和运动环境带来的运动限制. 就一般情形而言，动力学方程是一个微分方程，而运动限制则由一个代数系统来描述，从这个意义上来说，微分代数系统是精确刻画现实运动最重要的工具之一.

关于微分代数系统的研究，起初人们的兴趣主要是数值计算方面的问题. 在 20 世纪 80 年代，它作为处理具有多级、多目标、多维和多层次复杂系统的一个恰当工具，在大系统理论、奇异摄动理论、电力系统、计量经济学、系统控制理论和决策理论等领域得到了广泛的应用，微分代数系统的理论有了一定的发展，出现了有关内容的专著. 但是，由于该系统本身的特性，人们很难用处理正常系统的工具和方法对它进行研究，对非线性微分代数系统更是如此. 迄今为止，关于非线性微分代数系统理论方面的结果见于文献的还很有限. 文献[6]讨论了指数 1 系统的局部分支问题，可用来确定稳定平衡点的吸引域，这在电力系统的稳定性分析上得到了应用. 文献[7] 利用微分几何方法讨论了微分代数系统的局部结构理论，其主要基础是微分流形上的微分方程基本理论. 文献[8] 将微分代数系统归结为受限微分方程，研究受限微分方程的状态空间形式，给出了线性化问题和 Hopf 分支理论问题的有关结果. 文献[9]讨论了仿射非线性微分代数系统的输入输出解耦问题，给出了使系统通过静态反馈达到输入输出解耦控制问题的条件，且得到使系统渐近镇定的反馈控制.

同微分方程一样，平凡解在李雅普诺夫意义下的稳定性是微分代数系统的重要研究课题，同时李雅普诺夫第二方法仍然成为研究微分代数系统平凡解稳定性的有

效方法. 近年来,该方面的研究有了长足的发展,产生了许多重要结果,且应用于电力系统. 1990 年,Hill 在研究电力系统暂态稳定性时提出并研究了微分代数系统的稳定性,但是在文献[11]中,或者由于复杂的李雅普诺夫函数难寻找,或者由于所需计算的函数矩阵的逆矩阵难计算,使得给出的结果很难应用到一般的系统.

我们回顾过去的研究成果可见,多数工作的主要思想都基于这样两点:一是把微分代数系统局部视为常微分方程,从而发展平行于常微分方程的理论系统,如平凡解的稳定性、渐近稳定性等;二是针对微分代数系统的特定形式,推广稳定性的概念,研究各种特殊的稳定性. 但是,前者局部微分方程的解析形式在一般情况下是不能直接给出的,因而影响了基本定理推广的广泛性;后者也因稳定性概念的特殊性往往使得相关结果的实用性受到限制. 文献[13]把微分代数系统局部归结为流形上的微分方程,就是利用一种受限微分方程形式的特殊结构,建立平凡解稳定性的基本理论. 文献[14]在改进 Hill 提法的基础上,针对如下微分代数系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ 0 = g(x,y). \end{cases} \tag{1.1}$$

给出了稳定性的几个简洁判据. 文献[8]研究的也是式(1.1)形式的微分代数方程.

我们考虑几种常见类型的微分代数方程

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,p), \\ 0 = g(x,y,p). \end{cases} \tag{1.2}$$

其中, $(f,g):\mathbf{R}^{n+m+q} \to \mathbf{R}^{n+m}$ 是光滑的,记

$$\Sigma_p = \{(x,y) \mid g(x,y,p) = 0\},$$

$$S_p = \{(x,y) \in \Sigma_p \mid \det g_y(x,y,p) = 0\}.$$

则当 $(x_0,y_0) \in \Sigma_p \backslash S_p$ 时,由隐函数定理,在 $x = x_0$ 附近存在唯一 $y = y(x)$ 使得 $(x,y(x)) \in \Sigma_p$. 将 $y = y(x)$ 代入(1.2)可得方程的唯一解. 但若 $(x_0,y_0) \in S_p$,则(1.2)在 (x_0,y_0) 附近可能解不唯一,或不存在. S_p 称为奇异面.

在电力系统中 $x \in \mathbf{R}^n$ 为动态变量,一般是发电机的电压和转角; $y \in \mathbf{R}^m$ 为瞬时变量,一般是母线电压; $p \in \mathbf{R}^q$ 通常是系统参数、元件参数及负荷和电压设定值等操作参数.

