高联考研

2008年 李永乐·李正元

考研数学10

数学

数学二

【理工类】

全真模拟经典400题

○主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
北京大学 刘西垣

国家行政学院出版社

2008年李永乐·李正元考研数学⑩

数学全真模拟经典400题

（理工类·数学二）

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
北京大学 刘西垣

编者 （以姓氏笔画为序）
北京大学 刘西垣
北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 严颖
北京大学 范培华
中国人民大学 袁荫棠
空军雷达学院 徐宝庆
东北财经大学 龚兆仁
天津财经学院 鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学全真模拟经典400题．数学．2：理工类/李永乐，李正元主编．
－北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 978-7-80140-342-1

Ⅰ．数…　Ⅱ．①李…　②李…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第058910号

书　　名	数学全真模拟经典400题［理工类·数学二］
作　　者	李永乐　李正元
出版发行	国家行政学院出版社
	（北京市海淀区长春桥路6号　100089）
电　　话	（010）88517082
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2007年8月北京第4版
印　　次	2007年8月北京第1次印刷
开　　本	787毫米×1092毫米　16开
印　　张	12.25
字　　数	320千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-342-1/O·36
定　　价	19.00元

前　言

本套书（**李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典400题》等，国家行政学院出版社**）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性”，较“适合考生的需要”，我们深感欣慰。《**2008年考研数学全真模拟经典400题**》根据2008年考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

本书特点：

1. 每题均全新优化设计，综合性强

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计了10套模拟试题，这10套题完全不同，没有重复题；在内容设计上，每道题均涉及两个以上知识点，有些综合题甚至涉及到3个考点或更多，这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这10套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. 注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细

我们在设计这10套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据2008年考研数学大纲为2008年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练题集，本书中的试题难度略高于2007年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2008年考研数学复习全书》（数学二），弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2008年考研数学复习全书》（数学二）中所介绍的解题方法、技巧和思路。

特别提醒考生注意：①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者不辞辛苦，认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。在编写本书的过程中，编撰者都从头到尾坚持自己亲自完成本书的编写任务，决不假手他人，更不会“借”他人的东西。在这个意义上，“经典”两字实际上是本书编撰者对自己的严格要求。

②为了提高同学数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及3个以上的考点、综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要急，更不要泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》（数学二）所介绍的解题方法，然后再动手做题。我们希望考生一定要动手做题，不要一看了事。

鉴于以上两点，我们希望考生认真对待本书中每道题，对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在2008年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

愿这本《经典400题》能对广大考生有所帮助，为实现考研目标助一臂之力！

说明：为了使本书更具有针对性，减轻考生的经济负担，我们将原《数学全真模拟经典400题》（数学一、数学二合订本）改为数学一、数学二单行本，书名继续沿用《数学全真模拟经典400题》。

编　者

2007年8月

目　录

第1部分　考生必须了解的信息

第2部分　全真模拟经典试题

第3部分　全真模拟经典试题答案及详解

第1部分

考生必须了解的信息

一、2008年考研数学二考试大纲修订情况

(一)关于试卷结构

1. 内容比例

2008年考研数学二的内容比例与2007年相同,即高等数学约占78%,线性代数约占22%.

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题由去年的"约45%"调整为"约37%".

说明:选择题由去年的"10个小题(共40分)"调整为"8个小题(共32分)",即2008年考研数学二减少了2道关于高等数学的选择题. 填空题的题量、分值等没有变化.

(2) 解答题(包括证明题)由去年的"约55%"调整为"约63%".

说明:解答题由去年的"8道题(共86分)"调整为"9道题(共94分)",即2008年考研数学二增加了1道关于高等数学的解答题.

(二)关于考试内容和考试要求

1. 高等数学

(1) 在"二、一元函数微分学"考试内容中增加了"曲率圆",在其考试要求中增加了"了解曲率圆的概念".

(2) 在"三、一元函数积分学"考试要求中增加了"掌握用定积分表达和计算'形心'".

