21 世纪高等院校教材

大学工科·数学教材系列

高等数学学习指导

西北工业大学高等数学教研室 编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是为学习高等数学的读者编写的，按国内通常高等数学教材布局，分为十二章，每章设若干节、知识脉络图和按章模拟考试. 各节均设诸栏目，对高等数学的主要知识点进行归纳，释疑解惑，剖析典型例题，揭示解题方法与技巧，并配制两级测试题及答案与提示，供学生自测.

本书可作为高等学校师生的教学参考书，也可作为考研者考前复习、系统训练用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/西北工业大学高等数学教研室编．—北京：科学出版社，2007

21 世纪高等院校教材（大学工科·数学教材系列）

ISBN 978-7-03-019058-1

Ⅰ．高… Ⅱ．西… Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 081421 号

责任编辑：李鹏奇 王 静 于宏丽/责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 7 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007 年 7 月第一次印刷 印张：32

印数：1—4 000 字数：634 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉）

前　言

高等数学是一门重要的基础课. 鉴于这门课程逻辑性及解题技巧性较强，以及后继课程的学习和硕士研究生入学考试的要求，特编写这本书. 它可作为高等数学课程学习指导书、习题课参考书，以及研究生入学考试的复习用书.

本书共分十二章（与高等数学（西北工业大学）、高等数学（同济·四版、五版）教材配套），每章分为若干节（与教学次序一致），最末节为综合问题，具有同步学习辅导结构. 每章由以下部分内容构成：

(1) 知识要点导学——此部分按知识要点集中归纳本章节的重要概念、性质、结论，阐述扼要、条理清晰.

(2) 疑难问题解惑——内容涉及基本概念和基本理论的深入理解、解题方法中常见错误的剖析. 问题的回答力求体现启发式，并对学生在思维方法、学习方法方面进行指导.

(3) 典型例题剖析——此部分按高等数学每节内容的知识点归纳出一些小专题，通过对典型例题的解题分析，归纳出高等数学中的一些问题的解决方法与技巧. 注重选题的广度与梯度，力求达到从一题到一类，从一类到一个系列的效果.

(4) 两级阶段练习——在给出了一级练习，检查掌握基础知识前提下，二级练习注重知识的灵活性、综合性，力图在深度、广度上拓展读者的知识面.

(5) 本章知识脉络——通过知识结构图，使知识更加系统化、条理化，便于记忆、理解与运用.

(6) 按章模拟考试——根据课程考试和考研内容，精选了难度适中的按章自测试题，供学生及时检查自己掌握的情况.

全书内容编排与教学同步，以典型问题、典型方法为主线，体现知识结构、思维培养、同步训练、水平测试的辅导功能，适合于课程学习与备战考研的读者，也可作为教师教学用书.

参加本书编写工作的有西北工业大学应用数学系陆全、肖亚兰、刘华平、王雪芳、杨月茜、郑红婵、刘哲、林伟、周敏等，全书由陆全、肖亚兰统纂定稿.

限于编者的学识及水平，疏漏与不足之处在所难免，恳请读者与同仁批评指正.

编　者

2006 年 12 月

目　　录

第一章　一元函数的极限与连续

第一节　函　　数

【知识要点导学】

☞ 概念

- 函数、分段函数.
- 反函数、复合函数.
- 基本初等函数、初等函数.

☞ 性质

- 有界函数 $f(x)$：$x\in X\subset D$，存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$.
- 单调增加(减少)函数 $f(x)$：$x\in I\subset D$，
  当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$.
- 奇(偶)函数 $f(x)$：$x\in[-a,a]$，
  $f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$.
- 周期函数 $f(x)$：$x\in(-\infty,+\infty)$，
  存在 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$.

【疑难问题解惑】

1. 怎样确定一个函数，需要几个要素？

答　确定函数的两个要素是定义域 D 和对应规律 f. 只有当两个函数的定义域及对应规律完全相同时，它们才是同一个函数.

例如，$f_1(x)=\ln(1-x^2)$ 与 $g_1(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$ 是同一函数. 因为它们的定义域均为 $(-1,1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$g_1(x)=\ln[(1+x)(1-x)]=\ln(1-x^2)=f_1(x)$. 又 $f_2(x)=\ln(x^2-1)$ 与 $g_2(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$ 不是同一函数. 因为 $f_2(x)$ 的定义域为 $D_1=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，$g_2(x)$ 的定义域为 $D_2=(1,+\infty)$，$D_1\neq D_2$.