可见微分代数方程(1.1)属于(1.2)的类型. 一个隐式微分方程 $F(x,\dot{x}) = 0$ 可以化成

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ 0 = F(x,y). \end{cases} \tag{1.3}$$

微分代数方程

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u), \\ 0 = g(x). \end{cases} \tag{1.4}$$

就是许多空间飞行器轨道控制问题的抽象数学模型,这里 x 与 f 的维数是 n , u 与

g 的维数是 m ，$m \leqslant n$ ，x 为状态变量或微分变量，u 称为控制变量或代数变量. 微分变量可以是飞行器的位置、速度、重量等.

不考虑控制 u 与时间 t ，式(1.4)的特别情况为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ 0 = g(x). \end{cases}$$

常见的还有仿射非线性微分代数系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_{11}(x) + f_{12}(x)v + g(x)u, \\ 0 = f_{21}(x) + f_{22}(x)v + h(x)u, \\ y = m(x) + n(x)v. \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ ，$v \in \mathbf{R}^m$ ，$u \in \mathbf{R}^p$ 且 $m < n$. $f_{ij}(x)(i, j = 1, 2)$，$g(x)$，$m(x)$ 和 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上解析. 视 v 为受限输入变量，u 为控制输入变量，y 为控制输出变量. 由于出现了由系统(1.5)的第二式所定义的受限条件，受限输入变量 v 被视为动态方程的额外变量，因此是不能直接改变的. 控制变量 u 则可以用来调节式(1.5)的解. 由非线性微分代数系统(1.5)所描述的系统是 广义系统的一个重要类型.

线性时变微分代数系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ 分别为 n 维，m 维向量. $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$，$\boldsymbol{D}(t)$ 分别为适当阶数的连续可微函数矩阵. 实际上式(1.6)是一类受限等价广义系统.

有时微分代数系统指的都是非线性广义系统的情况，微分代数系统是广义系统最为典型且极为普遍的一类系统.

在某些文献中又称广义系统为奇异系统（singular systems）、描述系统（descriptor systems）、隐式系统（implicit systems）、广义状态系统（generalized state systems）、半状态系统（semistate systems）及微分代数系统（differential-algebraic systems）等，一般用微分代数方程描述为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \\ \boldsymbol{y}(t) = g(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t). \end{cases} \tag{1.7}$$

其中，$f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$ 和 $g(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$ 表示 $\boldsymbol{x}(t)$ ，$\boldsymbol{u}(t)$ 和 t 的 n 维向量函数；$\boldsymbol{x}(t)$ ，$\boldsymbol{u}(t)$ 和 t 依次表示状态向量，输入向量及时间变量；$\boldsymbol{y}(t)$ 为输出向量；$\boldsymbol{E}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$. 一般地，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{E}(t)] < n$. 当 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{E}(t)] = n$ 时，式(1.7)成为正常系统.

特别地，线性时不变连续广义系统通常表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t). \end{cases} \tag{1.8}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{y}(t) \in \mathbf{R}^q$ ，分别是系统的状态向量、控制向量及输出向量；$\boldsymbol{E} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ，$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$，$\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}^{q \times n}$ 均为实常数矩阵. 在不至于引起混

淆的情况下，大多数研究者也称(1.8)为广义系统. 在假定广义系统(1.8)正则的情况下，对于给定的允许初态，广义系统(1.8)的解存在且唯一. 另外，广义系统(1.8)在第二种受限等价变换下[23]，可以化为微分代数系统的形式.

相应地，线性时不变离散广义系统表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\,u(k), \\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(k), k=0,1,\cdots,v. \end{cases} \tag{1.9}$$

值得一提的是，就系统描述形式来说，正常系统的描述形式本身就有许多致命的缺陷. 例如，在不考虑逆系统及 PD 反馈时，正常系统的描述形式是封闭的. 但是，实际情况往往需考虑逆系统，此时逆系统中一般包含系统输出的导数. 而且，对一给定的线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\,u$ 来说，当其在微分反馈作用下，即 $u=\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}$ ，则可得闭环系统为 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ，这里 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})$ 有时是奇异的. 所以，在以上情形下，正常系统描述形式就不具封闭性，而广义系统所描述形式具有封闭性. 从这个意义上说，广义系统是正常系统的更一般形式.

1.2 若干微分代数系统的应用实例

下面介绍几个微分代数系统或广义系统的实际例子来说明它的应用背景. 主要参考文献为[1],[11],[15],[44]～[48]等.