2. 线性代数

在"二、矩阵"考试内容中增加了"分块矩阵及其运算",在其考试要求中增加了"5. 了解分块矩阵及其运算".

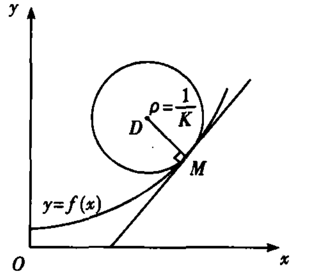
二、2008年考研数学二新增考点讲解

(一)高等数学

▶ 关于曲率圆的概念

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K \neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上,在凹的一侧

取一点 D,使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$. 以 D 为圆心,ρ 为半径作圆(如右图),这个圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆,曲率圆的圆心 D 叫做曲线在点 M 处的曲率中心,曲率圆的半径 ρ 叫做曲线在点 M 处的曲率半径.



按上述规定可知,曲率圆与曲线在点 M 有相同的切线和曲率,且在点 M 邻近有相同的凹向. 因此,在实际问题中,常常用曲率圆在点 M 邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧,以使问题简化.

按上述规定,曲线在点 M 处的曲率 $K(K \neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系:

$$\rho = \frac{1}{K}, \quad K = \frac{1}{\rho}.$$

这就是说:曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

▶ 关于形心的概念及其计算

形心的概念类似于质心的概念,其坐标可用质心的坐标公式来计算.

(二) 线性代数

▶ 分块矩阵及其运算

在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,用一些横线和纵线将 $\boldsymbol{A}$ 分成若干小矩阵,这些小矩阵称作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子块. 以子块为元素的矩阵称作分块矩阵,例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{\alpha} = (1 \quad 2 \quad 3)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 4 \end{bmatrix}$ 是分块矩阵. 对矩阵进行分块是为了简化计算,这里特别关注的是将矩阵按列分块、按行分块以及准对角矩阵. 按列分块:

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中,$\boldsymbol{\alpha}_i$ 是列向量($i = 1,2,\cdots,n$).

按行分块:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是行向量($i = 1,2,\cdots,m$).

准对角矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是方阵,$i = 1,2,\cdots,s$.

【重要公式】

若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 s 阶矩阵，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^n \end{bmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，对 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 矩阵按列分块有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_s) = (\boldsymbol{AB}_1,\boldsymbol{AB}_2,\cdots,\boldsymbol{AB}_s) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}),$$

$$\boldsymbol{AB}_i = \boldsymbol{0}\quad (i=1,2,\cdots,s).$$

即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，则对 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 按行分块有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{12}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_1, \\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_m. \end{cases}$$

可见 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出.

类似地，对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块，有

$$(\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2\cdots\boldsymbol{\gamma}_n)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_s),$$

由此得

$$\begin{cases} b_{11}\boldsymbol{\gamma}_1 + b_{21}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{\delta}_1, \\ b_{12}\boldsymbol{\gamma}_1 + b_{22}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + b_{n2}\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{\delta}_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{1s}\boldsymbol{\gamma}_1 + b_{2s}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + b_{ns}\boldsymbol{\gamma}_s = \boldsymbol{\delta}_s, \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出.

【专题训练】

【题 1】 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$. 试求 λ 的值.

【解】 对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块，记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，那么

$$AB=A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,A\boldsymbol{\beta}_3)=(0,0,0).$$

因而 $A\boldsymbol{\beta}_i=0\ (i=1,2,3)$，即 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $Ax=0$ 的解.

由于 $B\neq 0$，故 $Ax=0$ 有非零解. 因此

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\2&\lambda-1&\lambda\\3&0&-1\end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0.$$

故 $\lambda=1$.

评注 对3阶矩阵 A，由 $AB=0$，$B\neq 0$ 亦知必有 $|A|=0$，否则 A 可逆，从而 $B=A^{-1}(AB)=A^{-1}0=0$ 与 $B\neq 0$ 矛盾.

【题2】 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $t=$ ________.

【分析】 由 $AB=0$，对 B 按列分块有

$$AB=A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,A\boldsymbol{\beta}_3)=(0,0,0),$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解.

