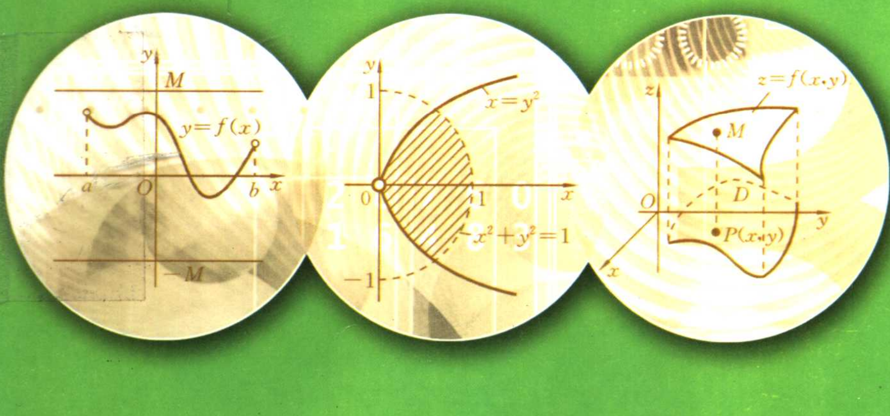
高等院校公共基础课

应用高等数学

（上册）

YINGYONG
GAODENG
SHUXUE

俞礼钧 王裕民 主编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

高等院校公共基础课

应用高等数学（上册）

主　编　俞礼钧　王裕民
副主编　彭祥光　王　力
　　　　赵丽君　陈　铭

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学(上册)/俞礼钧　王裕民　主编
武汉:华中科技大学出版社,2006年10月
ISBN 7-5609-3825-6

Ⅰ.应…
Ⅱ.①俞…　②王…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

应用高等数学(上册)　　　　俞礼钧　王裕民　主编

策划编辑:严世圣
责任编辑:张　毅　　　　封面设计:刘　卉
责任校对:刘　竣　　　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
　　　　武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:湖北科学技术出版社黄冈印刷厂

开本:787×960　1/16　　印张:11.75　　字数:207 000
版次:2006年10月第1版　　印次:2006年10月第1次印刷　　定价:35.00元(上、下册)
ISBN 7-5609-3825-6/O·399

前　言

本书分为上、下两册，上册是一元函数微积分学，下册包括线性代数和概率论与数理统计，各章分节附有习题，文后附有习题答案．

本书可作为高等学校三类本科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的教材或教学参考书．

本书由俞礼钧、王裕民担任主编，彭祥光、王力、赵丽君、陈铭担任副主编．其中，第 2 章和第 7 章由俞礼钧负责编写，第 5 章和第 6 章由王裕民负责编写，第 11 章、第12 章和第13 章由彭祥光负责编写，第1 章和第9 章由王力负责编写，第3 章、第4 章、第8 章和第 10 章由赵丽君负责编写．

本书在编写上侧重于应用，对过于复杂的定理证明以及在实际问题中应用较少的都予以省略，不去强调论证的严密性．

本书在知识结构、教学内容、体例编写等方面，力求提供丰富的素材，贯彻深入浅出的原则，重视数形结合的方法，强化计算工具的使用．将现代生活和各类专业学习中均有广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证普通高校基础教学的教学水平．编写过程中，编者注意渗透现代教学的观点和方法，为学生深入学习奠定了较好的基础．

教材编写具有一定的弹性，希望使适用面更为广泛．为了帮助三类本科在内的各种高职高专学校的学生根据实际情况选择不同的内容，教材的编写体现了培养应用型人才的特色．

本书在编写过程中，得到了编者所在学校领导和教务处的有力支持以及有关教师的热情帮助，在此一并表示诚挚的谢意．

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者和从事教学的教师提出批评和建议．

编　者

2006 年 6 月

目　　录

第1章　极限与连续

高等数学的一个主要内容是微积分学,简称微积分. 极限是微积分的基本概念之一,是微积分各种概念和计算方法能够建立和应用的基础. 极限方法是研究函数的一种基本方法. 本章将在对变量、函数进行复习和补充的基础上,介绍极限以及与极限密切相关的函数连续性的基本知识.

1.1　函　　数

函数是微积分的研究对象. 在中学里已学习过函数的概念,这里不是进行简单的重复,而是要从全新的角度对它进行描述并重新分类.

