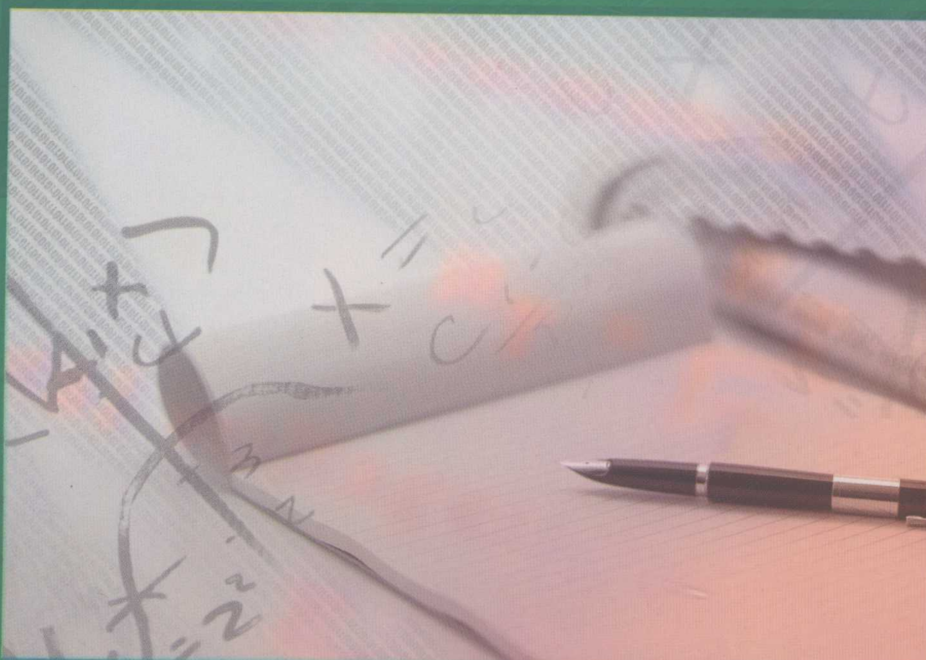
高等教育工科数学系列教材

离散数学



魏贵民
胡　灿
王玉兰
梁　莉
编著

LISANSHUXUE

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等教育工科数学系列教材

离散数学

魏贵民　胡　灿
王玉兰　梁　莉　编著

高等教育出版社

内 容 提 要

《离散数学》是高等教育工科数学系列教材之一，全书共五篇．主要内容包括集合论、整数论、代数结构论、数理逻辑论和图论．全书主要内容包括关系与映射、集合的势、整除与剩余类、群、环与域、格与布尔代数、命题逻辑、谓词逻辑、图论基础和几种特殊的图等十章．每节均配有习题，书末附有名词索引．

本教材内容由浅入深，结构紧凑合理，有条不紊，可读性很强．具有很强的科学性和教学适用性，可作为数学类及计算机类专业离散数学课程的教材或参考书，也可供其他工程技术人员自学参考．

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/魏贵民等编著．—北京：高等教育出版社，2007.2
ISBN 978-7-04-021764-3

Ⅰ．离… Ⅱ．魏… Ⅲ．离散数学-高等学校-教材
Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 020457 号

责任编辑 徐 东 **封面设计** 吴 昊 **责任印制** 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800-810-0598
总 机	010-58581000	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
排 版	南京理工出版信息技术有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	上海华文印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2007 年 3 月第 1 版
印 张	12.75	印 次	2007 年 3 月第 1 次
字 数	252 000	定 价	16.00 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

物料号 21764－00

前　言

《离散数学》是高等教育工科数学系列教材之一，主要介绍离散数学的基本知识．教材分集合论、整数论、代数结构论、数理逻辑论和图论五篇，主要内容包括关系与映射、集合的势、整除与剩余类、群、环与域、格与布尔代数、命题逻辑、谓词逻辑、图论基础和几种特殊的图等十章．每节配有习题，书末附有名词索引．本教材主要特色体现在以下几个方面．

一、结合现代信息技术的发展，选择合理的教学内容和体系结构

作为现代数学重要基础的离散数学，随着计算机技术和信息安全技术的发展，日益体现出其重要性．针对离散数学知识点多，内容丰富，难度较大的特点，本书在保证教学内容的完整性和科学性的前提下，结合现代信息技术的发展，对离散数学传统内容和现代信息安全技术基础知识进行重新整合，选择了合理的教学内容和体系结构．本书结构紧凑合理，以最易学的集合论开篇，然后安排信息安全技术重要知识基础的整数论和现代科学技术关键知识的代数结构论，最后以具有很强实用性的数理逻辑论和图论结尾．