又因 $B\neq 0$，故 $Ax=0$ 有非零解，那么

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&0&0\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=5(t+3)=0.$$

所以应填：-3.

若熟悉公式：$AB=0$，则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leqslant n$. 可知 $\mathrm{r}(A)<3$. 亦可求出 $t=-3$.

【题3】 设 A,B 为 n 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $C=\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 $C^*=$

(A) $\begin{bmatrix}|A|A^*&0\\0&|B|B^*\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}|B|B^*&0\\0&|A|A^*\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}|A|B^*&0\\0&|B|A^*\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}|B|A^*&0\\0&|A|B^*\end{bmatrix}$.

【分析】 对任何 n 阶矩阵 A,B 关系式要成立，那么 A,B 可逆时仍应成立，故可看 A、B 可逆时 $C^*=?$

由于
$$C^*=|C|C^{-1}=\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=|A||B|\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|A||B|A^{-1}&0\\0&|A||B|B^{-1}\end{bmatrix},$$

故应选(D).

【题 4】 设 4 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，则 A 的逆矩阵 $A^{-1}=$ ________.

【分析】 本题考查的是求逆，若知道分块求逆法，则可简单解答.

注意 $\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{bmatrix}$， $\begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{bmatrix}$，

再根据 2 阶矩阵的伴随求逆法，易见

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

本题若用伴随矩阵或行变换就相对麻烦了. 若把矩阵 A 改为

$$\begin{bmatrix}0&0&5&2\\0&0&2&1\\1&-2&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix},$$

你能迅速正确地写出解答吗?提示:要用第 2 个公式.

【题 5】 设 A 和 B 为可逆矩阵，$X=\begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}$为分块矩阵，则 $X^{-1}=$ ________.

【分析】 利用分块矩阵，按可逆定义有

$$\begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&0\\0&E\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{cases}AX_3=E,\\AX_4=0,\\BX_1=0,\\BX_2=E.\end{cases}$$

从 A、B 均可逆知 $X_3=A^{-1}, X_4=0, X_1=0, X_2=B^{-1}$.

故应填：$\begin{bmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{bmatrix}$.

评注 本题可推广为：$\begin{bmatrix}&&A_1\\&A_2&\\A_3&&\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}&&A_3^{-1}\\&A_2^{-1}&\\A_1^{-1}&&\end{bmatrix}$.

特别地 $\left[\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

【题 6】 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,其中 $a_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$,

则 $A^{-1} =$ ________.

【分析】 由于 $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & A \\ B & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B^{-1} \\ A^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,且 $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$,

本题对 A 分块后可知

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n+1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

【题 7】 设 A 为 n 阶非奇异矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量,b 为常数,记分块矩阵

$$P = \begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A^* & |A| \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{bmatrix},$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵,E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 PQ.

(2) 证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A^{-1} \boldsymbol{\alpha} \neq b$.

【解】 (1) 由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 及 $A^* = |A|A^{-1}$,有

$$PQ = \begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A^* & |A| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A^* A + |A| \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A^* \boldsymbol{\alpha} + b|A| \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}.$$

(2) 用行列式拉普拉斯展开公式及行列式乘法公式,有

$$|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}| \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|,$$

$$|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{PQ}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|^2(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}).$$

又因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$|\boldsymbol{A}| \neq 0$,故 $\quad |\boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$.

由此可知 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \neq 0$,即 $\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \neq b$.

评注 本题考查分块矩阵的运算,要把握住小块矩阵的左右位置.要看清 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是1阶矩阵,是一个数.

第2部分

全真模拟经典试题

要求与建议

1. 考生一定要在全面复习之后，再做本书中的模拟训练试题.

2. 考生做本书模拟试题时，一定要动手做，而且要写出来.这样有利于提高解题速度和解答正确性.

3. 不会的题目不要马上看答案，也不要一边查公式定理一边做.

4. 每套题要独立完成，做完后最好约几个同学一起讨论.

