高等学校数学及其应用系列丛书

实变函数

杨海欧◎主编

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

实变函数

主编　杨海欧
主审　罗跃生

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书共分4章，第1章集合与势，介绍了集的运算和势，并讨论了实数点集以及开集、闭集的性质。第2章为测度论，介绍了勒贝格测度。第3章、第4章讨论了可测函数及其勒贝格积分和积分序列的极限，并建立了控制收敛定理。

本书可作为工科院校各专业研究生的数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数/杨海欧主编．—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2007.11

ISBN 978-7-81133-066-3

Ⅰ.实…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.实变函数　Ⅳ.O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第161940号

出版发行　哈尔滨工程大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码　150001
发行电话　0451-82519328
传　　真　0451-82519699
经　　销　新华书店
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　850mm×1 168mm　1/32
印　　张　3.75
字　　数　96千字
版　　次　2007年11月第1版
印　　次　2007年11月第1次印刷
定　　价　10.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

本书是根据高等学校工科学生的学习需要编写的，学生们在学习这门课时，对其抽象的数学理论和思维方法总感到困难，其主要原因是多数教材都以数学专业的学生为对象，内容处理上偏理，语言过于抽象。我们根据多年工科学生的教学经验吸取了现有教材的优点，本着易教易学的原则编写了本书。

本书的主要内容是测度论和积分论（勒贝格测度和勒贝格积分理论），这部分内容为进一步学习分析数学，如泛函分析、概率论、微分方程等提供了必要的基础。

根据工科学生的特点和学习要求，本书以高等数学为基础，第1章介绍了集和映射等相关概念，同时也介绍了一些实数理论和极限理论。第2章介绍了勒贝格测度，为了便于理解，本书采用内外测度的方法构造有界点集的测度。第3章、第4章介绍了可测函数和勒贝格积分。从简单函数的积分入手引入勒贝格积分，从而有利于读者理解勒贝格积分的实质及勒贝格积分和黎曼积分的关系。

本书力求做到文字通俗、内容由浅入深，由特殊到一般；证明和解释尽量详细，并提供了许多例子以帮助读者对定义、定理及抽象数学理论加深理解，并注重对读者数学思维方法的训练，以期为读者进一步学习泛函分析、概率论、微分方程打下良好的基础。

参加本书编写的有杨海欧、杜维华、孙广毅。

虽然我们力求本书易教易学，但由于编者水平有限，书中尚存许多不足和错误，希望读者给予批评指教。

编　者

2007年10月

目　　录

第1章 集合与势

1.1 集合和集的运算

1. 集合的概念

集合或集是数学中最基本的概念之一.我们把在一定范围内,或满足某些条件的个体事物的全体称为一个集合(或集).构成这个集合的每个个体事物称为这个集的元素.

例如,自然数全体是一个集合,每个自然数都是它的元素;仅含1的集合;由方程 $x^2+2x-3=0$ 的根组成的集合以数1和 -3 为其元素.$[0,1]$上的所有连续函数构成了一个集合,则$[0,1]$上定义的函数 $f(x)=x^2+1$ 为它的一个元素.

注:一个集合的各个元素必须是彼此互异的.例如,方程 $(x-1)^2=0$的根所成的集合仅有一个元素1.

我们常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示集的元素.习惯上用 R 表示全体实数的集合,Q 表示全体有理数的集合,Z 表示整数集,N 表示自然数集.有时为了特别说明或强调集合中元素所应满足的条件,也用记号

$$\{x \mid x \text{ 应具有的性质或条件}\}$$

表示集合,其中 x 是这个集合的元素.

例 1.1 $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$表示平面上以原点为中心、半径为1的圆周上的点全体.而当集合中令有有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 时,称此集为有限集.用记号$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$表示此集合.例如$\{1,3,5\}$表示由数1,3,5组成的集合.

对于一个集合 E,一个事物 x 或者是E 的元素(这时称 x 属

于E)，记作$x\in E$；或者不是E的元素(这时称x不属于E)，记作$x\overline{\in}E$；二者必居其一.