2. 单调函数必有单值反函数，不单调的函数是不是一定没有单值反函数？

答　不是的. 一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应规律 f 在定义域 D 与值域 U 之间是否构成一一对应的关系. 如果是一一对应的，那么必有单值

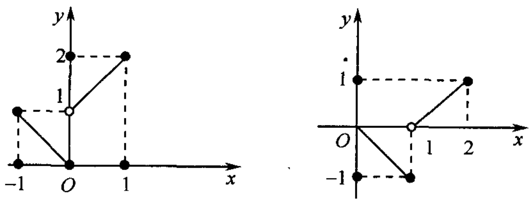
反函数;否则就没有单值反函数.函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系,因此单调仅是存在单值反函数的充分条件,而不是必要条件.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上不单调(图 1.1(a)),但它存在单值反函数(图 1.1(b))

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$



(a)　　(b)

图 1.1

3. 任意两个函数都能构成复合函数吗?

答　不是任意两个函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 都能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.例如,$y=\sqrt{u}$,$u=\cos x-2$ 就不能构成复合函数 $y=\sqrt{\cos x-2}$.因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_f=[0,+\infty)$ 与 $u=\cos x-2$ 的值域 $R_\varphi=[-3,-1]$ 的交集是空集.一般地,当函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 与 $u=\varphi(x)$ 的值域 R_φ 的交集 $D_f\cap R_\varphi$ 不空时,此两函数才能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

将复合函数分解为若干个简单函数,这对函数的研究会带来方便.复合函数的分解过程是由外层到内层,逐层进行的.例如,$y=\sin(e^{\arctan\sqrt{x}})$ 分解为

$$y=\sin u,\qquad u=e^v,\quad v=\arctan w,\quad w=\sqrt{x}.$$

【典型例题剖析】

例 1.1　(1)求 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

(2) 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解　(1) 由 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\\ (k=0,\pm1,\cdots).\end{cases}$ 解得函数的定义域(图 1.2)为 $D=[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

(2)由题设及复合函数的定义可得

$$f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1-x, 且\ \varphi(x) \geqslant 0,$$
$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)},$$

由表达式得

$$\begin{cases} \ln(1-x) \geqslant 0, \\ 1-x > 0, \end{cases}$$

解得定义域为$(-\infty,0]$.

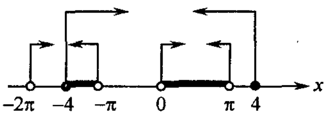


图 1.2

小结　求具体函数的定义域时,应注意对常见函数的某些限制:

(1)分式的分母不能为零;

(2)根式中负数不能开偶次方;

(3)零和负数不能取对数;

(4)三角函数、反三角函数的定义域. 如 $\arcsin x$ 中 $|x| \leqslant 1$, $\tan x$ 中 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

对于应用问题中的函数,其定义域由实际问题的具体含义确定.

例 1.2　判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　(2) $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$;

(3) $F(x)=\varphi(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$,其中 $\varphi(x)$为奇函数,常数 $a>0, a\neq 1$.

解　(1) 讨论 $f(-x)$与 $f(x)$的关系,

$$f(-x) = \ln(-x+\sqrt{1+x^2}) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x),$$

故 $f(x)$为奇函数.

此题也可用 $f(x)+f(-x)=0$ 判定.

(2) $f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$,故 $f(x)$为奇函数.

(3) 因$\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\frac{a^x-1}{a^x+1}$,由(2)知为奇函数,而 $\varphi(x)$也是奇函数,从而 $F(x)$为偶函数.

小结　判定函数奇偶性的方法:

(1) 根据奇偶性的定义;

(2) 利用奇(偶)函数的代数运算,如 $f(x)\pm g(x)$:"奇奇为奇,偶偶为偶". 如 $f(x)\cdot g(x)$:"偶偶为偶,奇奇为偶,奇偶为奇".

例 1.3　已知定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$满足 $f(x+\pi)=f(x)+$

$\sin x$，试证 $f(x)$ 为周期函数，且它的(最小正)周期为 2π.

证　$f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=[f(x)+\sin x]+\sin(x+\pi)=f(x)$，故 $f(x)$ 为周期函数. 下证 2π 为最小正周期，设有 $a\in(0,2\pi)$，使 $f(x+a)=f(x)$，则

$$f(\pi+a)=f(\pi)=f(\pi+0)=f(0)+\sin 0=f(0)=f(a).$$

再由原式得 $f(a+\pi)=f(a)+\sin a$，于是 $\sin a=0, a=\pi$，即 π 也是周期，$f(x+\pi)=f(x)$，再由原式 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，得 $\sin x\equiv 0$，矛盾，故 $f(x)$ 以 2π 为最小正周期.

