新世纪地方高等院校专业系列教材

实分析引论习题详解

于延栋　编著

南京大学出版社

全国教育科学“十五”规划课题项目

实分析引论习题详解

于延栋　编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实分析引论习题详解/于延栋编著. 一南京:南京大学出版社,2007.7

(新世纪地方高等院校专业系列教材)

ISBN 978-7-305-05106-7

Ⅰ.实… Ⅱ.于… Ⅲ.实分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 097561 号

出 版 者 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
网 址 http://press.nju.edu.cn
出 版 人 左 健

丛 书 名 新世纪地方高等院校专业系列教材
书 名 实分析引论习题详解
编 著 于延栋
责任编辑 吴 华 编辑热线 025-83592146

照 排 南京南琳图文制作有限公司
印 刷 南京新洲印刷有限公司
开 本 787×960 1/16 印张 9.25 字数 160 千
版 次 2007 年 7 月第 1 版 2007 年 7 月第 1 次印刷
印 数 1~3000
ISBN 978-7-305-05106-7
定 价 13.90 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 sales@press.nju.edu.cn(销售部)
nupress1@public1.ptt.js.cn

新世纪地方高等院校专业系列教材

编 委 会

前　　言

本书是与我们编写的教材《实分析引论》(南京大学出版社,2007年7月出版)配套的教学参考书.书中对教材里的每道习题给出了一个比较详细的解答,供读者参考.

书中所有习题的编号与教材中的完全一致,解题过程中引用到的定理的编号(或名称)和例题的编号也与教材中的完全一致.为了便于读者查考,编者将教材中所有定理放一起,作为本书附录.

在我们所提供的解答中,多数是常规的解答,也有些是迄今为止最好的解答.为了照顾学生的阅读能力,我们尽量将推理过程叙述得详细一些.

习题1中绝大多数习题和习题2中关于广义实数和广义实值函数的习题的解答由袁兰兰老师提供初稿.协助编写本书还有钱明忠、戴风明、何新龙、史雪荣和姜海波等老师.中国科学技术大学的成志新博士曾仔细阅读过本书的初稿,并且提出了有益的意见和建议.由于编者的水平和能力有限,书中可能有不少疏漏之处,恳切希望读者及时提出批评和建议.

于延栋

2006年10月16日

于盐城师院蕴秀亭

目　　录

习题 1——集　合

（如无特别声明，X 表示任意给定的非空集合，凡是提到 X 的一个子集的补总是指该集合相对于 X 的补）

1. 是否存在集合 A 和 B，使得 $A\in B$ 和 $A\subset B$ 同时成立？

解　存在. 例如，取 $A=\varnothing$，$B=\{\varnothing\}$，则 $A\in B$ 且 $A\subset B$.

2. 设 $n\in\mathbb{N}$. 试问：$2^{\{1,n\}}$ 是由多少个互不相同的集合组成的？

解　显然，对于每一个小于或等于 n 的非负整数 k，集合 $\{1,n\}$ 的由 k 个元素组成的子集共有 C_n^k 个，所以 $2^{\{1,n\}}$ 是由 $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k=2^n$ 个集合组成的.

3. 设 $A,B,C\in 2^X$，并且 A 是 B 的真子集.

(1) 求证：B^c 是 A^c 的真子集.

(2) $C\backslash B$ 一定是 $C\backslash A$ 的真子集吗？

证明　(1) 由于 A 是 B 的真子集，因此 $A\subset B$ 且存在 $x_0\in B$，使得 $x_0\notin A$. 由 $A\subset B$ 知：对于任意的元素 x，有

$$x\in B^c\Rightarrow x\notin B\Rightarrow x\notin A\Rightarrow x\in A^c.$$

因此 $B^c\subset A^c$. 由于 $x_0\in B$ 且 $x_0\notin A$，因此 $x_0\notin B^c$ 且 $x_0\in A^c$，所以 B^c 是 A^c 的真子集.

(2) $C\backslash B$ 不一定是 $C\backslash A$ 的真子集. 例如，当 $C=\varnothing$ 时，$C\backslash B=C\backslash A=\varnothing$.