二、注重教学实际需要，贯彻易教易学的原则

教材对知识点的编排由浅入深，层层深入，使人更易读、更易理解．章节的安排符合教学规律，注重消化教学难点，努力用最简捷的途径系统讲授相应的数学知识．

三、选择适合的教学定位

本书适应高等教育从精英教育向大众教育过渡的需要，合理安排教学内容，适当选择例题和习题难度，尽量使文字通俗易懂，以适应和满足当前一般工科院校的教学实际．

本系列教材由成都理工大学魏贵民教授任主编，胡灿、魏友华任副主编．

《离散数学》由魏贵民、胡灿、王玉兰、梁莉执笔编写，郭科教授主审．本教材的出版得到了高等教育出版社编辑和成都理工大学教务处领导的大力支持，在此一并表示衷心的感谢．

虽然我们努力使本书成为一本既有改革新意又便于教学的教材，但由于编者水平所限，书中的不足与考虑不周之处肯定很多，错误也在所难免，我们希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来．

编　者

2006 年 12 月

目　　录

第一篇　集　合　论

第一章　关系与映射 …… 1

第一节　关系的概念 …… 1

第二节　关系的运算 …… 4

第三节　集合的等价关系与分类 …… 7

第四节　偏序关系 …… 8

第五节　映射 …… 12

第二章　集合的势 …… 15

第一节　集合的势 …… 15

第二节　可数集 …… 17

第三节　连续统 …… 19

第二篇　整　数　论

第三章　整除与剩余类 …… 22

第一节　整除 …… 22

第二节　最大公因数 …… 24

第三节　最小公倍数 …… 28

第四节　质数 …… 31

第五节　剩余类的运算 …… 35

第三篇　代数结构论

第四章　群 …………………………………………………………………… 38

　第一节　置换的运算 ……………………………………………………… 38

　第二节　半群 ……………………………………………………………… 42

　第三节　群的概念与例 …………………………………………………… 44

　第四节　子群 ……………………………………………………………… 48

　第五节　正规子群、群的同态与同构 …………………………………… 51

第五章　环与域 …………………………………………………………… 56

　第一节　环的概念与例 …………………………………………………… 56

　第二节　理想与环同态 …………………………………………………… 58

第六章　格与布尔代数 …………………………………………………… 61

　第一节　格 ………………………………………………………………… 61

　第二节　格的性质 ………………………………………………………… 65

　第三节　几种特殊的格 …………………………………………………… 70

　第四节　布尔代数 ………………………………………………………… 78

第四篇　数理逻辑论

第七章　命题逻辑 ………………………………………………………… 87

　第一节　命题及联结词 …………………………………………………… 87

　第二节　命题公式及其符号化 …………………………………………… 94

　第三节　命题公式的分类与等价 ………………………………………… 99

　第四节　全功能联结词集 ………………………………………………… 103

　第五节　对偶 ……………………………………………………………… 108

第六节　范式…………………………………………………………… 110
第七节　命题演算的推理理论……………………………………… 116
第八章　谓词逻辑………………………………………………… 124
第一节　谓词逻辑的基本概念……………………………………… 124
第二节　谓词公式及其分类………………………………………… 128
第三节　谓词演算的永真式………………………………………… 133
第四节　前束范式…………………………………………………… 137
第五节　谓词演算的推理理论……………………………………… 139

第五篇　图　　论

第九章　图论基础………………………………………………… 143
第一节　图的基本概念……………………………………………… 143
第二节　路径、回路及连通图 ……………………………………… 150
第三节　图的矩阵表示……………………………………………… 156
第十章　几种特殊的图…………………………………………… 163
第一节　欧拉图……………………………………………………… 163
第二节　哈密顿图…………………………………………………… 166
第三节　二部图……………………………………………………… 168
第四节　平面图……………………………………………………… 172
第五节　无向树……………………………………………………… 177
第六节　有向树……………………………………………………… 182
索引………………………………………………………………… 185
参考文献…………………………………………………………… 192

第一篇　集　合　论

集合是数学中一个原始的概念.集合的理论是整个数学理论的基础.我们假定读者对于集合、元素、子集、并集、交集、补集、空集已经十分熟悉,这里不再重述这些内容,本篇着重介绍的是在离散数学课程中有重要地位的关系与映射,以及集合的势等内容.