例 1.4　设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$.

分析　先求函数 $f(u)$，再求 $f(\cos x)$.

解法一　将 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)$ 的表达式用 $\sin\dfrac{x}{2}$ 表达.

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right).$$

令 $\sin\dfrac{x}{2}=u$，则

$$f(u)=2(1-u^2),$$

故

$$f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x.$$

解法二　利用三角函数的性质，将 $\cos x$ 化为正弦函数的半角形式.

$$f(\cos x)=f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=f\left(\sin\frac{\pi-2x}{2}\right),$$

利用 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，得

$$f(\cos x)=1+\cos(\pi-2x)=1-\cos 2x=2\sin^2 x.$$

例 1.5　设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$.

解

$$\begin{aligned}f[g(x)]=f[\ln x]&=\begin{cases}2\ln x, & 0\leqslant \ln x\leqslant 1\\ \ln^2 x, & 1<\ln x\leqslant 2\end{cases}\\ &=\begin{cases}2\ln x, & x\in[1,\mathrm{e}]\cap(0,+\infty)\\ \ln^2 x, & x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]\cap(0,+\infty)\end{cases}\\ &=\begin{cases}2\ln x, & x\in[1,\mathrm{e}],\\ \ln^2 x, & x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2].\end{cases}\end{aligned}$$

小结　对于分段函数的复合函数，应注意自变量和中间变量的取值范围，这是保证运算正确的一个重要环节. 初学者容易犯这样的错误(以例 1.5 为例)，

$$f[g(x)]=f[\ln x]=\begin{cases}2\ln x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \ln^2 x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

其错误所在正是未正确地给出中间变量 $u=\ln x$ 的取值范围.

例 1.6　求函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数.

分析　求反函数的步骤为

(1) 由式 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$；

(2) 对换自变量与因变量的记号,即可得反函数 $y=\varphi(x)$.

解　由 $y=f(x)$,解得 $x=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, & 16<y<+\infty.\end{cases}$ 将式中的 x 与 y 对换,得 $y=f(x)$的反函数

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

例 1.7　已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40^\circ$(图 1.3). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并说明定义域.

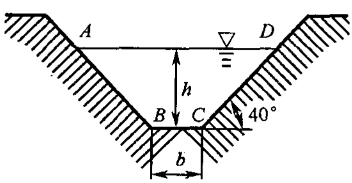


图 1.3

解　由题设知

$$AB=CD=\frac{h}{\sin 40^\circ}, S_0=\frac{h}{2}(2BC+2h\cot 40^\circ),$$

解得

$$BC=\frac{S_0}{h}-h\cot 40^\circ,$$

故

$$L=AB+BC+CD=\frac{S_0}{h}+\frac{2h-h\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

由实际问题知,此函数的定义域由下列不等式组确定:

$$\begin{cases}AB>0,\\ BC>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}h>0,\\ S_0/h-\cot 40^\circ\cdot h>0,\end{cases}$$

即为

$$0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}.$$

思考题　能否用"存在 $M>0$，使 $|f(x)|<M, x\in X$"来定义函数 $f(x)$ 在 X 上有界，为什么？

【两级阶段练习】

一级练习

1.1　在下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同的为__________.

(A) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$；

(B) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(C) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(D) $f(x)=\ln[x(x-1)], g(x)=\ln x+\ln(x-1)$.

1.2　设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(4-x)}+\sqrt{36-x^2}$，则 $f(x)$ 的定义域为__________，$f[f(-6)]=$__________.

1.3　对于函数 $f(x)=x^2$，能使邻域 $U(0,\delta)$ 中任一 x 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0,2)$ 内的 δ 所满足的关系式为__________.

1.4　函数 $y=\tan x+\cos(5x+1)$ 的周期为__________.

1.5　函数 $y=xe^{\cos x}$ 是__________.

(A) 奇函数；　　(B) 偶函数；

(C) 单调函数；　　(D) 有界函数.

1.6　证明 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 在 $(-\infty,-1)$ 及 $(-1,+\infty)$ 是单调增加函数.

1.7　函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数为__________.

1.8　下列函数能否复合为函数 $y=f[g(x)]$？若能，试写出复合函数的表示式、定义域、值域.

(1) $y=f(u)=\sqrt{u}$，　$u=g(x)=2x-x^2$；

(2) $y=f(u)=\ln u$，　$u=g(x)=\cos x-2$；

(3) $y=f(u)=u^2+u^3$，　$u=g(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

1.9　设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$，　$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

1.10　已知一物体与地面的摩擦系数是 μ，重量是 P. 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始移动(图 1.4)，求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之

间的函数关系.