4. 求证：对于任意的集合 A,B,C 和 D，下列等式成立：

(1) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$；

(2) $(A\backslash B)\backslash C=A\backslash(B\cup C)$；

(3) $(A\backslash B)\cap(C\backslash D)=(A\cap C)\backslash(B\cup D)$；

(4) $(A\cup B)\backslash C=(A\backslash C)\cup(B\backslash C)$；

(5) $(A\cap B)\cup(A\Delta B)=A\cup B$；

(6) $A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$.

证明　不妨设 $A,B,C,D\in 2^X$. 我们有

$$A\cap(B\backslash C)=A\cap(B\cap C^c)=(A\cap B)\cap C^c=((A\cap B)\cap A^c)\cup((A\cap B)\cap C^c)$$
$$=(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)=(A\cap B)\cap(A\cap C)^c=(A\cap B)\backslash(A\cap C);$$
$$(A\backslash B)\backslash C=(A\cap B^c)\cap C^c=A\cap(B^c\cap C^c)=A\cap(B\cup C)^c=A\backslash(B\cup C);$$
$$(A\backslash B)\cap(C\backslash D)=(A\cap B^c)\cap(C\cap D^c)=(A\cap C)\cap(B^c\cap D^c)$$
$$=(A\cap C)\cap(B\cup D)^c=(A\cap C)\backslash(B\cup D);$$
$$(A\cup B)\backslash C=(A\cup B)\cap C^c=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)=(A\backslash C)\cup(B\backslash C);$$
$$(A\cap B)\cup(A\Delta B)=(A\cup(A\Delta B))\cup(B\cup(A\Delta B))=A\cup B;$$
$$A\backslash(A\backslash B)=A\cap(A\cap B^c)^c=A\cap(A^c\cup B)=(A\cap A^c)\cup(A\cap B)=A\cap B.$$

5. 求证:对于任意的 $A,B,C\in 2^X$,总有

(1) $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\Delta B)$;

(2) $A\Delta\varnothing=A, A\Delta A=\varnothing, A\Delta A^c=X, A\Delta X=A^c$;

(3) $A\Delta B=B\Delta A$;

(4) $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$;

(5) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

(6) $A^c\Delta B^c=A\Delta B$;

(7) 存在 $D\in 2^X$,使得 $A=B\Delta D$.

证明 (1) 显然,

$$A\cup B=A\cup(B\backslash A)=((A\cap B)\cup(A\backslash B))\cup(B\backslash A)$$
$$=(A\cap B)\cup((A\backslash B)\cup(B\backslash A))=(A\cap B)\cup(A\Delta B).$$

(2) 根据对称差的定义,有

$$A\Delta\varnothing=(A\backslash\varnothing)\cup(\varnothing\backslash A)=A\cup\varnothing=A,$$
$$A\Delta A=(A\backslash A)\cup(A\backslash A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing,$$
$$A\Delta A^c=(A\backslash A^c)\cup(A^c\backslash A)=(A\cap A)\cup(A^c\cap A^c)=A\cup A^c=X,$$
$$A\Delta X=(A\backslash X)\cup(X\backslash A)=\varnothing\cup A^c=A^c.$$

(3) 根据对称差的定义,有

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(B\backslash A)\cup(A\backslash B)=B\Delta A.$$

(4) 我们有

$$(A\Delta B)\Delta C=((A\backslash B)\cup(B\backslash A))\Delta C$$
$$=(((A\backslash B)\cup(B\backslash A))\backslash C)\cup(C\backslash((A\backslash B)\cup(B\backslash A)))$$
$$=(((A\backslash B)\backslash C)\cup((B\backslash A)\backslash C))\cup(C\backslash((A\cup B)\backslash(A\cap B)))$$
$$=(A\backslash(B\cup C))\cup(B\backslash(A\cup C))\cup(C\backslash(A\cup B))\cup(A\cap B\cap C).$$

由于 A,B,C 的任意性,将上式中的 A,B,C 依次换成 B,C,A 后,等式仍然成立,即

$$(B\Delta C)\Delta A=(B\backslash(C\cup A))\cup(C\backslash(B\cup A))\cup(A\backslash(B\cup C))\cup(B\cap C\cap A).$$

比较以上两式，立即可得

$$(A\Delta B)\Delta C=(B\Delta C)\Delta A=A\Delta(B\Delta C).$$

(5) 我们有

$$\begin{aligned}A\cap(B\Delta C)&=A\cap((B\backslash C)\cup(C\backslash B))\\&=(A\cap(B\backslash C))\cup(A\cap(C\backslash B))\\&=(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap C\cap B^c)\\&=((A\cap B)\cap(A^c\cup C^c))\cup((A\cap C)\cap(A^c\cup B^c))\\&=((A\cap B)\backslash(A\cap C))\cup((A\cap C)\backslash(A\cap B))\\&=(A\cap B)\Delta(A\cap C).\end{aligned}$$