1.1.1　函数的概念

1. 常量与变量

人们在观察自然现象或社会现象的过程中,会经常遇到各种不同的"量". 其中,有的"量"在观察过程中保持固定的数值,称为常量,一般用字母 a,b,c 等表示;还有一些量在观察过程中会不断变化,称为变量,一般用 x,y,z 等表示.

2. 函数的概念及表示法

函数是反映两个变量之间相互依赖关系的数学模型. 函数概念经过了漫长的发展历史,演变成今天的科学描述.

【定义1】 设 x 和 y 是两个变量,D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集,对于任意的 $x\in D$,变量 y 按照某个对应规则 f 有唯一确定的实数与之对应,则称 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数,记为 $y=f(x)$. 这里,x 称为自变量,y 称为因变量或函数,D 称为 $f(x)$ 的定义域,数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为 $f(x)$ 的值域.

【说明】

(1) f 是指定义域 D 上的对应规则,而 $f(x)$ 为函数. 由于在高等数学中,通常是通过函数值的变化来研究函数 $f(x)$ 的性质的,故习惯上直接称 $f(x)$ 是 x 的函

数,或 y 是 x 的函数.

(2) 函数的实质是指定义域 D 上的对应规则 f. 例如,对于函数 $y=1+x^2$ 和 $y=1+t^2$,它们的定义域都是 $D=\mathbf{R}$,且对于 $\mathbf{R}$ 中任意实数 a,两个函数都有相同的实数 $1+a^2$ 与之对应,即有相同的对应规则,因此,它们是相同的函数. 例如,$y=x$ 与 $y=|x|$,它们的定义域相同,但对应规则不同,因此,它们是不同的两个函数. 又如,$y=\dfrac{1}{x+1}$ 与 $y=\dfrac{x}{x(x+1)}$,由于它们的定义域不同,故它们是两个不同的函数.

(3) $f(x)$ 的定义域 D 有时记为 D_f,值域有时记为 R_f,当定义域为区间时,这个区间称为定义区间.

(4) 这里定义的函数是一个自变量对应一个因变量的函数,称为一元函数. 实际上,存在多个自变量对应一个因变量的函数,称为多元函数.

【例 1】 某超市 2006 年第一季度各月销售额(万元)如表 1-1 所示.

表 1-1

月份	1	2	3
销售额/万元	103.2	189.3	92.5

这种用表格表示的两种量的对应规则是一种函数关系,定义域为{1,2,3},值域为{103.2,189.3,92.5}.

【例 2】 图 1-1 所示的是用气温自动仪记录的某地某天24 小时的气温变化曲线. 该曲线描述了当天气温 T 随时间 t 变化而变化的情形. 对于任何时刻 $t_0\in[0,24]$,可按图1-1 中箭头所示的对应规则唯一确定 t_0 时刻的气温值 T_0.

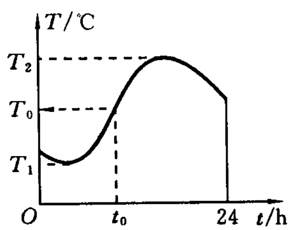


图 1-1

【例 3】 设某商店购进鸡蛋 1 000 千克,按每千克 7 元的价格出售. 当售出的数量为 x 千克时,其收益 y 可按公式

$$y=7x,\quad x\in[0,1\,000]$$

算出唯一确定的数值. 这里两个变量 x,y 之间的函数关系直接用数学式子表示.

由例 1、例 3 可以看出,常用的函数表示法有三种:表格法、图示法和解析法(或公式法). 此外,还有其他的函数表示法. 如"y 为不超过 x 的最大整数",是用语言定义的函数,通常记为 $y=[x]$. 例如,$[2.5]=2$,$[-2.5]=-3$.

表格法(如各种函数表、经济统计报表等)便于求函数值;图示法使函数的变化显得直观;解析法便于运算和分析,用得最多. 这三种函数的表示法各有优缺点,常将它们结合起来使用.

需要特别指出的是,公式法不一定仅用一个公式表示函数. 在实际应用中经常

会遇到这样的函数：在定义域的各个不相交的子集(多为子区间)上，函数分别用不同的解析表达式表示，这类函数称为分段函数，例如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

和符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

都是分段函数.

【注意】 分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

3. 函数定义域的求法

如果函数是用解析法表示的，且未赋予实际意义，则其定义域就是使函数的解析式有意义的自变量所有可能取值的集合. 例如，$y=\sqrt{x}$ 的定义域为使 $\sqrt{x}$ 有意义的 x 的全体，即 $x\geqslant 0$.