例 1.1 在电力系统中，一类传感器的系统模型形式为

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= 2\pi f_0(\omega-1), \\ M\dot{\omega} &= P_m - D(\omega-1) - f(\delta,E_q',\theta,V,\varphi), \\ \frac{T_{do}'}{x_d-x_d'}\dot{E}_q' &= K(\delta,E_q',\theta,V,\varphi), \\ 0 &= P_d - g(\delta,E_q',\theta,V,\varphi), \\ 0 &= Q_d - h(\delta,E_q',\theta,V,\varphi). \end{aligned}$$

其中，f_0 为同步频率；δ 为发电机转子运行角；ω 为角速度；P_m 为机械功率；T_{do}' 为 d 轴暂态开路时间常数；M 为机械转动惯量；D 为阻尼系数；x_d 和 x_q 分别为 d 轴和 q 轴同步电抗；x'_d 为 d 轴暂态电抗（$x'_d<x_d,x_q$）；E'_q 为暂态电抗 x'_d 后的电势；V 为电压相量；θ 为转子的电角度. 这是一个典型的一般式微分代数方程描述.

例 1.2 含管理在内的石油催化裂化过程，其简化模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u + F_1f, \\ 0 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u + F_2f. \end{aligned}$$

其中，$x_1\in\mathbf{R}^{n_1}$ 为被调节量，如再生温度、滑阀位置、鼓风机能力等；$x_2\in\mathbf{R}^{n_2}$ 由影

响企业效益和反映企业管理政策的一些量组成，如压力、油浆回收率、重油回收率等；$u \in \mathbf{R}^r$ 为调节量；f 是外干扰. 它是一个典型的连续线性广义不确定系统.

例 1.3 具有非线性负载的电力系统模型为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_g &= -\boldsymbol{S}[P_g(\boldsymbol{a}_g, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{v}) - P_M], \\ \dot{\boldsymbol{a}}_g &= \boldsymbol{r}_g, \\ 0 &= P_l(\boldsymbol{a}_g, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{v}) + P_d, \\ 0 &= (\boldsymbol{v})^{-1}[Q_b(\boldsymbol{a}_g, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{v}) + Q_d(\boldsymbol{v})]. \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{a}$ 为与参考总线有关的总线角向量；$\boldsymbol{r}$ 为相关发电机的频率向量；$\boldsymbol{v}$ 是总线电压的振幅向量；P,Q 为实电抗功率；下标 g 和 l 分别表示网络中的发电机和负载总线；P_M 为机械输入电力；$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}_g \boldsymbol{M}_g^{-1} \boldsymbol{T}_g$，$\boldsymbol{M}_g$ 为惯性常对角矩阵；$\boldsymbol{T}_g$ 为具有元素 1 或 −1 组成的相关矩阵；电力 P_g, P_l 和 P_b 由式

$$P_b = (P_l, P_g),$$

$$P_{bi}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_j \boldsymbol{B}_{ij} \sin(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_j),$$

$$Q_{bi}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = -\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{V}_j \boldsymbol{B}_{ij} \cos(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_j)$$

给出. 该系统为典型的非线性微分代数系统模型.

例 1.4 神经网络系统

$$\dot{x}_i = a_i(x_i)\left[b_i(x_i) - \sum_{k=1}^{L} w_{ik} \frac{d_i(k)}{s(x_i)} \prod_{j \in I_k} y_j^{d_j(k)}\right],$$

$$0 = a_L(x_L)\left[b_L(x_L) - \sum_{k=1}^{L} w_{Lk} \frac{d_L(k)}{s(z_L)} \prod_{j \in I_k} y_j^{d_j(k)}\right].$$

其中，x_i, z_L 为第 i 个神经元的状态，$i = 1, 2, \cdots, n$；a_i 为对应神经细胞相关生存期标度；$b_i(\cdot)$ 为对应接受力和时延，也可能包括细胞的自我反馈；$s(\cdot)$ 为神经元的输入；w_{ik} 为网络的连接权；$\{I_1, I_2, \cdots, I_L\}$ 为 $\{1, 2, \cdots, m+n\}$ 的 L 个无序子集. 此例是典型的广义大系统模型.

例 1.5 熟知的 Leontief 动态投入产出模型表示为

$$\boldsymbol{B} x(k+1) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) x(k) + \omega(k) + d(k),$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为消耗系数矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为投资系数矩阵，均具有相应的阶数；$x(k)$ 为 k 时刻的产量；$\omega(k) + d(k)$ 为 k 时刻的最终产品量，其中 $d(k)$ 为确定性的，被称为计划中的最终消费；$\omega(k)$ 为市场波动对消费的影响. 在多部门的经济系统中，当各部门之间不存在投资时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中对应的行为零，从而 $\boldsymbol{B}$ 不满秩，于是此系统表示的是带有不确定项的离散广义系统.