第一章　关系与映射

第一节　关系的概念

一、直积集

利用已知的集合,可以诱导出一些新的集合.例如,已知集合 A 与集合 B,可以定义集合

$$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

这个集合所有的元素是一切序偶$(a,\ b)$,其中 a 是集合 A 的元素,而 b 是集合 B 的元素,集合 $A\times B$ 恰好包含所有这样的序偶. $A\times B$ 叫做集合A 与集合B 的直积集.

特别地,将直积集 $A\times A$ 记为A^2,即 A^2 是由集合 A 的元素的一切序偶为其所有元素构成的集合.

例如,记 $\mathbf{R}$ 是实数轴的点集,则 $\mathbf{R}^2$ 是平面直角坐标系的点集.

类似地,可以定义集合 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 的直积集为集合

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}.$$

特别地,当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时,将 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 记为 A^n.

二、关系

在日常生活中,人们都能感受到关系这一概念,例如,同学关系、师生关

系、父子关系、实数的大于关系、小于关系、整数的整除关系等等. 那么,什么叫做"关系"? 本节,我们要用集合来描述"关系"这一概念. 不难看到,每一种关系都描述了在某一集合中两个元素之间的一种特征,而这种特征可以用一个集合描述.

定义 1　设集合 A 与集合 B,集合 $A\times B$ 的一个子集 R 叫做从集合 A 到集合 B 的二元关系.

如果 $(a, b)\in R$,就说 A 的元素 a 与 B 的元素 b 有关系 R,记为 aRb;否则,就说 a 与 b 没有关系 R,记为 $a\not R b$.

A 的子集

$$D(R)=\{a \mid a\in A,\ \exists b\in B,\text{使得 } aRb\}$$

叫做关系 R 的定义域.

B 的子集

$$C(R)=\{b \mid b\in B,\ \exists a\in A,\text{使得 } aRb\}$$

叫做关系 R 的值域.

特别地,集合 $A\times A$ 的一个子集叫做集合 A 上的二元关系.

类似可知,集合 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的一个子集叫做集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个 n 元关系.

以下,我们主要讲二元关系.

$\varnothing$, $A\times B$ 是集合 $A\times B$ 的子集,分别叫做集合 A 到集合 B 的空关系、全关系.

$A\times A$ 的子集 $\{(a, a) \mid a\in A\}$ 叫做集合 A 上的恒等关系.

例 1　实数集 $\mathbf{R}$ 上的大于关系 $>$ 可定义为:

$$>=\{(x, y) \mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R},\text{且 } x>y\}.$$

例 2　在计算机领域内,关系的概念到处存在. 在数据结构中,若是表格,则一张表格反映了此表格内空间的几种关系. 如在虚拟存贮器的页表中,它反映了虚页号与实页号的关系(见表 1-1).

表 1-1　虚实页号对照表

虚页号	实页号
0	13
1	18
2	15
3	11

表 1-1 中所表示的关系可写成

$$R=\{(0, 13), (1, 18), (2, 15), (3, 11)\}.$$

三、关系的图表示法

有限集 A 上的二元关系 R 常用图直观表示. 方法是将 A 的元素用点表示,当且仅当 aRb 时,用有向线段将表示 a 的点到表示 b 的点连起来.

例 3 设有 6 个程序 $p_1, p_2, \cdots, p_6$,它们之间有一定调用关系

R: p_1Rp_2, p_3Rp_4, p_4Rp_5, p_5Rp_2,
p_2Rp_6, p_3Rp_1.

这个关系是集合 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_6\}$ 上的关系

$$R = \{(p_1, p_2), (p_3, p_4), (p_4, p_5), (p_5, p_2), (p_2, p_6), (p_3, p_1)\}.$$

可用图 1-1 表示.