(6) 根据对称差的定义，我们有

$$\begin{aligned}A^c\Delta B^c&=(A^c\backslash B^c)\cup(B^c\backslash A^c)=(A^c\cap B)\cup(B^c\cap A)\\&=(B\backslash A)\cup(A\backslash B)=B\Delta A=A\Delta B.\end{aligned}$$

(7) 令 $D=B\Delta A$，则 $B\Delta D=B\Delta(B\Delta A)=(B\Delta B)\Delta A=\varnothing\Delta A=A$.

6. 设 A 和 B 都是非空集合；φ 是 A 到 B 的映射；$S_1,S_2\subset A$；T_1，$T_2\subset B$. 求证：

(1) $\varphi(S_1\cup S_2)=\varphi(S_1)\cup\varphi(S_2)$，$\varphi(S_1\cap S_2)\subset\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)$；

(2) $\varphi^{-1}(T_1\cup T_2)=\varphi^{-1}(T_1)\cup\varphi^{-1}(T_2)$，
$\varphi^{-1}(T_1\cap T_2)=\varphi^{-1}(T_1)\cap\varphi^{-1}(T_2)$；

(3) $S_1\subset\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$；

(4) 若 φ 是单射，则 $S_1=\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$，$\varphi(S_1\cap S_2)=\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)$；

(5) 若 φ 是双射，则 $S_1=\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$，$\varphi(\varphi^{-1}(T_1))=T_1$；

(6) 若 φ 是双射，并且 $A=B$，则 $\varphi^{-1}(\varphi(S_1))=\varphi(\varphi^{-1}(S_1))=S_1$；

(7) $\varphi^{-1}(T_1\backslash T_2)=\varphi^{-1}(T_1)\backslash\varphi^{-1}(T_2)$.

证明 (1) 对于任意的元素 y，有

$$\begin{aligned}y\in\varphi(S_1\cup S_2)&\Leftrightarrow\text{存在 } x\in S_1\cup S_2\text{，使得 } y=\varphi(x)\\&\Leftrightarrow\text{存在 } x\in S_1\text{ 使得 } y=\varphi(x)\text{，或者存在 } x\in S_2\text{，使得 } y=\varphi(x)\\&\Leftrightarrow y\in\varphi(S_1)\text{ 或者 } y\in\varphi(S_2)\\&\Leftrightarrow y\in\varphi(S_1)\cup\varphi(S_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y\in\varphi(S_1\cap S_2)&\Rightarrow\text{存在 } x\in S_1\cap S_2\text{，使得 } y=\varphi(x)\\&\Rightarrow y\in\varphi(S_1)\text{ 且 } y\in\varphi(S_2)\\&\Rightarrow y\in\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2),\end{aligned}$$

所以

$$\varphi(S_1\cup S_2)=\varphi(S_1)\cup\varphi(S_2),\ \varphi(S_1\cap S_2)\subset\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2).$$

(2) 对于任意的元素 x,有

$$
\begin{aligned}
x\in\varphi^{-1}(T_1\cup T_2) &\Leftrightarrow \text{存在 } y\in T_1\cup T_2\text{,使得 } y=\varphi(x)\\
&\Leftrightarrow \text{存在 } y\in T_1 \text{ 或者 } y\in T_2\text{,使得 } y=\varphi(x)\\
&\Leftrightarrow x\in\varphi^{-1}(T_1)\text{或者 } x\in\varphi^{-1}(T_2)\\
&\Leftrightarrow x\in\varphi^{-1}(T_1)\cup\varphi^{-1}(T_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\in\varphi^{-1}(T_1\cap T_2) &\Leftrightarrow \text{存在 } y\in T_1\cap T_2\text{,使得 } y=\varphi(x)\\
&\Leftrightarrow x\in\varphi^{-1}(T_1)\text{且 } x\in\varphi^{-1}(T_2)\\
&\Leftrightarrow x\in\varphi^{-1}(T_1)\cap\varphi^{-1}(T_2).
\end{aligned}
$$

所以

$$\varphi^{-1}(T_1\cup T_2)=\varphi^{-1}(T_1)\cup\varphi^{-1}(T_2),$$
$$\varphi^{-1}(T_1\cap T_2)=\varphi^{-1}(T_1)\cap\varphi^{-1}(T_2).$$

(3) 对于任意的元素 x,有

$$x\in S_1\Rightarrow\text{存在 } y\in\varphi(S_1)\text{,使得 } y=\varphi(x)\Rightarrow x\in\varphi^{-1}(\varphi(S_1)),$$

所以 $S_1\subset\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$.