例 1.6　一个电子网络模型表示为

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -r & r & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} \dfrac{N_1}{N} \\ \dfrac{N_2}{N} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t),$$

其中,$\boldsymbol{x}(t) = [x_1^{\mathrm{T}}(t) \quad x_2^{\mathrm{T}}(t) \quad x_3{}^{\mathrm{T}}(t) \quad x_4^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, $x_i(t)$ $(i=1,2,3)$表示通过相应电感器的电流;$L_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 个电感器的电感;$x_4(t)$ 表示流经电阻为 r 的电阻器的电压降;N_1 ,N_2 ,N 表示互感器系数,它们都是实数域上的待定数. 这个模型具有典型的广义系统结构.

例 1.7　水翼艇的纵向运动模型表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}(t) \\ \dot{g}_1(t) \\ \dot{g}(t) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0 & -a_{15} & 0 & a_{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{35} & 0 & -a_{36} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h(t) \\ g_1(t) \\ g(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ b_{21} \\ 0 \end{bmatrix} r_1(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} b_{12} \\ 0 \\ b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} r_2(t) + \begin{bmatrix} z_s \\ 0 \\ m_s \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_1(t) = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13} \quad c_{14} \quad c_{15} \quad c_{16}]\, z(t),$$

$$y_2(t) = [c_{21} \quad c_{22} \quad c_{23} \quad c_{24} \quad c_{25} \quad c_{26}]\, z(t),$$

其中

$$z(t)^{\mathrm{T}} = [h_1(t) \quad \dot{h}_1(t) \quad h(t) \quad g_1(t) \quad \dot{g}_1(t) \quad g(t) \quad]^{\mathrm{T}}.$$

且 $h(t)$ 表示水翼艇的重心偏离标准位置的距离,即水翼艇由海的波浪引起的垂直方向的位置变化;$h_1(t)$ 表示水翼艇的纵向偏移角度;$r_1(t)$,$r_2(t)$ 分别表示前后襟翼角的控制量;z_s ,m_s 分别表示干扰波浪力和干扰波浪力矩;c_{ij} $(i=1,2,\ j=1,2,3,4,5,6)$表示系统状态的组合系数;a_{ij} 和 b_{ij} 随波浪的不同呈慢性变化而往往使

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是奇异的. 这是一个带有干扰的广义系统模型.

例 1.8 单机多产品批量调度中的时间平衡方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(k+1) = \begin{bmatrix} d_{1t}-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & d_{2t}-1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & d_{3t}-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nt}-1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \tau_0,$$

其中，d_{it} 表示单位的 i 种产品在一个循环生产周期平均的满足市场需求的时间；$x(k)$ 中的分量表示循环生产中的产量，也表示生产时间；τ_0 表示生产准备时间总和. 这是一个离散广义系统模型.

例 1.9 Hopfield 神经网络模型的输入包括两部分，一部分是模型的外部输入，另一部分是神经元输出信号的加权和. 模型可表示为

$$\begin{bmatrix} c\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -g\boldsymbol{I} & 0 & 0 & -\boldsymbol{W}_1 \\ 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{W}_2 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -g(\boldsymbol{x}_1) \\ -i_B \\ -f(\boldsymbol{x}_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}(t) = [0 \quad \boldsymbol{I} \quad 0 \quad 0]\, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}_1{}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}_2{}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}_3{}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}_4{}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$$

其中，$\boldsymbol{W}_1$ 和 $\boldsymbol{W}_2$ 是两个加权矩阵；$f(\boldsymbol{x}_3)$ 和 $-g(\boldsymbol{x}_1)$ 是非线性函数. 这是一个非线性广义系统模型.