对于实际应用问题中的函数，其定义域应由问题的实际意义来确定. 例如，例3中的函数 $y=7x$，其定义域为[0,1 000]，但舍去其实际意义来看，对于一般函数 $y=7x$ 来说，其定义域为全体实数，即 $D=\mathbf{R}$.

【例4】 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$；

(2) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$；

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$；

(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$；

(5) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

【解】 (1) 在分式 $\dfrac{3}{5x^2+2x}$ 中，分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq -\dfrac{2}{5}$ 且 $x\neq 0$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$；

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于或等于零，所以 $16-x^2\geqslant 0$，解得 $-4\leqslant x\leqslant 4$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,4]$；

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以 $4x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{4}$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$；

(4) 由反正弦知，$-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$，解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$；

(5) 该函数为(3)、(4)两例中函数的代数和，此时函数的定义域应为(3)、(4)

两例中定义域的交集,即$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)\cap[0,1]=\left(\frac{3}{4},1\right]$.

【例5】 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2+2, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

(1) 求其定义域并作图; (2)求函数值$f\left(-\frac{1}{2}\right),f(0),f\left(\frac{1}{2}\right)$.

【解】 (1)由函数的表达式可知,该函数的定义域为三个子集$[-1,0),\{0\}$,$(0,1]$的并集,即$D=[-1,0)\cup\{0\}\cup(0,1]=[-1,1]$.

按函数在定义域各子集上的相应表达式,分段作图,则该函数的图形如图1-2所示.

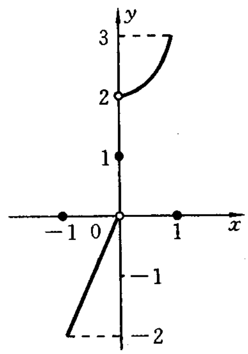


图1-2

(2) 因为 $-\frac{1}{2}\in[-1,0)$,

故 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$;

又 $0\in\{0\}$,

故 $f(0)=1$;

又 $\frac{1}{2}\in(0,1]$,

故 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=2\frac{1}{4}$.

1.1.2 函数的基本特性

给定一个函数,它会具有各种各样的特性,其中与函数的几何图形有关的单调性、有界性、奇偶性和周期性最为重要,下面作简单介绍.

1. 单调性

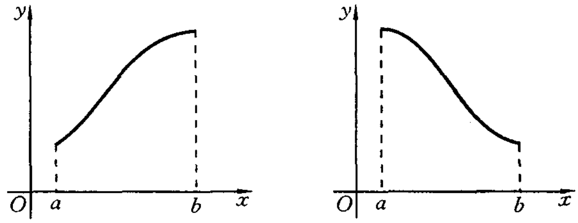
【定义2】 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subseteq D$,如果对于任意的$x_1,x_2\in I$,且$x_1<x_2$,

(1) 若$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间I上单调增加;

(2) 若$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间I上单调减少.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数,使函数$f(x)$单调的区间称为单调区间,如图1-3(a)、(b)所示的函数,在所给区间$[a,b]$上分别为单调增加函数与单调减少函数.

【注意】 单调性与区间密切相关,例如,$y=\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加,在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调减少;$y=\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调减少,在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上仍然单调减少,如



(a)　　　　(b)

图 1-3

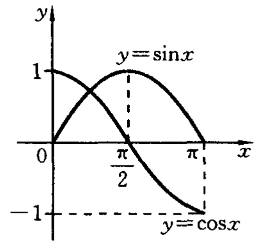


图 1-4

图 1-4 所示.

2. 有界性

【定义3】 设函数$f(x)$的定义域为D,如果存在正常数M,使得对于任意的$x\in D$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在D上有界,否则,称$f(x)$在D上无界;如果$f(x)$在D上是有界的,则称函数$f(x)$为D上的有界函数.

如图 1-5 所示,函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有界的几何意义是:曲线$y=f(x)$在区间(a,b)内被限制在$y=-M$与$y=M$两条直线之间.

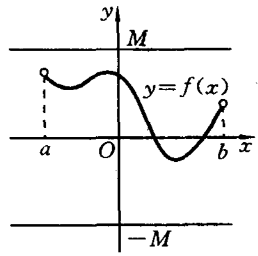


图 1-5

对于函数的有界性,要注意以下两点.

(1) 当一个函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有界时,正数M的取法不是唯一的. 例如,$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,只要取$M\geqslant 1$,总有$|\sin x|\leqslant M$.