(4) 假定 φ 是单射.

先证明 $S_1=\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$. 由于已经证明了 $S_1\subset\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$,现在只需证明,$\varphi^{-1}(\varphi(S_1))\subset S_1$. 为此,设 $x\in\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$. 于是,$\varphi(x)\in\varphi(S_1)$. 由于 φ 是单射,因此必有 $x\in S_1$. 由此可见,

$$\varphi^{-1}(\varphi(S_1))\subset S_1.$$

再证明 $\varphi(S_1\cap S_2)=\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)$. 事实上,由于已经证明了

$$\varphi(S_1\cap S_2)\subset\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2),$$

现在只需证明 $\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)\subset\varphi(S_1\cap S_2)$. 为此,设 $y\in\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)$. 于是,存在 $x_1\in S_1$ 和 $x_2\in S_2$,使得 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=y$. 由于 φ 是单射,因此 $x_1=x_2\in S_1\cap S_2$,从而 $y\in\varphi(S_1\cap S_2)$. 由此可见,

$$\varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)\subset\varphi(S_1\cap S_2).$$

(5) 假定 φ 是双射. 由于 φ 是单射,根据第(4)小题的结论,有

$$S_1=\varphi^{-1}(\varphi(S_1));$$

由于 φ 是满射,由于 φ^{-1} 是单射并且 $(\varphi^{-1})^{-1}=\varphi$,根据第(4)小题的结论,有 $\varphi(\varphi^{-1}(T_1))=T_1$.

(6) 假定 φ 是双射,并且 $A=B$. 这时,由于 $S_1\subset A$,根据第(5)小题的结论,有 $S_1=\varphi^{-1}(\varphi(S_1))$;由于 $S_1\subset B$,根据上面第(5)小题的结论,有 $\varphi(\varphi^{-1}(S_1))=S_1$. 所以 $\varphi(\varphi^{-1}(S_1))=\varphi^{-1}(\varphi(S_1))=S_1$.

(7) 对于任意的元素 x,有

$$x\in\varphi^{-1}(T_1\setminus T_2)\Leftrightarrow\text{存在 } y\in T_1\setminus T_2\text{,使得 } y=\varphi(x)$$

$\Leftrightarrow$存在 $y \in T_1$，使得 $y \notin T_2$ 且 $y=\varphi(x)$

$\Leftrightarrow x \in \varphi^{-1}(T_1)$且 $x \notin \varphi^{-1}(T_2)$

$\Leftrightarrow x \in \varphi^{-1}(T_1) \backslash \varphi^{-1}(T_2)$.

所以 $\varphi^{-1}(T_1 \backslash T_2)=\varphi^{-1}(T_1) \backslash \varphi^{-1}(T_2)$.

7. 设 A,B,C,D,E 和 F 都是非空集合，φ 是 A 到 B 的映射，ψ 是 C 到 D 的映射，τ 是 E 到 F 的映射，并且 $\varphi(A) \subset C, \psi(C) \subset E$. 求证：

(1) 若 φ 和 ψ 都是单射，则 $\psi \circ \varphi$ 也是单射；

(2) 若 φ 和 ψ 都是满射，并且 $B=C$，则 $\psi \circ \varphi$ 也是满射；

(3) 若 φ 和 ψ 都是双射，并且 $B=C$，则 $\psi \circ \varphi$ 也是双射；

(4) 若 φ 是双射，则 $\varphi^{-1} \circ \varphi=\iota_A, \varphi \circ \varphi^{-1}=\iota_B$；

(5) 若 φ 是双射，并且 $A=B$，则 $\varphi^{-1} \circ \varphi=\varphi \circ \varphi^{-1}=\iota_A$.