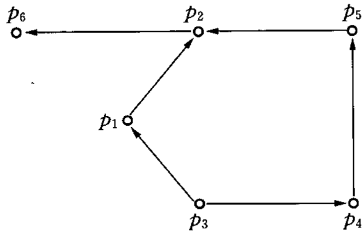


图 1-1

四、关系的矩阵表示法

有限集 A 到有限集 B 的二元关系 R 用矩阵方法表示也是十分有用的. 方法是将 A 与 B 的元素分别任意排序,例如,

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_s\},$$

$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_t\},$$

记

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, \text{当 } a_i \not R b_j \text{ 时}, \\ 1, \text{当 } a_i R b_j \text{ 时} \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots, t),$$

那么 $s \times t$ 矩阵 $M_R = (m_{ij})_{s \times t}$,便与 R 互相确定,叫做关系 R 的矩阵. 例如,集合 A 到集合 B 的空关系 $\varnothing$ 的矩阵是零矩阵 O,集合 A 上的恒等关系的矩阵是单位矩阵 E,又如上面例 3 的关系 R 的矩阵是

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

习 题 1-1

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\},$$

$$S = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 4)\},$$

用图表示关系 R，S，写出 R，S 的矩阵.

2. 设集合 $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 且\ x \neq 0\}$，试用集合表示 A 上的倒数关系.

第二节　关系的运算

本节给关系引入运算.

一、关系的复合运算

定义 1　设 R 是集合 A 到集合 B 的关系，S 是集合 B 到集合 C 的关系，则集合 $A \times C$ 的子集

$$\{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \exists b \in B\ 使得\ aRb, 且\ bSc\}$$

叫做关系 R 与关系 S 的复合关系，记为 $R \circ S$.

$R \circ S$ 是集合 A 到集合 C 的一个关系.

特别地，当 R，S 是集合 A 上的二元关系时，$R \circ S$ 也是集合 A 上的二元关系.

我们还可以归纳定义关系的幂：

$$R^1 = R, \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

易知，

$$R^m \circ R^n = R^{m+n},$$

$$(R^m)^n = R^{mn}.$$

复合关系是关系复合运算的结果. 复合运算满足结合律.

定理 1　设 R，S，T 分别是集合 A 到集合 B，集合 B 到集合 C，集合 C 到集合 D 的关系，则有

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

证　设 $(a, d) \in (R \circ S) \circ T$，即 $a(R \circ S) \circ Td$，则 $\exists c \in C$，使得 $a(R \circ S)c$，cTd. 由 $a(R \circ S)c$ 知 $\exists b \in B$，使得 aRb，bSc. 这样，由 bSc，cTd 知 $b(S \circ T)d$，再由 aRb 便知 $aR \circ (S \circ T)d$. 即 $(a, d) \in R \circ (S \circ T)$，故

$$(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T).$$

同理可证

$$R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T.$$

故

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

关系的复合运算可以用关系的矩阵运算表示.

设
$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\},$$
$$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_s\},$$
$$C=\{c_1, c_2, \cdots, c_t\}.$$

R, S 分别是从 A 到 B,从 B 到 C 的关系. 设它们的矩阵

$$M_R=(p_{ij})_{r\times s}, \qquad M_S=(q_{ij})_{s\times t},$$

记
$$m_{ij}=\max_{1\leqslant k\leqslant s}(\min(p_{ik}, q_{kj}))$$
$$(i=1, 2, \cdots, r;\ j=1, 2, \cdots, t),$$

那么,矩阵

$$M_{R\circ S}=(m_{ij})_{r\times t}$$

便是复合关系 $R\circ S$ 的矩阵.

例 1 设集合 $A=\{1, 2, 3\}$, A 上的关系

$$R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\},$$

$$S=\{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\},$$

那么

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$M_S=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$M_{R\circ S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$M_{R\circ R}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$M_{S\circ S}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$M_{S\circ R}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以

$R\circ S=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3)\}$,

$R\circ R=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)\}$,

$S\circ S=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (3,\ 3)\}=S$,

$S\circ R=\varnothing$.

从例 1 可以看出，虽然关系的复合运算满足结合律，但不满足交换律.

二、逆关系

关系的求逆关系的运算也是十分重要的运算，这是关系的一元运算.

定义 2　设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系，则从 B 到 A 的关系

$$\widetilde{R}=\{(b,\ a)\mid(a,\ b)\in R\}$$

叫做 R 的逆关系.

例 2　设 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{a,\ b,\ c\}$，关系

$$R=\{(1,\ a),\ (2,\ b),\ (2,\ c)\}$$

的逆关系 $\widetilde{R}=\{(a,\ 1),\ (b,\ 2),\ (c,\ 2)\}$.