2. 集合间的关系

若集A的每个元素都是B的元素，称A是B的子集，记作$A\subset B$，读作B包含A，或A含在B中. 若$A\subset B$，并且存在$b\in B$，但$b\overline{\in}A$，则称A是B的真子集.

如果集A,B有关系$A\subset B$，且$B\subset A$，则称集A等于B，记作$A=B$. 例如$\{x|x^2+2x-3=0\}=\{1,-3\}$，$\{1,3,5\}=\{1,5,3\}$.

3. 集合的运算

设A,B为两集合，定义

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或者 }x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 并且 }x\in B\},$$
$$A-B=\{x|x\in A\text{ 但 }x\overline{\in}B\}$$

分别为A与B的并集，交集和差集(图1-1).

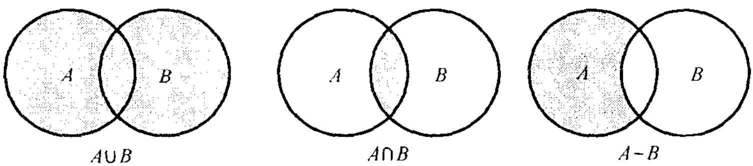

图 1-1

当$B\subset A$时，$A-B$也称作B关于A的补集，记作C_AB.

为了研究方便，我们引入不含任何元素的集合，称为空集，记为$\varnothing$. 空集是任何集合的子集. 当$A\cap B=\varnothing$时，称A与B不相交.

例 1.2 $A=\{1,2,4,8\}$，$B=\{1,4,6,9\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,4,6,8,9\},A\cap B=\{1,4\},$$

$$A-B=\{2,8\},B-A=\{6,9\}.$$

有时我们所讨论的集合都是某一固定集合的子集，则称这一固定集合为基本集. 当 A 为基本集时，C_AB 可简写成 CB，读作 B 的补集.

当 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族集合(这里称 I 为指标集，对每个 $\alpha\in I$，A_α 为一集合)时，定义

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid 有\ \alpha_0\in I,使\ x\in A_{\alpha_0}\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid 对每个\ \alpha\in I,有\ x\in A_\alpha\}$$

关于集合的运算具有下列性质：

1°. $A\cup A=A$，$A\cap A=A$.

2°. $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$(交换律).

3°. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(交的结合律).

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$(并的结合律).

4°. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$(分配律).

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$(分配律).

5°. $C(CA)=A$.

6°. $A-B=A\cap CB$.

证明 4°中第一式. 对每个 $x\in(A\cup B)\cap C$，有 $x\in A\cup B$ 且 $x\in C$，而由 $x\in A\cup B$，有 $x\in A$ 或 $x\in B$. 综合有或者 $x\in A\cap C$，或者 $x\in B\cap C$. 于是 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$. 即 $(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

反之，若 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，则有 $x\in A\cap C$ 或者 $x\in B\cap C$，所以 $x\in C$，并且 $x\in A\cup B$，于是 $x\in(A\cup B)\cap C$，即 $(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$；综合得

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

其它的证明留给读者自己证明.

例 1.3 设 $A_n=(0,n)$，则集列 $\{A_n\}$ 为渐张列，即 $A_1\subset A_2\subset\cdots$，并且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=(0,+\infty)$，若记 $A_0=\varnothing$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n-1})$$

其中$(A_i - A_{i-1}) \cap (A_j - A_{j-1}) = \varnothing$(当 $i \neq j$ 时). 即$(0, +\infty)$也可以分解成互不相交的集列$\{A_n - A_{n-1}\}$的并集.

例 1.4 设 $A_n = (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \cdots$, 则$\{A_n\}$为渐缩列, 并且$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1]$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 2)$.

关于并集和交集的补集, 有下面的性质(称为迪摩根对偶法则).

1° $C(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (CA_\alpha)$;

2° $C(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (CA_\alpha)$.

证 (i)设 $x \in C(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$, 则 $x \overline{\in} \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 即每个 A_α 均不包含 x, 所以对每个 $\alpha \in I$, 有 $x \in CA_\alpha$, 即 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (CA_\alpha)$. 由此得 $C(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in I} (CA_\alpha)$.