(2) 有界性是依赖区间的,例如,$y=1/x$在区间$(1,2)$内是有界的,但在区间$(0,1)$内则是无界的.

3. 奇偶性

【定义 4】 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称(即若$x\in D$,则必有$-x\in D$),如果对于任意$x\in D$,$f(-x)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为偶函数;如果对于任意$x\in D$,$f(-x)=-f(x)$恒成立,则称$f(x)$为奇函数.

偶函数的图形是关于y轴对称的,奇函数的图形是关于原点对称的.

4. 周期性

【定义 5】 设函数$f(x)$的定义域为D,如果存在一个不等于零的常数T,对于任意$x\in D$,有$(x\pm T)\in D$,且$f(x+T)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为周期函数,T称为$f(x)$的周期. 通常说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数$y=\sin x$,$y=\cos x$都是以2π为周期的周期函数;函数$y=\tan x$,$y=\cot x$是以π为周期的周期函数. 图1-6 所示的周期为T的一个周期函数,在这个函数定义域内每个长度为T的区间上,函数图形有相同的形状.

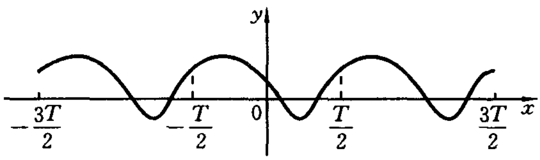


图 1-6

1.1.3 复合函数与反函数

1. 复合函数

进行函数研究时,可把某些函数看成是由几个简单函数复合而成的复合函数,这样对函数的研究会带来方便. 下面先举一个例子说明什么是复合函数.

例如,函数$y=\sqrt{1-x^2}$表示y是x的函数,它的定义域为$[-1,1]$. 如果引进辅助变量u,把这个函数的对应规则看成是这样的:首先,对于任意$x\in[-1,1]$,通过函数$u=1-x^2$得到对应的u值;然后,对于这个u值,通过函数$y=\sqrt{u}$得到对应的y值,则可以说函数$y=\sqrt{1-x^2}$是由函数$y=\sqrt{u}$和$u=1-x^2$复合而成的复合函数,辅助变量u称为中间变量.

一般地,若函数$y=f(u)$的定义域为D_1,函数$u=\varphi(x)$在D_2(D_2是看成复合函数的那个函数的定义域)上有定义,而$W_2=\{u\,|\,u=\varphi(x),x\in D_2\}$,且$W_2\subseteq D_1$,那么,对于任意$x\in D_2$,通过函数$u=\varphi(x)$有唯一确定的$u\in W_2$与之对应,由于$W_2\subseteq D_1$,因此对于这个$u$值,通过函数$y=f(u)$有唯一确定的$y$值与之对应,则对于任意$x\in D_2$,通过$u$有唯一确定的$y$值与之对应,从而得到一个以$x$为自变量、$y$为因变量的函数,这个函数称为由函数$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

而u称为中间变量.

由以上说明可知,复合函数是说明函数对应规则的某种表达方式的一个概念,利用这个概念,有时可以把函数分解成几个函数,另一方面也可以利用它来产生新的函数.

例如,函数$y=\arctan(x^2)$可以看成由$y=\arctan u$和$u=x^2$复合而成的.

必须注意的是,不是任何两个函数都能够复合成一个复合函数的. 例如,$y=\arcsin u$及$u=2+x^2$就不能复合成一个复合函数,因为在$u=2+x^2$的定义域$(-\infty,+\infty)$内,任何x值所对应的u值都大于或等于2,都不能使$y=\arcsin u$有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成,例如,设$y=\sqrt{u}$,$u=\cot v$,$v=\frac{x}{2}$,则得复合函数$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$,这里u及v都是中间变量.

【例6】 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=3^{x^2-1}$;　　　　(2) $y=\tan^2 x$;

(3) $y=\ln(\cos 2x)$;　　　　(4) $y=2\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

【解】 (1) 函数 $y=3^{x^2-1}$ 由函数 $y=3^u$ 和 $u=x^2-1$ 复合而成;

(2) 函数 $y=\tan^2 x$ 由函数 $y=u^2$ 和 $u=\tan x$ 复合而成;

(3) 函数 $y=\ln(\cos 2x)$ 由函数 $y=\ln u, u=\cos v$ 及 $v=2x$ 复合而成;

(4) 函数 $y=2\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 由函数 $y=2\arcsin u, u=\sqrt{v}, v=1-x^2$ 复合而成.

