新理念

21世纪高等学校新理念教材建设工程

高等数学学习指导

（修订三版）

辽宁工业大学基础数学教研室 编

东北大学出版社
Northeastern University Press

新理念

21世纪高等学校新理念教材建设工程

高等数学学习指导

（修订三版）

辽宁工业大学基础数学教研室 编

东北大学出版社
·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导 / 辽宁工业大学基础数学教研室编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2004.8（2007. 7 重印）
21 世纪高等学校新理念教材建设工程
ISBN 978-7-81102-063-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 辽…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 078544 号

出 版 者：东北大学出版社
　　地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
　　邮编：110004
　　电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
　　传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
　　E-mail：neuph @ neupress.com
　　http：// www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：14.5
字　　数：371 千字
出版时间：2004 年 8 月第 1 版
　　2006 年 8 月第 2 版
　　2007 年 7 月第 3 版
印刷时间：2007 年 7 月第 4 次印刷
责任编辑：牛连功
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-063-2　　定　价：22.00 元

修订三版前言

本书由辽宁工业大学出版基金资助出版。

本书是根据多年的教学实践经验，参照教育部《高等数学课程教学基本要求》并结合研究生入学数学考试大纲，以及在实际教学应用中所反馈的情况，对第一版进行了全面的修订而成的。

在本次修订中，我们保留了原辅导教材的基本内容，同时也吸收了同行和读者的建议，对部分章节作了一些适当的调整，其基本思路是严格按照同济大学应用数学系主编的《高等数学》第五版（上、下册）的自然章编写，其整体结构更加严谨；每一部分又新增添了一些典型例题；对第一版中存在的个别问题也作了修正。

本书是多位作者合作的结晶。其中，第一章由张志文编写，第二章由张秀梅编写，第三章由石月岩编写，第四章由丁素珍编写，第五章由王伟志编写，第六章由杨文杰编写，第七章由陈永衡编写，第八章由孙静编写，第九章由赵殿品编写，第十章由王艳平编写，第十一章由王涛编写，第十二章由王有德编写。全书由唐剑涛教授统稿，佟绍成教授主审。

本次修订得到了辽宁工业大学数理科学系的领导及老师的大力支持和帮助，并继续得到辽宁工业大学教材出版基金的资助，在此谨表示衷心的感谢。

限于编者水平，加之编写时间仓促，新版中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

前　言

本书由辽宁工业大学出版基金资助出版。

随着我国高等教育事业的迅猛发展，有越来越多的有志青年进入大学的殿堂。高等数学作为大学的一门重要基础课，在学生后继专业课的学习中起到的支撑作用尤为明显，为帮助学生早日成材，报效祖国，根据国家教委《高等数学课程教学基本要求》及结合研究生高等数学入学考试大纲精神，由辽宁工学院基础数学教研室，从事工科数学教育多年，具有丰富教学经验、考研辅导经验的教师集体编写了这本辅导书。本书由王有德统稿。参加编写的教师有张志文、张秀梅、石月岩、丁素珍、王伟志、陈永衡、刘春华、孙静、赵殿品、王艳平、王涛、王有德。由佟绍成教授主审。并且得到辽宁工业大学教材出版基金的大力支持，在此表示感谢。

该书内容由函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、微分方程几部分组成。

针对各部分内容均给出了极为精炼的概述，并对其主要方法进行了全面的总结，同时为每一方法配以典型例题加以分析。总的来讲该书具有以下特色：

一是紧紧围绕教学基本要求、研究生高等数学入学考试大纲来确定编写内容。

二是例题、习题选取适当。

三是采取由浅入深，循序渐进的方式来叙述。

该书可供高等学校工科学生使用。

辽宁工业大学基础数学教研室

2004 年 5 月

目　录

□ 第一章　极限与函数

极限是高等数学研究的重要工具.主要内容包括数列极限与函数极限的定义及性质,函数的左、右极限,无穷小与无穷大,无穷小的比较,极限四则运算,两个极限存在准则和两个重要极限.

函数是高等数学研究的主要对象.函数的连续性是对客观世界广泛存在的连续变动现象的数学描述.连续函数具有良好的性质,极限运算也经常要借助连续函数的性质.主要内容包括函数连续的概念,间断点的分类,闭区间上连续函数的性质.