一个关系的逆关系可用图形及矩阵方法表示：将关系 R 的图形中连结各点的有向线段改为反方向，则得到 R 的逆关系 $\widetilde{R}$ 的图形；关系 R 的逆关系 $\widetilde{R}$ 的矩阵 $M_{\widetilde{R}}$ 是 R 的矩阵 M_R 的转置矩阵.

此外，容易知道

$$\widetilde{\widetilde{R}}=R,$$

$$(\widetilde{R\circ S})=\widetilde{S}\circ\widetilde{R}.$$

除了复合运算与逆运算外，作为集合，关系也有并、交、补等运算，这里就不多谈了.

习　题　1-2

1. 设集合 A 及 A 上的关系 R, S，如习题 1-1 中第 1 题所示，计算 $R\circ R$, $S\circ S$, $S\circ R$, $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$.

2. 求第 1 题中的关系 $R\circ R$, $S\circ S$, $S\circ R$, $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$ 的矩阵.

第三节　集合的等价关系与分类

等价关系是一类重要的关系，它与集合的分类紧密联系.

定义 1　集合 A 上的二元关系 R 叫做 A 上的一个等价关系，如果 R 满足

(1) **反身性**：$aRa\ (\forall a \in A)$；

(2) **对称性**：$aRb \Rightarrow bRa$；

(3) **传递性**：$aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$.

人类的同姓氏关系，兄弟关系都是等价关系. 父子关系不是等价关系，因为无传递性. 熟人关系，认识关系都不是等价关系. 实数集的大于关系"＞"不是等价关系，但相等关系"＝"是等价关系.

定义 2　非空集合 A 的一些非空子集的集合 π，叫做 A 的一个分类，如果

$$A = \bigcup_{B \in \pi} B,$$

$$\forall B,\ C \in \pi,\ B \neq C \Rightarrow B \cap C = \varnothing.$$

π 的元素叫做 A 在分类 π 下的一个类.

根据定义，所谓集合的分类，就是将集合分为若干个互不相交的子集，每个这样的子集叫做一个类，集合的每个元素必须属于其中一个且仅属于一个类.

集合的等价关系与分类有密切联系.

定理 1　集合 A 的等价关系 R 确定 A 的一个分类 π，反之，集合 A 的一个分类 π 确定集合 A 的一个等价关系 R.

证　设 R 是集合 A 的一个等价关系，任取 $a \in A$，记

$$[a] = \{b \mid b \in A,\ aRb\}.$$

由 aRa 知 $a \in [a]$，$[a] \neq \varnothing$，显然，$A = \bigcup_{a \in A} [a]$. 又假若 $c \in [a] \cap [b]$，则 aRc，bRc. 由 R 是等价关系，有 aRb，bRa，故 $a \in [b]$，$b \in [a]$，$[a] = [b]$. 因此，集合 $\pi = \{[a] \mid a \in A\}$ 是 A 的一个分类.

反之，设 π 是集合 A 的一个分类，记元素 a 所在的类为 $[a]$，当且仅当 $b \in [a]$ 时，我们说 aRb. 由 $a \in [a]$，有 aRa，由 $b \in [a]$，有 $[a] = [b]$，$a \in [b]$，故 $aRb \Rightarrow bRa$. 最后，如果 aRb，bRc，则 $b \in [a]$，$c \in [b]$. 因而 $[a] = [b] = [c]$，$c \in [a]$，所以 aRc，故 R 为 A 的等价关系.

当集合 A 按照等价关系 R 分类后，我们将每个类看作一个元素，这样构成一个集合，叫做集合 A 对于等价关系 R 的商集，也叫 A 模 R，记为 A/R. 商集 A/R 是集合 A 的一个缩影，对商集的研究常有利于对集 A 的探讨.

集合 A 可能有不同的分类，我们可以给分类引入运算. 例如，集合 A 的分类

π_1 与 π_2 的积定义为

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \{B \cap C \mid B \in \pi_1, C \in \pi_2, B \cap C \neq \varnothing\}.$$

显然，$\pi_1 \cdot \pi_2$ 仍是 A 的一个分类，并且，如果 R_1，R_2 分别是由分类 π_1，π_2 确定的 A 的等价关系，则由分类 $\pi_1 \cdot \pi_2$ 确定的 A 的等价关系 $R = R_1 \cap R_2$.