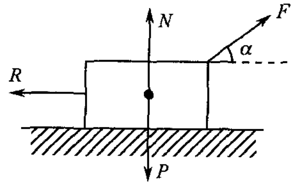


图 1.4

二级练习

1.11　设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$ 且 $z|_{y=1}=x$. 求 $f(x)$ 及 z 的表示式.

1.12　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,对一切实数 x,y 适合 $f(xy)=f(x)f(y)$,且 $f(0)\neq 0$,求证 $f(x)\equiv 1$,并利用该结果求 $f(2007)$.

1.13　设 $f(x)$ 是单调增加函数,且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,证明

$$g[g(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant h[h(x)].$$

1.14　判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}$;　(2) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$.

1.15　设函数 $y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a,x=b$ 均对称 $(a<b)$,求证 $y=f(x)$ 是周期函数,并求其周期.

1.16　设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2+1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

1.17　当 a,b,c,d 满足什么条件时,函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$ 与其反函数相同.

答案与提示

1.1　C.

1.2　$[-6,3)\cup(3,4)$, $f[f(-6)]=f(1)=\frac{1}{\lg 3}+\sqrt{35}$.

1.3　$\delta\leqslant\sqrt{2}$,解答:欲使 $f(x)=x^2\in U(0,2)$,即 $-2<x^2<2$, $|x|<\sqrt{2}$,故只要取 $\delta\leqslant\sqrt{2}$ 作为邻域 $U(0,\delta)$ 的半径,就可使 $f(x)\in U(0,2)$.

1.4　2π.　　1.5　A.　　1.7　$\sinh x$.

1.8　(1) 能, $f[g(x)]=\sqrt{2x-x^2}$,定义域为 $[0,2]$,值域为 $[0,1]$.

(2) 不能.

(3) 能, $f[g(x)]=\begin{cases}2, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{0,2\}$.

1.9　$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

1.10　$F=\dfrac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$.

1.11　$f(x)=x^3+3x^2+3x, z=\sqrt{y}+x-1$.　提示：将 $y=1, z=x$ 代入 z 的表达式得 $f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$，令 $t=\sqrt[3]{x}-1$，则 $f(t)=t^3+3t^2+3t$，$f(x)=x^3+3x^2+3x, z=\sqrt{y}+x-1$.

1.12　$f(2007)=1$.　提示：取 $y=0$，依题意有 $f(0)=f(x)f(0)$，由 $f(0)\neq 0$ 及 x 的任意性得 $f(x)\equiv 1$，因此 $f(2007)=1$.

1.13　提示：由 $g(x)\leqslant f(x)$ 及 $f(x)$ 单调增加有 $g[g(x)]\leqslant f[g(x)]\leqslant f[f(x)]$，再由 $f(x)\leqslant h(x)$ 及 $f(x)$ 单调增加有 $f[f(x)]\leqslant f[h(x)]\leqslant h[h(x)]$.

1.14　(1) 偶函数；　(2) 奇函数.

1.15　$T=2(b-a)$.　提示：由题设有 $f(a+x)=f(a-x), f(b+x)=f(b-x)$，于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a+(x-a)] = f[a-(x-a)] \\ &= f[2a-x] = f[b+(2a-x-b)] \\ &= f[b-(2a-x-b)] = f[x+2(b-a)], \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 以 $T=2(b-a)$ 为周期.

1.16　解：

$$\begin{aligned} f[f(x)] &= \begin{cases} \sqrt{1-f^2(x)}, & |f(x)|<1 \\ f^2(x)+1, & |f(x)|\geqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}=|x|, & 0<|x|<1, \\ f[f(0)]=f(1)=2, & x=0, \\ (x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

1.17　$a=-d$ 或 $\begin{cases} b=c=0, \\ a=d\neq 0. \end{cases}$　提示：$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$.　由 $\dfrac{b-dx}{cx-a}\equiv\dfrac{ax+b}{cx+d}$，得

$$(a+d)[cx^3+(d-a)x-b]\equiv 0,$$

故 $a=-d$ 或 $\begin{cases} b=c=0, \\ a=d\neq 0. \end{cases}$

第二节　极　　限

【知识要点导学】

☞ 概念

- 数列极限，函数极限.
- 无穷小，无穷大；无穷小的阶.

☞ 性质与结论

- 收敛数列性质：

  1° 极限唯一；

  2° 收敛数列必有界.