同理可证$\bigcap_{\alpha \in I} (CA_\alpha) \subset C(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$, 所以(1°)成立.

同理可证(2°)成立.

4. 集列的上限集与下限集

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一列集. 记

$$\overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \quad \underline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,$$

分别称为集列$\{A_n\}$的上限集和下限集. 特别当$\overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n} A_n$ 时, 称此集为集列$\{A_n\}$的极限, 记为$\lim_n A_n$.

例 1.5 若$\{A_n\}$为渐张集列(即 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$), 则$\lim_n A_n$ 存在, 且等于$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

证 因为 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 所以

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=2}^{\infty} A_m = \cdots = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

故 $\overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$

而对每个 n，$\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = A_n$，于是

$$\underline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

所以

$$\overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

同理也可证渐缩集列 $\{A_n\}$ 的极限是 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

关于上限集和下限集有下面等价条件。

定理 1.1

(ⅰ) x 属于 $\overline{\lim_n} A_n$ 的充要条件是 x 属于无穷多个集 A_n.

(ⅱ) x 属于 $\underline{\lim_n} A_n$ 的充要条件是存在某个 n，使对每个 $m \geqslant n$，有 $x \in A_m$.

证 (ⅰ) 设 $x \in \overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$，则对每个 n，有 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$，所以存在某个 $i_n \geqslant n$，使 $x \in A_{i_n}$，所以 $\{A_n\}$ 中有无穷多个集含 x.

反之，若 $\{A_n\}$ 中有无穷多个集合包含 x，则对每个自然数 n，$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$，于是 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$.

(ⅱ) 设 $x \in \underline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right)$，则有自然数 n，使 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，于是当 $m \geqslant n$ 时有 $x \in A_m$.

反之，若存在 N，使当 $m \geqslant N$ 时有 $x \in A_m$，则 $x \in \bigcap_{m=N}^{\infty} A_m$，所以 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right)$.

例 1.6 设 $A_{2n} = \left(0, 1 - \frac{1}{2n}\right)$，$A_{2n-1} = \left[\frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2,$

…)，求证

$$\overline{\lim_n} A_n = (0,2], \quad \underline{\lim_n} A_n = [\frac{1}{2},1).$$

证 先证 $\overline{\lim_n} A_n = (0,2]$. 对任何 $x \in (0,2]$，若 $x \in (0,\frac{1}{2})$，则每个集 A_{2n} 都包含 x. 由定理 1.1 $x \in \overline{\lim_n} A_n$. 若 $x \in [\frac{1}{2},2]$，则每个集 A_{2n-1} 都包含 x，所以 $x \in \overline{\lim_n} A_n$，$(0,2] \subset \overline{\lim_n} A_n$.

而若 $x \leqslant 0$，显然一切 A_n 都不含 x，所以 $x \overline{\in} \overline{\lim_n} A_n$. 若 $x > 2$，每个 A_{2n} 都不包含 x，并且由 $\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) = 2$，存在 N，使当 $n > N$ 时 $2+\frac{1}{n} < 2+(x-2) = x$，即 $n > N$ 时 A_{2n-1} 均不包含 x，于是 $x \overline{\in} \overline{\lim_n} A_n$.

综合有 $\overline{\lim_n} A_n = (0,2]$.

证 $\underline{\lim_n} A_n = [\frac{1}{2},1)$.

若 $x \in [\frac{1}{2},1)$，显然每个集 A_{2n-1} 均包含 x，因为 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n}) = 1$，取 $\epsilon = 1-x$，存在 N 使当 $n > N$ 时 $1-(1-\frac{1}{2n}) < 1-x$，即 $1-\frac{1}{2n} > x$. 于是当 $n > N$ 时，x 属于 A_{2n}，所以 $x \in \underline{\lim_n} A_n$.