习 题 1-3

1. 有人认为，等价关系定义中的反身性可以略去. 这就是说如果集合 A 上的关系 R 只要满足对称性和传递性，就是等价关系，其论证如下：

因为 R 有对称性，所以 $aRb \Rightarrow bRa$；

因为 R 有传递性，所以 aRb 且 $bRa \Rightarrow aRa$.

以上论证有什么错误？试举例说明.

2. 设 R 是集合 A 上的二元关系，关系 $r(R)$ 叫做 R 的反身闭包，如果 $r(R)$ 具有反身性，$r(R) \supseteq R$，并且对于任意包含 R 且具有反身性的关系 R'，有 $R' \supseteq r(R)$.

证明：$r(R) = R \cup E$，其中 $E = \{(a, a) \mid a \in A\}$，是 A 上的恒等关系.

3. 设 R 是集合 A 上的二元关系，关系 $s(R)$ 叫做 R 的对称闭包，如果 $s(R)$ 具有对称性，$s(R) \supseteq R$，并且对于任意包含 R 且具有对称性的关系 R'，有 $R' \supseteq s(R)$.

证明：$s(R) = R \cup \tilde{R}$.

4. 设 R 是集合 A 上的二元关系，关系 $t(R)$ 叫做 R 的传递闭包，如果 $t(R)$ 具有传递性，$t(R) \supseteq R$，并且对于任意包含 R 且具有传递性的关系 R'，有 $R' \supseteq t(R)$.

证明：$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

5. 设集合 $A = \{a, b, c\}$ 上的关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$，求 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$.

第四节 偏 序 关 系

一、偏序关系

偏序关系也是一类重要的关系.

定义 1 集合 A 上的二元关系 R 叫做 A 上的一个偏序关系，如果 R 满足

(1) **反身性**：aRa ($\forall a \in A$)；

(2) **反对称性**：aRb, $bRa \Rightarrow a=b$；

(3) **传递性**：aRb, $bRc \Rightarrow aRc$.

集合 A 上的偏序关系常用符号“$\leqslant$”来表示，读为“小于或等于”，因为实数集的“小于或等于”也是一种偏序关系，故不会产生混乱. 偏序关系常简叫做偏序，$\langle A, \leqslant\rangle$ 叫做偏序集，在不混淆时，有时，也简单叫做偏序集 A.

例 1　设 $A=\{1,3,5\}$，A 上的关系是通常的小于或等于关系，即

$$R=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,3),(3,5),(5,5)\}.$$

显见 R 具有反身性，反对称性和传递性，从而是偏序关系.

例 2　设 $B=\{1,2,5,6\}$，B 上的关系 S 是整除关系，即

$$S=\{(1,1),(1,2),(1,5),(1,6),(2,2),(2,6),(5,5),(6,6)\}.$$

显见 S 具有反身性，反对称性和传递性，从而是偏序关系.

例 3　设 $C=\{\{a,b\},\{a\},\{b\},\varnothing\}$，$C$ 上的关系 T 是集合的包含于，即

$T=\{(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{a\}),(\varnothing,\{b\}),(\varnothing,\{a,b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a,b\}),(\{b\},\{b\}),(\{b\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{a,b\})\}$.

则 T 也具有反身性，反对称性和传递性，故是偏序关系.

二、Hasse 图

为了表示偏序集元素间的层次关系，引入偏序集的 Hasse 图. 它是按照下面的方法画出来的：

(1) 规定其方向是自下而上；

(2) 用小圆圈表示偏序集的元素；

(3) 如果对于偏序集中任意两个元素 x 和 y，有 $x\leqslant y$，并且没有这样的元素 a 存在，使得 $x\leqslant a\leqslant y$，那么，就在 x 与 y 之间划上一杠，即"|"(x 在下而 y 在上).

按照这种方法，分别画出例 1、例 2、例 3 的 Hasse 图如下：

图 1-2

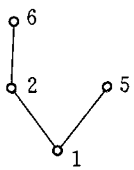


图 1-3

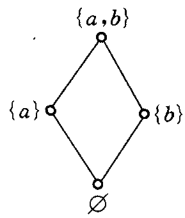


图 1-4

三、特异元素

现在介绍偏序集合的特异元素. 它们在格论中起着重要作用.

定义 2　**设** $\langle A,\leqslant\rangle$ **是一偏序集**，B **是** A **的非空子集.**

(1) **元素** $b\in B$ **叫做** B **的最大元素，如果** $\forall x\in B$，**有** $x\leqslant b$.