- 极限存在的充要条件：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

- 极限的局部保号性：

  1° 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0(<0)$，则 $f(x)>0(<0)$，$x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$；

  2° 若 $f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，$x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

- 两个重要极限：

  1° $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

  2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$（或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$）.

- 极限存在准则：

  1° 若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n(n>N)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，　则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$；

  2° 单调有界数列必有极限.

- 无穷小的性质：

  1° 有限个无穷小的和（或积）仍为无穷小；

  2° 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小；

  3° 无穷小（不取零值）的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小；

  4° 若无穷小 $\alpha_1\sim\alpha_2$，$\beta_1\sim\beta_2$，且 $\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$.

【疑难问题解惑】

1. 怎样证明数列发散?

答 证明数列$\{x_n\}$发散的常用方法有二:

(1) 找出$\{x_n\}$的两个有不同极限的子列;

(2) 找出$\{x_n\}$的一个发散子列.

例如,数列$\{x_n\}=\{3^{n(-1)^n}\}$是发散的,这因为子列 $x_{2k}=3^{2k}\to\infty(k\to\infty)$,$x_{2k}$为发散数列.

再如,数列$\{x_n\}=\left\{\cos\dfrac{n\pi}{4}\right\}$是发散的,这因为子列 $x_{8k}=\cos 2k\pi=1\to1(k\to\infty)$,而子列

$$x_{8k+2}=\cos\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi=0\to0(k\to\infty).$$

2. 以下关于无穷小量的命题是否正确?

(1) 无穷小量就是绝对值很小的数;

(2) 数 0 是无穷小量;

(3) x^3 为无穷小量.

答 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$,则称 $f(x)$是 $x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小量.

非零常数(即使其绝对值很小)在自变量的任何变化趋势下,都不以 0 为极限,因此,绝对值多么小的非零常数都不是无穷小量,故命题(1)不正确.

数零在自变量的任何变化趋势下都以零为极限,故 $y=0$ 是自变量的任一变化趋势下的无穷小量.故命题(2)正确.

因为$\lim\limits_{x\to x_0}x^3=x_0^3\begin{cases}=0, & x_0=0,\\ \neq0, & x_0\neq0,\end{cases}$所以当 $x_0=0$ 时,x^3 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量;当 $x_0\neq0$ 时,x^3 不是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.不能脱离自变量的变化过程来谈某变量为无穷小量或无穷大量,故命题(3)不正确.

3. 高阶无穷小有怎样的运算规律?

答 设当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$都是无穷小量,如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$高阶的无穷小,记作 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$.

关于高阶无穷小的运算,有如下结果:当 $x\to0$ 时,有

(1) $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$;

(2) $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n)\ (m>n)$;

(3) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$.

以上结论不难根据高阶无穷小的定义证明之.

这里提请读者注意以下两种错误：当 $x\to 0$ 时，有

(a) $o(x^n)-o(x^n)=0$;

(b) $\dfrac{o(x^m)}{o(x^n)}=o(x^{m-n})\quad (m>n)$.

结论(a)错误. 例如，$x^2=o(x)$，$x^3=o(x)$，但 $x^2-x^3\neq 0$.

结论(b)错误. 例如，$x^3=o(x^2)$，$x^4=o(x)$，但$\dfrac{x^3}{x^4}$为无穷大.

4. 函数极限与数列极限有什么关系？

答　$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的充分必要条件：对任意的满足 $x_n\to a(x_n\neq a)$ 的数列，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，其中 a 和 A 可为实数或∞. 利用函数极限和数列极限的关系，可以解决以下几类问题.

(1) 利用求函数极限的方法，求数列的极限.

例 1.8　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{1}{2^n}$.

解　由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，取 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$，则 $x_n\to 0$，

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1.$$

求函数极限常比求数列极限有较多、较好的方法(如第三章中的洛必达法则).

(2) 为证明极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$不存在，只要寻找两个趋于 a 的数列 $x_n^{(1)}$，$x_n^{(2)}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^{(1)})\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^{(2)})$.

例 1.9　证明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

证　取 $x_n^{(1)}=2n\pi$，$x_n^{(2)}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $x_n^{(1)}\to+\infty$，$x_n^{(2)}\to+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}\neq\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)},$$

故极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

(3) 为证明 $f(x)$当 $x\to a$ 时不是无穷大量，即证$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq\infty$，只要寻找一个趋于 a 的数列 x_n^*，使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^*)\neq\infty$.

例 1.10　证明当 $x\to+\infty$时，$y=x\cos x$ 不是无穷大量.