第一单元　极　限

(一)　内容提要

1. 数列极限的定义

注意　关于 $\varepsilon-N$ 语言的理解和相关的证明不作深入的要求,数列的极限可理解为 $n\to\infty$ 时数列无限趋近的数值(感性认识).

2. 收敛数列的性质

① 极限的唯一性;② 收敛数列的有界性;③ 收敛数列的保号性;④ 收敛数列与其子数列的关系.

3. 函数极限的定义

① $x\to x_0$ 时,$f(x)$的极限;② $x\to\infty$时,$f(x)$的极限(都是函数无限趋近的数值).

4. 函数极限的性质

① 唯一性;② 局部有界性;③ 局部保号性;④ 函数极限与数列极限的关系.

5. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

6. 无穷小与无穷大

① 定义; ② 无穷小与无穷大的关系(倒数关系).

7. 极限运算法则

① 有界函数与无穷小的乘积是无穷小(极限运算中非常实用的一个定理);

② 极限四则运算法则及其推论 .

注意　运用此法则的前提是两个函数都有极限,否则会出现错误,在下面的基本题型里面还会提到;数列极限的运算法则与函数极限运算法则类似.

8. 如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$, 而$\lim\varphi(x)=a$, $\lim\psi(x)=b$, 那么 $a\geqslant b$.

注意 $\varphi(x)>\psi(x)$，而$\lim\varphi(x)=a$，$\lim\psi(x)=b$，那么也有$a\geqslant b$，而不是$a>b$（读者可自行举例观察）.

9. 极限存在准则

准则Ⅰ 如果$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足下列条件：① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$；② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

注意 可以把条件①修改为$\exists N$，当$n>N$时，$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，这样一来应用的范围更广了.

准则Ⅰ′ 如果① 当$x\in\mathring{U}(x_0,r)$（或$|x|>M$）时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

$$② \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A，则\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A.$$

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限.

注意 利用此准则证明数列有极限是一种重要题型，在后面的基本题型中还会提到.

10. 两个重要极限

$$① \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1；② \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\quad\left(\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\right).$$

11. 无穷小的比较

定义 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$；如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小；如果$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq0$，$k>0$，就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小；如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

定理 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

【注】 此定理很重要，利用它可以在计算极限的时候使用无穷小代换的办法.一些常用的无穷小代换公式：① $\sin x\sim x$； ② $\tan x\sim x$； ③ $\arcsin x\sim x$； ④ $\arctan x\sim x$；
⑤ $\ln(1+x)\sim x$； ⑥ $\mathrm{e}^x-1\sim x$； ⑦ $a^x-1\sim x\ln a$； ⑧ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；
⑨ $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$； ⑩ $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$.

注意 无穷小代换只能对乘除因子使用，不能对加减项使用.例如，下列代换是错误的：

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x^3}=0.$$

12. 当$a_0\neq0$，$b_0\neq0$，m和n为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ m=n,\\ 0, & 当\ m<n,\\ \infty, & 当\ m>n.\end{cases}$$

13. 设$\lim u^v$属于∞^0或0^0或1^∞型，则$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}=\exp\lim\dfrac{\ln u}{\frac{1}{v}}$.

注意 如果$\lim u^v$属于1^∞型，那么还有另一个简单的计算方法：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim(u-1)v}$.

推导为：$\lim u^v=\lim\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-1)v}=\mathrm{e}^{\lim(u-1)v}$.

(二) 基本题型

【例 1】 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x$.

解法一 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,所以,$\frac{1}{x}$是$x\to\infty$时的无穷小,而 $\arctan x$ 为有界函数,由有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小,知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x=0.$$

解法二
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\arctan x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\arctan x=0\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\arctan x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\arctan x=0\cdot\frac{\pi}{2}=0,$$

得
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\arctan x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\arctan x=0.$$

即
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x=0.$$

易错提醒 下列的计算是错误的:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\arctan x=0.$$

因为
$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x\neq\lim_{x\to+\infty}\arctan x,$$

故$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 并不存在,所以不能应用极限存在准则.