证明 (1) 假定 φ 和 ψ 都是单射. 为了证明，设 $x,y \in A$，并且 $(\psi \circ \varphi)(x)=(\psi \circ \varphi)(y)$，即 $\psi(\varphi(x))=\psi(\varphi(y))$. 由于 ψ 是单射，有 $\varphi(x)=\varphi(y)\varphi(x)$. 又因为 φ 是单射，有 $x=y$. 这就表明 $\psi \circ \varphi$ 也是单射.

(2) 假定 φ 和 ψ 都是满射且 $B=C$. 由 φ 是满射可知，$\varphi(A)=B=C$. 又因为 ψ 是满射，还有

$$(\psi \circ \varphi)(A)=\psi(\varphi(A))=\psi(C)=D.$$

由此可知，$\psi \circ \varphi$ 是满射.

(3) 假定 φ 和 ψ 都是双射，并且 $B=C$. 由第(1)小题知，$\psi \circ \varphi$ 是单射，由第(2)小题知，$\psi \circ \varphi$ 是满射. 所以 $\psi \circ \varphi$ 是双射.

(4) 假定 φ 是双射. 根据 φ^{-1} 的定义，$\varphi^{-1} \circ \varphi$ 是 A 到 A 的映射，并且

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)(x)=\varphi^{-1}(\varphi(x))=x, \forall x \in A;$$

$\varphi \circ \varphi^{-1}$ 是 B 到 B 的映射，并且

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(y)=\varphi(\varphi^{-1}(y))=y, \forall y \in B.$$

所以 $\varphi^{-1} \circ \varphi=\iota_A, \varphi \circ \varphi^{-1}=\iota_B$.

(5) 假定 φ 是双射，并且 $A=B$. 由第(4)小题知，$\varphi^{-1} \circ \varphi=\iota_A=\iota_B=\varphi \circ \varphi^{-1}$.

8. 试给出 $\mathbb{R}$ 中的开区间 $(0,1)$ 到半开区间 $(0,1]$ 的一个具体的双射.

解 令 $A=\{1/n \mid n$ 为大于 1 的整数$\}$，定义 $(0,1)$ 到 $(0,1]$ 的映射 f 如下：

$$f(x)=\begin{cases} 1/(n-1), & \text{若 } x=1/n, n \text{ 为大于 1 的整数；} \\ x, & \text{若 } x \in (0,1) \backslash A. \end{cases}$$

显然 f 是 $(0,1)$ 到 $(0,1]$ 的双射.

9. 求证：对于任意的集合 A,B,C 和 D，有

$$(A \times B) \backslash (C \times D)=((A \backslash C) \times B) \cup ((A \cap C) \times (B \backslash D)).$$

证明 对于任意的有序 2 元组(x,y)，有

$(x,y)\in(A\times B)\setminus(C\times D)$

$\Leftrightarrow(x,y)\in A\times B$ 且$(x,y)\notin(C\times D)$

$\Leftrightarrow x\in A$ 且 $y\in B$，并且 $x\notin C$ 或 $y\notin D$

$\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\notin C$ 且 $y\in B$，或者 $x\in A$ 且 $y\in B$ 且 $y\in D$

$\Leftrightarrow(x,y)\in(A\setminus C)\times B$ 或者 $x\in(A\cap B)\times(B\setminus D)$

$\Leftrightarrow(x,y)\in((A\setminus C)\times B)\cup((A\cap C)\times(B\setminus D))$

$\Leftrightarrow x\in((A\setminus C)\times B)\cup((A\cap B)\times(B\setminus D))$.

所以$(A\times B)\setminus(C\times D)=((A\setminus C)\times B)\cup((A\cap C)\times(B\setminus D))$.

10. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_p$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_p$（p 为正整数）都是集合，证明下列命题成立：

(1) 存在有限个集合，譬如 $C_1,C_2,\cdots,C_q$ 和 $D_1,D_2,\cdots,D_q$，使得：$C_1,C_2,\cdots,C_q$ 两两不相交，并且

$$\bigcup_{k=1}^{q}(C_k\times D_k)=\bigcup_{j=1}^{p}(A_j\times B_j);$$

(2) 存在有限个集合，譬如，$C_1,C_2,\cdots,C_q$ 和 $D_1,D_2,\cdots,D_q$，使得：$D_1,D_2,\cdots,D_q$ 两两不相交，并且

$$\bigcup_{k=1}^{q}(C_k\times D_k)=\bigcup_{j=1}^{p}(A_j\times B_j).$$

证明 命题(1)与命题(2)类似，这里只证明命题(1)成立.