例 1.10 两机械手协助抓一物体的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1(q_1(t)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_2(q_2(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \\ \dot{p}(t) \\ \dot{f}_1(t) \\ \dot{f}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(t) + G_1(q_1(t), p_1(t)) + J_1{}^{\mathrm{T}}(q_1(t)) f_1(t) \\ T_2(t) + G_2(q_2(t), p_2(t)) + J_2{}^{\mathrm{T}}(q_2(t)) f_1(t) \\ -f_1(t) - f_2(t) - mg \\ H_1(q_1(t)) - P \\ H_2(q_2(t)) - P \end{bmatrix}$$

其中，$p_i(t) = \dot{q}_i(t)$；$\boldsymbol{M}_i(q_i(t))$ 表示惯性矩阵；$G_i(q_i(t), p_i(t))$ 表示 Coriolis 离心和引力效应；m 为所抓物体的质量；$T_i(t)$ 为第 i 个机械手的输入力矩，一般视为控制量；P 表示所抓物体的中心位置坐标；$H_1(q_1(t))$ 和 $H_2(q_2(t))$ 分别表示两机械手的直接运动学关系；$\boldsymbol{J}_i(q_i(t))$ 表示 Jacobian 矩阵. 这是一个非线性广义系统模型.

再如，空间运载卫星重返大气层模型为非线性高指标广义连续系统，飓风的预报模型(飓风形成过程中由于空气和水的运动所描述的动态方程和由于气体和热力学定律及毗邻环境的关联条件所描述的代数限制)，受限机器人模型皆为微分代数系统.

1.3 双线性广义系统

双线性广义系统是非线性微分代数系统的一个特例. 为了更好的研究双线性广义系统,我们首先了解出于实践需要的双线性系统.

一个连续非线性系统可以用下列方程描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t), \tag{1.10}$$

式中, $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量; $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是输入向量; $\boldsymbol{f}(*)$ 表示非线性函数向量. 因为 $\boldsymbol{f}(*)$ 的形式一般比较复杂且无法统一,多数非线性系统只能个别地处理,这给非线性控制系统的分析和设计带来很大的困难. 因此,长期以来,人们一直企图寻找一些便于研究简化非线性系统的途经. 其中一类研究是基于下列状态变量线性的非线性系统

$$\dot{x}=F(\boldsymbol{u},t)\boldsymbol{x}+f(\boldsymbol{u},t). \tag{1.11}$$

这类系统称为状态线性系统,也称为变结构线性系统,因为可以将其看作参数随输入变量变化的线性系统. 另一类较多的研究是基于下列输入变量线性的非线性系统

$$\dot{x}=G(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}+g(\boldsymbol{x},t). \tag{1.12}$$

该系统称为输入线性系统,也称为仿射系统,早期的研究是由美国学者进行的.

如果将上述两类系统进一步简化,即构造一个关于状态变量和控制变量分别都是线性的,而总体上则是非线性的如下系统

$$\dot{x}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{N}(t)\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}, \tag{1.13}$$

式中, $\boldsymbol{A}(t)\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}(t)\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{N}(t)\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{u}$ 称为双线性项,可以表示为

$$\boldsymbol{N}(t)\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i(t)\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{u}_i. \tag{1.14}$$

所谓双线性系统就是由此而得名的. 如此构造的双线性系统是形式上最简单,且最接近线性系统的一类非线性系统.

系统的数学描述或数学模型是表示一个系统的输入、状态或输出向量之间关系的数学表达式.

将(1.13)和(1.14)结合化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i(t)\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{u}_i(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \tag{1.15}$$

式(1.15)就成为我们的主要研究对象.

双线性系统的数学模型,如式(1.15)或式(1.13)所示. 该描述就是关于输入、状态或输出向量分别都是线性的,而且有输入向量与状态或输出向量乘积项(双线性项)的一种特殊的非线性数学描述形式. 式(1.15)是时变、连续时间确定性的双线性系统状态方程. 在时不变的情况下,则有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{x}(t)u_i(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\ ,\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0. \tag{1.16a}$$

设其输出方程为

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\ . \tag{1.16b}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量；$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是输入向量，记 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t))^{\mathrm{T}}$ ；$\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^l$ 是输出向量；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{N}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$；$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times m}$；$\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{l\times n}$是常数矩阵.

可以看出，双线性系统就是在线性系统的基础上，增加了控制向量与状态向量的乘积项(双线性项)，该项包含了双线性系统的全部非线性信息，因此，它是一种最简单的非线性系统. 如果 $\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{0}$ ，则退化为线性系统.

在式(1.16) 中，如果 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ ，则有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_iu_i(t)]\boldsymbol{x}(t)\ , \tag{1.17}$$

称为状态齐次双线性系统. 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ ，记 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$ ，则有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{x}(t)u_i(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\&=\sum_{i=1}^{m}[\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{x}(t)+b_i]u_i(t),\end{aligned} \tag{1.18}$$

称为输入齐次双线性系统. 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ ，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ ，则有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{x}(t)u_i(t)\ , \tag{1.19}$$

称为严格双线性系统.