【例 2】 设 $a>0$, $a_1>0$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$, (1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在;(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 (1) 由于 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}=\sqrt{a}>0$,

所以,$a_n\geqslant\sqrt{a}(n\geqslant2)$, $\{a_n\}$有下界.

又
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)-a_n=\frac{a-a_n^2}{2a_n}\leqslant0,$$

即$\{a_n\}$单调下降.从而$\{a_n\}$有上界,故$\{a_n\}$有界.

由单调有界数列必有极限知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$,则有:$\beta=\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{a}{\beta}\right)\Rightarrow\beta=\sqrt{a}$ (因为 $a>0$,所以负值舍去).

注意 应用单调有界数列必有极限准则证明数列极限存在,需分别证明数列的单调(增或减)性和有(上或下)界性.单调性常用数学归纳法证明,也可直接论证 $x_{n+1}-x_n$ 或$\frac{x_{n+1}}{x_n}$;有界性常采用放大或缩小 x_n 的表达式的方法来证明,也可利用一些已知的不等式.

【例 3】 计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}$ (其中 a,b,c,h,k 为常数).

分析 这是1^∞型极限.

解法一 利用重要极限.令$\frac{ax+b}{ax+c}=1+u$,则 $x=\frac{b-c-cu}{au}$,当 $x\to\infty$时,$u\to0$.

$$\text{原式}=\lim_{u\to0}(1+u)^{h\frac{b-c-cu}{au}+k}=\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{(b-c)h}{a}\cdot\frac{1}{u}+\left(k-\frac{c}{a}h\right)}$$

$$=\left[\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\frac{(b-c)h}{a}}\cdot\lim_{u\to0}(1+u)^{\left(k-\frac{c}{a}h\right)}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}.$$

解法二　利用公式 $\lim u^v=e^{\lim(u-1)v}$，得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=\exp\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}-1\right)(hx+k)=\exp\lim_{x\to\infty}\frac{b-c}{ax+c}\cdot(hx+k)=e^{\frac{(b-c)h}{a}}.$$

注意　此题结论，虽不能说作为公式，但此题解法为类似的题目提供了普遍方法．将本题中的常数任意变换可得许多变型的题目．

【例 4】　极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}$ 的结果是_______．

(A) 1　　(B) -1　　(C) 0　　(D) 不存在

分析　因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，故选(D)．

解　应选(D)．

【例 5】　设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$_________．

(A) a　　(B) b　　(C) 1　　(D) $a+b$

解　应选(B)．

分析　$b<\sqrt[n]{a^n+b^n}<\sqrt[n]{2}b$，应用夹逼准则即可得到结果．

或者：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}b\left[1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=b\cdot1^0=b$ 也可得到结果．

【例 6】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$．

解

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

【例 7】　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-4x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x}$．

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{1-4x}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x}\right],$$

又因

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-4x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(-4x)}{x}=-2,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}\cdot(-3x)}{x}=-1,$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x}=-1.$$

【例 8】 设 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 具有极限 l，试求 a 和 l 的值.

解 由于 $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$，而 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 存在，

故必有
$$\lim_{x\to -1}(x^3-ax^2-x+4)=0$$
即
$$4-a=0\Rightarrow a=4$$
代入原式有
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)(x-4)=10,$$
故 $l=10$.

【例 9】 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

易错提醒
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0.$$

错误的原因是不了解无限个无穷小之和不一定是无穷小，定理上说的是有限个无穷小之和仍然是无穷小.

【例 10】 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{x^2}\right)^3\left(3-\frac{2}{x}\right)^4}{\left(6+\frac{7}{x^2}\right)^5}=\frac{4^3\cdot 3^4}{6^5}=\frac{2}{3}.$$

注意 对形如 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$（其中 $f(x),g(x)$ 是多项式函数且 $g(x)\neq 0$）的极限，可用分子分母同除以 $f(x),g(x)$ 中 x 的最高次项，再利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$ ($k>0$，常数）可求得最终结果.但应用此法时，应注意必须是 $x\to\infty$ 这样的过程，当然，当 $x\to\pm\infty$ 时也有类似的方法.但当 x 趋于有限值时，此方法不能适用.