2. 反函数

在函数 $y=f(x)$ 中,x 是自变量,y 是因变量,然而在同一过程中存在函数关系的两个变量究竟哪一个是自变量,哪一个是因变量,并不是绝对的,要视问题的具体要求而定. 例如,在甲商品销售中,已知甲商品价格为 p,如果想从甲商品销售量 x 来确定甲商品销售总收入 y,那么 x 是自变量,y 是因变量,其函数关系为

$$y=px. \tag{1.1.1}$$

相反,如果想从甲商品销售总收入 y 确定其销售量 x,就得把 y 取做自变量,把 x 做因变量,并可由式(1.1.1)把 x 解出,得函数关系为

$$x=\frac{y}{p}. \tag{1.1.2}$$

从式(1.1.2)可知,对于每一个值 y,都有唯一的一个 x 与之对应,则把式(1.1.2)称为式(1.1.1)的反函数.

【定义6】 设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数,如果对于其值域 R_f 中的任一值 y,都可以通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 D_f 中确定唯一的一个 x 与之对应,则得到一个定义在 R_f 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数,称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,并称 $y=f(x)$ 为直接函数.

习惯上,x 表示自变量,y 表示因变量,因此,$y=f(x)$ 的反函数通常又表示为 $y=f^{-1}(x)$,可以证明函数 $y=f(x)$ 的图形和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

【例7】 求函数 $y=3x+2$ 的反函数.

【解】 由 $y=3x+2$,解出 $x=\frac{y-2}{3}$. 交换字母 x,y,得 $y=\frac{x-2}{3}$. 因此,得出 $y=3x+2$ 的反函数是 $y=\frac{x-2}{3}$.

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

通常称下列六类函数为基本初等函数,必须非常熟悉它们的解析表达式、定义

域、主要性质以及它们的图形特点.

(1) 常量函数 $y=C$ (C 为常数).

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$,都有$y=C$,所以它的图形是过点$(0,C)$且平行于x轴(当$C=0$时与x轴重合)的一条直线,如图1-7 所示.

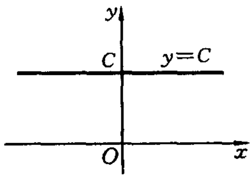
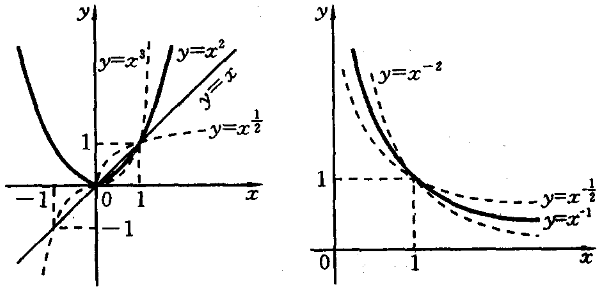


图 1-7



(a)　　　　(b)

图 1-8

(2) 幂函数 $y=x^a$(a 为常数).

随着a值的不同,幂函数的定义域和值域会不相同. 但不论a为何值,$x>0$必在其定义域内而且图形都过点$(1,1)$. 当$x>0$时,若$a>0$,则$y=x^a$为单调增函数,如图1-8(a)所示;若$a<0$,则$y=x^a$为单调减函数,如图1-8(b)所示.

(3) 指数函数 $y=a^x$(a 是常数且$a>0,a\neq1$).

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域$y>0$. 当$a>1$时,$y=a^x$为单调增函数;当$0<a<1$时,$y=a^x$为单调减函数,指数函数图形在x轴上方,且过点$(0,1)$,如图1-9 所示.

在实际应用问题中,常出现以e为底的指数函数$y=e^x$(e 为无理数).

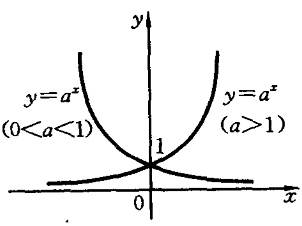


图 1-9

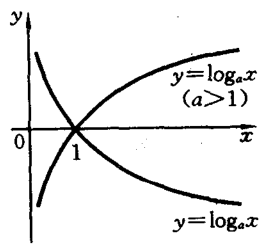


图 1-10

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ (a 为常数且$a>0,a\neq1$).

它的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 当$a>1$时,$y=\log_a x$为单调增函数;当$0<a<1$时,$y=\log_a x$为单调减函数. 对数函数的图形在y轴的右方,且过点$(1,0)$. $y=\log_a x$的图形如图1-10 所示.