此外，在双线性系统研究中，还有其他的表达式，如

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{x}(t)u_i(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t)\ , \tag{1.20}$$

式中，$\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^p$ 为与另一 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$ 独立的控制向量. 一般称 $\boldsymbol{u}$ 为倍增控制向量，称 $\boldsymbol{v}$ 为叠加控制向量. 这类系统称为独立的叠加和倍增控制向量双线性系统.

为了更好地描述或处理实际过程，除了连续时间、确定性的系统外，还有离散时间、随机性系统对应的状态方程. 与式(1.16) 对应的时不变离散时间确定性的双线性系统状态方程为

$$\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(k)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{X}(k)u_i(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(k), \tag{1.21a}$$

$$\boldsymbol{Y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(k). \tag{1.21b}$$

式中 $\boldsymbol{X}(k)\in\mathbf{R}^n$ 是状态变量；$\boldsymbol{U}(k)\in\mathbf{R}^m$ 是输入控制，$\boldsymbol{U}(k)=(u_1(k),\ u_2(k),\ \cdots,u_m(k))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}(k)\in\mathbf{R}^l$ 是输出向量. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{N}_i$ ，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是适当维数的常数矩阵.

在式(1.21) 中分别取 $\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{0}$ ，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ ，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ ，可以得到类似式(1.17) ～ (1.20) 的特殊情况，这里就不重述了.

由于双线性系统在本质上是非线性的，它的描述形式或数学结构的差别会导

致其特性的不同. 不少在线性系统研究中行之有效的数学表达式,在双线性系统中一般无法直接使用,如传递函数. 或者形式上可以对应起来,但失去实用意义.

近十几年,随着控制理论的不断发展及向其他学科的渗透,双线性系统的研究逐渐深入与完善,研究成果不断涌现. 文献[58]～[65]进一步研究了有关正常的双线性系统稳定与镇定. 文献[67]～[69]研究了正常的双线性系统的鲁棒稳定控制与镇定. 文献[69]～[72]分别设计了双线性系统的稳定观测器、鲁棒观测器、耗散观测器、故障检测观测器. 文献[73]还利用了一种微分代数方法给出了基于双线性系统的跟踪观测器.

在双线性系统有关研究文献中,我们可以发现,许多关于结构特征、实现、可控性、最优控制等都是基于一些特殊形式的双线性系统来研究的,这主要是因为这些系统结构简单,便于分析且可以得出比较满意的结果. 同时,这些特殊的、结构简单的双线性系统在某些场合,特别是生态、社会经济等过程中,可以找到它们的应用实例. 面向工程的研究也可以见到,如核反应器、精馏塔、简单化学反应器、固定床反应器等等. 另外,还有文献也探讨了双线性控制理论对于实际过程的应用问题. 通过实际应用、实验装置试验或计算机仿真证明,双线性控制系统确实比线性控制系统有较好的性能. 由于双线性系统增加了非线性项,双线性系统控制的研究比线性系统要困难得多,目前它的研究成果远没有线性系统那样成熟. 双线性系统控制的许多方面还有待于人们进一步的开拓与研究.

双线性系统是从化学、物理、经济、生态、生物等过程中的许多现象进行描述而得到的数学模型,它具有一定的实际背景. 在上述正常的双线性系统中,我们已经叙述了. 然而,一方面,与正常系统相比,广义系统具有更大的保持系统物理等特性的能力;另一方面,有些实际问题,利用正常的双线性模型不足以描述其本身的特性,广义系统比正常系统更适合描述实际问题,因此研究双线性广义系统不但有实际价值,也具有理论意义. 于是双线性广义系统就应运而生了.

式(1.15)对应的双线性广义系统为:

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{N}_i(t)\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{u}_i(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t). \tag{1.22}$$

目前,双线性广义系统研究还处于初始和发展阶段. 人们对双线性广义系统的研究还不是很多. Campbell S L 在文献[76]中对广义双线性系统进行了初步的研究. Lewis F L 等,首先利用块脉冲函数分析了正常双线性系统[77],接着在文献[78]中,又利用块脉冲函数分析了双线性广义系统. 21 世纪初期,国外学者研究了时变广义线性系统的状态分析. 在文献[80]中,研究者对广义双线性系统进行了残差传感器设计,使理论向应用过渡. 中国学者也探讨了广义双线性系统的镇定问题. 可以相信,广义双线性系统理论一定会日趋成熟,其应用将会日益普遍.