而若 $x < \frac{1}{2}$，则每个 A_{2n-1} 都不包含 x，所以 $x \overline{\in} \underline{\lim_n} A_n$；而若 $x \geqslant 1$，x 不属于每个 A_{2n}，故 $x \overline{\in} \underline{\lim_n} A_n$. 综合有

$$\underline{\lim_n} A_n = [\frac{1}{2},1).$$

5. 函数与集

定义 1.1 设 X 是一个不空的集合，如果按照对应关系 f，每

个 $x\in X$ 都有一个实数或 $\pm\infty$ 与之对应,便称对应关系 f 是定义在 X 上的实函数,记作 $f(x)$. 特别若对每个 $x\in X$, $f(x)$ 都是实数,我们称 $f(x)$ 为有限的.

和高等数学中完全类似,我们可以定义一般集上的两个有限的函数 f 与 g 的和 $f+g$,差 $f-g$,积 $f\cdot g$,商 $\dfrac{f}{g}(g\neq 0)$,以及绝对值函数 $|f|$,函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛等等.

当集 E 上的实数函数 f 给定以后,对任意给定的实数 c,记

$$E(f>c)=\{x\mid x\in E, f(x)\in(c,+\infty]\}$$

这是集 E 的一个子集(见图 1-2). 以后用记号 $E(f\geqslant c)$, $E(\alpha<f\leqslant\beta)$ 等均照此理解.

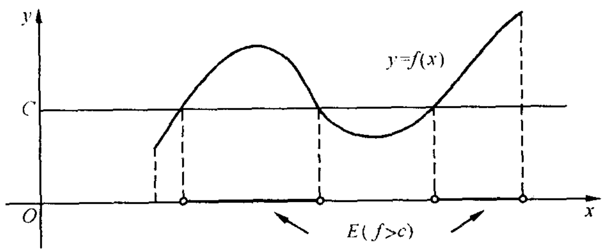

图 1-2

关于这些集合,我们有下面的等式成立.

1° $E(f\geqslant\alpha)\cup E(f<\alpha)=E$.

2° $E(f\geqslant\alpha)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f>\alpha-\dfrac{1}{n})$.

3° $E(f>\alpha)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f\geqslant\alpha+\dfrac{1}{n})$.

4° $E(f>\alpha)=E(f=+\infty)\cup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(\alpha<f\leqslant\alpha+n))$.

5° $E(f=+\infty)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f>n)$.

6° $E(f=-\infty)=E-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f>-n)$.

证 2°. 对任何 $x\in E(f\geqslant\alpha)$，有 $f(x)\geqslant\alpha$；所以对每个正整数 n，有 $f(x)>\alpha-\dfrac{1}{n}$，即 $x\in E(f>\alpha-\dfrac{1}{n})$. 所以 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f>\alpha-\dfrac{1}{n})$. 即

$$E(f\geqslant\alpha)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f>\alpha-\frac{1}{n}).$$

反之，若 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(f>\alpha-\dfrac{1}{n})$，则对一切正整数 n 有 $x\in E(f>\alpha-\dfrac{1}{n})$，即 $f(x)>\alpha-\dfrac{1}{n}$，令 $n\to+\infty$，有 $f(x)\geqslant\alpha$，所以 $x\in E(f\geqslant\alpha)$，于是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f>\alpha-\frac{1}{n})\subset E(f\geqslant\alpha).$$

所以 2°中等式成立.

3° 对任意 $x\in E(f>\alpha)$，有 $f(x)>\alpha$，或 $f(x)-\alpha>0$，于是有自然数 N，满足 $f(x)-\alpha\geqslant\dfrac{1}{N}$，即 $f(x)\geqslant\alpha+\dfrac{1}{N}$，因此

$$x\in E(f\geqslant\alpha+\frac{1}{N}),$$

故

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f\leqslant\alpha+\frac{1}{n})$$

所以

$$E(f>\alpha)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f\geqslant\alpha+\frac{1}{n}).$$

而若 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f\geqslant\alpha+\dfrac{1}{n})$，有 n_0 使 $x\in E(f\geqslant\alpha+\dfrac{1}{n_0})$，所以 $f(x)\geqslant\alpha+\dfrac{1}{n_0}>\alpha$，故 $x\in E(f>\alpha)$，即得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f\geqslant\alpha+\dfrac{1}{n})\subset$

$E(f>\alpha)$.综合有 3°中等式成立.