【例 11】 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

分析 利用函数极限与数列极限的关系，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$y_n=f(n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

解
$$\lim_{x\to+\infty}\tan^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{1}{x}}{1-\tan\frac{1}{x}}\right)^x,$$
而
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}x\tan\frac{1}{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\mathrm{e},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\tan\frac{1}{x}\right)^x=\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\left(-x\tan\frac{1}{x}\right)\right]=\exp\left(-\lim_{x\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\mathrm{e}^{-1},$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\tan^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)=e^2.$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=e^2.$$

【例 12】 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

分析 求极限的式子比较复杂,可试用等价无穷小替换,变简单后再求之.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\sin^2x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x\cdot e^{2x}}{e^x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to0}e^x=1.$

【例 13】 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

分析 采用与通分相反的变形法,分解为简单分式(或部分分式),再用正负项相抵消简化.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1.$

【例 14】 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$.

分析 将$(1+x)^x$ 变成 $e^{x\ln(1+x)}$,再用无穷小替换.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x^2}=1.$

【例 15】 计算$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

分析 适当利用变量替换解极限问题,有时候效果非常明显.

解 令 $t=x^x-1$,则 $x\to1$ 时,$t\to0$.

原式$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1.$

(三) 同步训练

1. 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ ($p>0,q>0;p,q$ 为常数).

2. 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\dfrac{1}{x}$.

3. 设 $x_1>a>0$,且 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}(n=1,2,\cdots)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并且求此极限值.

4. 计算$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$.

5. $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 证明$\lim\limits_{x\to0}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$不存在.

7. 设 $x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})$.

9. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+4}{ax+1}\right)^{bx}\quad(a\neq0,b\neq0)$.

10. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right]$.

11. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$.

12. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x-2)-\ln(x+1)]$.

13. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}-1}$.

14. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2x)}{e^{x^2}-1}$.

15. 试求常数 a,b，使极限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-ax+b}{x^2-4}=-\dfrac{1}{4}$.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x<0,\end{cases}$ 问 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

17. 计算 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

18. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}$.

(四) 参考答案

1. $\dfrac{q}{p}$.　提示:分子、分母有理化.

2. 0.　提示:有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

3. a.　提示:证明此题需证两方面问题:①数列有界;②数列单调.计算的时候把递推公式两边取极限.

4. e.　提示:1^∞ 型极限，可以利用 $\lim u^v=e^{\lim v(u-1)}$.

5. 1.　提示:用夹逼准则

6. $\lim\limits_{x\to0^-}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，故原极限不存在.

7. 3.　提示:$3<x_n<3\cdot3^{\frac{1}{n}}$，由夹逼准则可得.

8. 0.　提示:分子有理化.

9. $e^{\frac{3b}{a}}$. 提示:用重要极限或 $\lim u^{v}=e^{\lim v(u-1)}$.

10. 1. 提示:$x\to0^-$时,$e^{\frac{1}{x}}\to0$,$\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}\to2$,$\dfrac{x}{|x|}\to-1$,$\lim\limits_{x\to0^-}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right]=2-1=1$;

$x\to0^+$时,$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$,$\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}\to0$,$\dfrac{x}{|x|}\to1$,$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right)=0+1=1$.故原式=1.

11. 1. 提示:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{\tan x}}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}(e^{x-\tan x}-1)}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x-\tan x}=1$.

12. -3. 提示:$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x-2)-\ln(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{x}$.

13. 1. 提示:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=1$.

14. 1. 提示:利用等价无穷小代换.

15. $a=5,b=6$. 提示:若使极限存在,必有$\lim\limits_{x\to2}(x^2-ax+b)=0$,故 $b=2a-4$.将 $b=2a-4$代入极限式中,可得$\dfrac{4-a}{4}=-\dfrac{1}{4}$.

16. 分别求左右极限,发现相等,故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

17. $\dfrac{1}{2}$. 提示:先作恒等变形,并作等价无穷小因子替换.

18. 3. 提示:分成两项分别计算.

第二单元　函数、连续

(一)　内容提要

1. 函数在一点 x_0 处连续的定义

定义 1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 连续.

定义 2　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 连续.

定义 2′　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 连续(此定义常适用于检验分段函数分界点处的连续性).

2. 函数在某一区间连续的定义

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数.初等函数在其定义区间上每一点都连续.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$可以用来计算初等函数在连续点处的极限.