事实上，当 $p=1$ 时，命题(1)自然成立.

假设当 $p=n$（n 为正整数）时，命题(1)结论成立. 现在考虑当 $p=n+1$ 的情形：根据假设，存在有限个集合，譬如，$R_1\times S_1,R_2\times S_2,\cdots,R_{q'}\times S_{q'}$，使得 $R_1,R_2,\cdots,R_{q'}$ 两两不相交，并且

$$\bigcup_{l=1}^{q'}(R_l\times S_l)=\bigcup_{j=1}^{n}(A_j\times B_j).$$

令 $q=2q'+1$，将下列 q 个集合分别记作 $C_1\times D_1,C_2\times D_2,\cdots,C_q\times D_q$：

$$(R_l\cap A_{n+1})\times(S_l\cup B_{n+1}),(R_l\setminus A_{n+1})\times S_l,l\in\{1,q'\};$$

$$(A_{n+1}\setminus\bigcup_{j=1}^{n}A_j)\times B_{n+1}.$$

显然，$C_1,C_2,\cdots,C_q$ 两两不相交，并且 $\bigcup_{k=1}^{q}(C_k\times D_k)=\bigcup_{j=1}^{n+1}(A_j\times B_j)$. 这就是说，当 $p=n+1$ 时结论成立.

所以命题(1)总是成立的.

11. 设$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是两两不相交的集族，$\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ 且 $\gamma_1\neq\gamma_2$. 试问，是否必有 $A_{\gamma_1}\neq A_{\gamma_2}$?

解 不一定. 例如，令 $\Gamma=\{1,2\}$，$A_1=A_2=\varnothing$，则$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是两两不相交的集族.

12. 设 A 是一个集合，$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一个集族. 求证：

(1) $A\bigcap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\bigcap A_\gamma)$，$A\bigcup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\bigcup A_\gamma)$；

(2) $A\backslash(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\backslash A_\gamma)$，$A\backslash(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\backslash A_\gamma)$.

证明 (1) 对于任意的元素 x，有

$$\begin{aligned}x\in A\bigcap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\\&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且存在 } \gamma_0\in\Gamma \text{ 使得 } x\in A_{\gamma_0}\\&\Leftrightarrow \text{存在 } \gamma_0\in\Gamma \text{ 使得 } x\in A\bigcap A_{\gamma_0}\\&\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\bigcap A_\gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\in A\bigcup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)&\Leftrightarrow x\in A \text{ 或} \bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\\&\Leftrightarrow x\in A \text{ 或 } x\in A_\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma\\&\Leftrightarrow x\in A\bigcup A_\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma\\&\Leftrightarrow\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\bigcup A_\gamma).\end{aligned}$$

所以

$$A\bigcap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\bigcap A_\gamma),A\bigcup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\bigcup A_\gamma).$$

(2) 对于任意的元素 x，有

$$\begin{aligned}x\in A\backslash(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\\&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin A_\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma\\&\Leftrightarrow x\in A\backslash A_\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma\\&\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\backslash A_\gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\in A\backslash(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\\&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且存在 } \gamma\in\Gamma\text{，使得 } x\notin A_\gamma\\&\Leftrightarrow \text{存在 } \gamma\in\Gamma\text{，使得 } x\in A\backslash A_\gamma\\&\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\backslash A_\gamma).\end{aligned}$$

所以

$$A\backslash(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\backslash A_\gamma),A\backslash(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\backslash A_\gamma).$$

13. 设 A 是一个集合，$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 和 $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 都是集族. 求证：

(1) $A\times(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\times A_\gamma)$，
$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\times A=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\times A)$；

(2) $A\times(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\times A_\gamma)$，
$(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\times A=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\times A)$；

(3) $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\times B_\gamma)=(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\times(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)$.

证明 (1) 对于任意的有序 2 元组 (x,y)，有

$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } y\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\\&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且存在 } \gamma\in\Gamma\text{，使得 } y\in A_\gamma\\&\Leftrightarrow \text{存在 } \gamma\in\Gamma\text{，使得}(x,y)\in A\times A_\gamma\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\times A_\gamma),$$

所以 $A\times(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\times A_\gamma)$.