(2) **元素** $b\in B$ **叫做** B **的最小元素，如果** $\forall x\in B$，**有** $b\leqslant x$.

例 4 考虑在偏序“整除”下整数 1 到 6 的集合，其 Hasse 图为图 1-5.

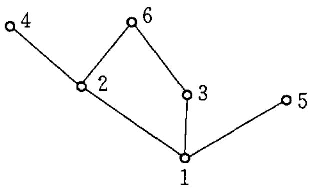


图 1-5

(1) 如果 $B=\{1, 2, 3, 6\}$，则 1 是 B 的最小元素，6 是 B 的最大元素.

(2) 如果 $B=\{2, 3\}$，因为 2 和 3 互相不能整除，则 B 没有最小元素和最大元素.

(3) 如果 $B=\{4\}$，则 4 是 B 的最大元素，也是 B 的最小元素.

定理 1 **设 $\langle A, \leqslant\rangle$ 是一偏序集且 $B\subseteq A$，如果 B 有最大(最小)元素，则它是唯一的.**

证 假设 a 和 b 都是 B 的最大元素，那么 $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant a$. 从 $\leqslant$ 的反对称性得到 $a=b$. 当 a 和 b 都是 B 的最小元素时，证明是类似的.

定义 3 **设 $\langle A, \leqslant\rangle$ 是一偏序集，B 是 A 的子集.**

(1) 如果 $b\in B$，且 B 中不存在元素 x，使得 $b\neq x$ 且 $b\leqslant x$，则元素 $b\in B$ 叫做 B 的极大元素.

(2) 如果 $b\in B$，且 B 中不存在元素 x，使得 $b\neq x$ 且 $x\leqslant b$，则元素 $b\in B$ 叫做 B 的极小元素.

定义 4 **设 $\langle A, \leqslant\rangle$ 是一偏序集，B 是 A 的非空子集.**

(1) 如果 $\forall b\in B$，$b\leqslant a$，则元素 $a\in A$ 叫做 B 的上界；如果 $\forall b\in B$，$a\leqslant b$，则元素 $a\in A$ 叫做 B 的下界.

(2) 如果 a 是一上界并且对 B 的每一上界 a' 有 $a\leqslant a'$，则元素 $a\in A$ 叫做 B 的最小上界(即上确界)，记为 $a=\operatorname{lub} B$；如果 a 是一下界并且对 B 的每一下界 a' 有 $a'\leqslant a$，则元素 $a\in A$ 叫做 B 的最大下界(即下确界)，记为 $a=\operatorname{glb} B$.

注意，B 的最大(小)元素和极大(小)元素都必须是子集 B 的元素，而 B 的上界(下界)和最小上界(最大下界)可以是也可以不是 B 的元素. 在定义中并没有保证这些元素的存在. 在许多情况下它们是不存在的.

例 5 (1) 考虑偏序集 $\langle\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 0\rangle\}, \leqslant\rangle$，这里 $\leqslant$ 按

$$\langle a, b\rangle\leqslant\langle c, d\rangle \Leftrightarrow a\leqslant c \text{ 且 } b\leqslant d$$

规定，其 Hasse 图如图 1-6.

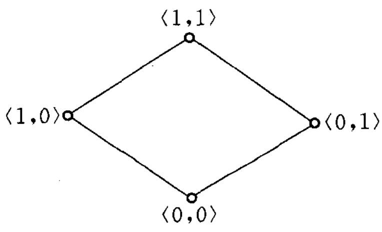


图 1-6

如果 $B=\{\langle 1, 0\rangle\}$，则 $\langle 1, 0\rangle$ 是 B 的最小和最大元素，也是 B 的极大和极小元素. B 的上界是 $\langle 1, 0\rangle$ 和 $\langle 1, 1\rangle$，$\langle 1, 0\rangle$ 是最小上界. B 的下界是 $\langle 0, 0\rangle$ 和 $\langle 1, 0\rangle$，$\langle 1, 0\rangle$ 是最大下界.

(2) 考虑偏序集 $\langle \mathbf{Z}, \leqslant\rangle$，其中，$\mathbf{Z}$ 是整数集，设 $\mathbf{N}$ 是自然数集，$B=\{2i \mid i\in\mathbf{N}\}$，那么