5. 对于本书十套经典模拟试题，考生最好用考试规定时间（180 分钟）完成每套试题，以便较真实地检查自己的水平，查漏补缺，从而在后面冲刺复习阶段有的放矢.

6. 做完题要注意归纳总结，千万不可就题做题.建议考生对每道试题做以下事情（写在本书每道试题的空白处）：
   （1）概括每道试题的考查知识点（注：本书每道试题至少包含两个知识点）；
   （2）总结每道试题所属题型的解题思路、方法和技巧（注：本书解答部分编者已给出，建议考生用自己的语言进行总结）；
   （3）做对的题再探究本书介绍以外的解题方法（注：本书对绝大部分试题均介绍了几种解题方法）；
   （4）做错的题查找错因（注：本书对部分试题给出了错误的解法）；
   （5）归纳每道试题所考查知识点的衔接点.

7. 由于本书所编试题综合性较强，难度要高于 2007 年考研试题，因此希望考生遇到难题不要气馁，记住“失败是成功之母”，胜利往往在于再坚持.

模拟试题(一)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x\to 0$ 时,下面几个无穷小量中阶数最高的是

(A) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$. (B) $4x^2+5x^3-x^5$.

(C) $\ln(1+x^3)-\ln(1-x^3)$. (D) $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}\,dt$.

(2) 下列命题成立的是

(A) 若 $f(x)$ 有唯一的驻点 x_0,则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点.

(B) 若 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点,则 $f''(x_0)=0$.

(C) 若 $f'(x)$ 在某区间单调增加,则 $f(x)$ 也单调增加.

(D) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续且有唯一的极值点,$x=x_0$ 是极小(大)值点,则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最小值(最大值).

(3) 下列不等式成立的是

(A) $e^x < e + e(x-1) \quad (x\neq 1)$.

(B) $e^x > e + e(x-1) \quad (x\neq 1)$.

(C) $e^x < e + e(x-1) \quad (x<1)$, $e^x > e + e(x-1) \quad (x>1)$.

(D) $e^x < e + e(x-1) \quad (x>1)$, $e^x > e + e(x-1) \quad (x<1)$.

(4) 有一椭圆形薄板,长半轴为 a,短半轴为 b,薄板垂直立于液体中,而其短轴与液面相齐,液体的比重为 γ,则液体对薄板的侧压力为

(A) $\frac{4}{3}\gamma a^2 b$. (B) $\frac{2}{3}\gamma a^2 b$.

(C) $\frac{4}{3}\gamma a b^2$. (D) $\frac{2}{3}\gamma a b^2$.

(5) 下列函数在指定区间上不存在原函数的是

(A) $f(x)=\int_0^x |t|\,dt,\quad x\in[-1,2]$.

(B) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(C) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x\in[-1,1]$.

(D) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x<0, \end{cases} \quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=$

(A) $\dfrac{\pi}{3}$. (B) $\dfrac{\pi}{2}$. (C) $\dfrac{\pi}{6}$. (D) $\dfrac{\pi}{4}$.

(7) 已知4维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,若$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3,4)$非零且与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均正交,则$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_3\boldsymbol{\beta}_4)=$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(8) 设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵,对于齐次线性方程(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,必有

(A) (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.

(B) (Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解,但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解.

(C) (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解.

(D) (Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解,(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解.

二、填空题:9 ~ 14小题,每小题4分,共24分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设$f(x)$在$x=0$处可导,且$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{2}{n}$,则$f'(0)=$________.

(10) 已知 $\dfrac{\ln x}{x}$是$f(x)$当$x\geqslant 1$时的一个原函数,则 $\int_1^{\mathrm{e}} x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=$________.

(11) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的麦克劳林公式中x^7项的系数是________.

(12) 设函数 $f(x,y)=\int_{x^2+y^2}^{\frac{y}{x}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,则 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=$________.

(13) 设$I(a)=\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x$,则$\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{I(a)}{\ln(1+a^2)}=$________.

(14) 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$均为$n$维非0列向量,矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}$,且$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}$,则$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=$________.