其余的证明类似,留给读者作练习.

例 1.7 设 $f(x), f_n(x)(n=1,2,\cdots)$是定义在集合 E 上的有限函数,对任意的 $\varepsilon>0$,令

$$E_n(\varepsilon)=E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$$

则可证明$\overline{\lim_n}E_n(\varepsilon)$中的每一点 x_0 必使 $f_n(x_0)$不收敛于 $f(x_0)$.

事实上,若 $x_0\in\overline{\lim_n}E_n(\varepsilon)$,存在无穷多个 $E_n(\varepsilon)$包含 x_0,即对任何自然数 N,有 $n_0>N$ 使$x_0\in E_{n_0}(\varepsilon)$或

$$|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon.$$

所以$\{f_n(x)\}$在 x_0 处不收敛于 $f(x_0)$.

另外,不难看出集合

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{\lim_n}E_n\left(\frac{1}{k}\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{l=n}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_l(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right\}$$

表示$\{f_n(x)\}$在 E 上不收敛于$f(x)$的点的全体.

定义 1.2 设 X 是基本集,$A\subset X$,在 X 上定义函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\in A\\ 0 & 当\ x\in x-A\end{cases}$$

称 $\chi_A(x)$为集 A 的特征函数.

显然特征函数 $\chi_A(x)\equiv\chi_B(x)$的充要条件为 $A=B$,即集合 A 完全由它的特征函数确定.

例 1.8 若 $X=[0,1]$,E 为$[0,1]$中的有理点集,则$[0,1]$上定义的 E 的特征函数$\chi_E(x)$就是迪里克莱(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\ 是[0,1]中的有理数\\ 0, x\ 是[0,1]中的无理数\end{cases}$$

集与特征函数有下面重要关系:

(1)$E=X\Leftrightarrow\chi_E(x)\equiv1$,($X$ 是基本集)

$E=\varnothing\Leftrightarrow\chi_E(x)\equiv0$;

(2) $A\subset B \Leftrightarrow \chi_A(x)\leqslant \chi_B(x)$,

(3) 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族集合,记 $B=\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, $C=\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$,则

$$\chi_B(x)=\max_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x), \qquad *$$

$$\chi_C(x)=\min_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x);$$

下面证关系式(*). 显然 $\chi_B(x)$ 与 $\max\limits_{\alpha\in I}\chi_{A}.(x)$ 只可能取两个值 0 或 1. 而 $1=\chi_B(x)\Leftrightarrow x\in B\Leftrightarrow$ 有 $\alpha_0\in I$,使 $x\in A_{\alpha_0}\Leftrightarrow$ 有 $\alpha_0\in I$ 使 $\chi_{A_{\alpha_0}}(x)=1\Leftrightarrow \max\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha(x)}=1$

所以
$$\chi_B(x)=\max_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x).$$

类似可证明其它性质.

1.2 实数点集

1. 实数

全部整数和全部分数构成有理数集. 任意两个有理数之间都有大于、小于或等于的关系. 任意两个有理数进行加、减、乘、除(零不能作除数)运算后还是一个有理数. 有理数 r 的一般表示式是

$$r=\frac{p}{q}\quad (p \text{ 是整数}, q \text{ 是正整数}).$$

(注:若读者学过数学分析,此节可以越过)

在任意两个相异的有理数 a 和 b 之间,永远存在另一个有理数,例如 $\frac{1}{2}(a+b)$. 这说明了有理数集的稠密性.

每一个有理数 r 可以与一定向直线实数轴上坐标为有理数 r 的点相对应. 这种点称为有理点. 由有理数集的稠密性,任意两个相异的有理点之间都有另一个有理点. 但是全部有理点所构成的集合并不能充满整个数轴,即实数轴上还有许多点不是有理点. 例

如数轴上这样的点，它的坐标 x 等于边长为 1 的正方形对角线之长，即 $x=\sqrt{2}$；$\sqrt{2}$不是有理数，所以坐标为$\sqrt{2}$的点不是有理点.

坐标不是有理数的点称为无理点. 无理点对应的坐标称为无理数. 全部有理点和无理点所构成的集合就充满整个实数轴；全部有理数和无理数就构成了实数集. 每个实数在实数轴上都恰好有一个点与之对应. 若无特殊申明，本书所说的数集就是实数集.

由于我们不能详细研究实数理论，所以我们将把体现实数集的一条基本原理作为公理予以承认.

2. 上确界存在原理

E 为实数集，若有数 M，使得对每个 $x\in E$，有 $x\leqslant M$，则称集 E 上方有界，并称 M 为 E 的一个上界.

定义 1.3 称数集 E 的最小上界 M 为集 E 的上确界. 记作 $M=\sup E$.

数 M 为集 E 的上确界的等价条件为：M 是 E 的一个上界，并且对任意的正数 ε，有 $x_\varepsilon\in E$，使得 $x_\varepsilon>M-\varepsilon$.

公理(上确界存在原理)：任何非空的上方有界的数集都有上确界.

和上界、上确界相对应的有下界，下确界的概念. 常数 m 称为数集 E 的一个下界，是指对每个 $x\in E$，有 $x\geqslant m$. 数集 E 的下确界是指 E 的最大下界，也就是说 m 是 E 的下确界，是说 m 具有性质：

(1) m 是 E 的一个下界；

(2) m 是 E 的下界中最大的. 即对任意正数 ε，有 $x_0\in E$，使 $m+\varepsilon>x_0$.

E 的下确界记为 $\inf E$.

定理 1.2(下确界存在定理) 任何非空的，下方有界数集都有下确界.

证 设 E 是非空的下方有界数集. 构造数集 $E_1=\{x\mid -x\in$

$E\}$,则 E_1 为非空的上方有界数集.根据上确界存在原理,E_1 有上确界 M.取 $m=-M$,则 $m=\inf E$.事实上,对任何 $a\in E$,有 $-a\in E_1$,所以 $-a\leqslant M=-m$,即 $a\geqslant m$,m 是E 的一个下界.另外,对任意 $\varepsilon>0$,由于 M 是E_1 的上确界,所以有 $x_0\in E_1$ 使 $M-\varepsilon<x_0$.取 $a_1=-x_0$,则 $a_1\in E$,且 $M-\varepsilon<x_0$,即 $-m-\varepsilon<-a_1$,于是 $m+\varepsilon>a_1$.m 是E 的最大下界,因此 $m=\inf E$.

即是上方有界又是下方有界的数集称为有界数集.

定理 1.3(单调有界原理) 任何单调有界数列都有极限.

证 不妨以单调递增数列为例.设$\{x_n\}$是单调递增的有界数列.构造数集 $E=\{x_n\mid n=1,2,\cdots\}$,则 E 非空且上方有界.由上确界存在原理,存在数 $M=\sup E$,则 $M=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.事实上,对任意 $\varepsilon>0$,由上确界的定义,有 $x_n\leqslant M$(对一切 $n\in N$),且存在 $x_{n_1}\in E$,使得 $M-\varepsilon<x_{n_1}$,由于$\{x_n\}$为单调递增数列,所以当 $n\geqslant n_1$ 时

$$M-\varepsilon<x_{n_1}\leqslant x_n\leqslant M<M+\varepsilon$$

即当 $n>n_1$ 时

$$|x_n-M|<\varepsilon$$

所以
$$M=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

例 1.9 设数集 $E=\{\frac{1}{n}\mid n$ 为正整数$\}$,很显然 $\inf E=0$,$\sup E=1$.由此看出数集 E 的上确界,下确界可能不属于 E,也可能属于 E.

定理 1.4 (区间套定理) 设$[a_n,b_n]$($n=1,2,\cdots$)是一渐缩闭区间列

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,则必有惟一的实数 c 满足$c\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$.

证 1)容易看出,各区间的端点之间有着顺序关系:

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n<b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1 \tag{1}$$