同理可证,$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\times A=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\times A)$.

(2) 对于任意的有序 2 元组(x,y),有

$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times(\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma) &\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } y\in \textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } y\in A_\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in A\times A_\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in \textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\times A_\gamma).\end{aligned}$$

所以 $A\times(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\times A_\gamma)$.

同理可证,$(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\times A=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\times A)$.

(3) 对于任意的有序 2 元组 $x=(x_1,x_2)$,有

$$\begin{aligned}(x,y)\in \textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\times B_\gamma) &\Leftrightarrow (x,y)\in A_\gamma\times B_\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma\\ &\Leftrightarrow x\in A_\gamma \text{ 且 } y\in B_\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma\\ &\Leftrightarrow x\in \textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma \text{ 且 } y\in\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\times(\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma).\end{aligned}$$

所以$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma\times B_\gamma)=(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\times(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)$.

14. 设 A 和 B 都是非空集合,φ 是 A 到 B 的映射,$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是 A 的一族子集,$\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是 B 的一族子集.求证:

(1) $\varphi(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma)$,$\varphi(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\subset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma)$;

(2) $\varphi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}(B_\lambda)$,$\varphi^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}(B_\lambda)$;

(3) 若 φ 是单射,则 $\varphi(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma)$.

证明 (1) 对于任意的元素 y,有

$$\begin{aligned}y\in\varphi(\textstyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma) &\Leftrightarrow \text{存在 } x\in\textstyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma,\text{使得 } y=\varphi(x)\\ &\Leftrightarrow \text{存在 } \gamma\in\Gamma,\text{使得 } x\in A_\gamma \text{ 且 } y=\varphi(x)\\ &\Leftrightarrow \text{存在 } \gamma\in\Gamma,\text{使得 } y\in\varphi(A_\gamma)\\ &\Leftrightarrow y\in\textstyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y\in\varphi(\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma) &\Rightarrow \text{存在 } x\in\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma,\text{使得 } y=\varphi(x)\\ &\Rightarrow \text{对于每一个 } \gamma\in\Gamma,\text{总有 } x\in A_\gamma,y=\varphi(x)\\ &\Rightarrow \text{对于每一个 } \gamma\in\Gamma,\text{总有 } y\in\varphi(A_\gamma)\\ &\Rightarrow y\in\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma).\end{aligned}$$

所以

$$\varphi(\textstyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\textstyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma),\ \varphi(\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\subset\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma).$$

(2) 对于任意的元素 x,有

$$x\in\varphi^{-1}(\textstyle\bigcup_{\gamma\in\Lambda}B_\lambda)\Leftrightarrow \text{存在 } y\in\textstyle\bigcup_{\gamma\in\Lambda}B_\lambda,\text{使得 } y=\varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow \text{存在 } \lambda\in\Lambda\text{，使得 } y\in B_\lambda \text{ 且 } y=\varphi(x)$$
$$\Leftrightarrow \text{存在 } \lambda\in\Lambda\text{，使得 } x\in\varphi^{-1}(B_\lambda)$$
$$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\gamma\in\Lambda}\varphi^{-1}(B_\lambda)\text{，}$$

$$x\in\varphi^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Lambda}B_\lambda)\Leftrightarrow \text{存在 } y\in\bigcap_{\gamma\in\Lambda}B_\lambda\text{，使得 } y=\varphi(x)$$
$$\Leftrightarrow \text{存在 } y\text{，使得 } y=\varphi(x)\text{ 且 } y\in B_\lambda\text{，}\forall\lambda\in\Lambda$$
$$\Leftrightarrow x\in\varphi^{-1}(B_\lambda)\text{，}\forall\lambda\in\Lambda$$
$$\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}(B_\lambda).$$

所以

$$\varphi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}(B_\lambda)\text{，}\varphi^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}(B_\lambda).$$

(3) 假定 φ 是单射. 于是，对于任意的 $y\in B$，有

$$y\notin\varphi(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\Rightarrow \text{对于任意的 } x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\text{，}y\neq\varphi(x)$$
$$\Rightarrow \text{存在 } \gamma_0\in\Gamma\text{，使得 } y\notin\varphi(A_{\gamma_0})$$
$$\Rightarrow y\notin\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\lambda).$$

因此 $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\lambda)\subset\varphi(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$. 已知 $\varphi(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\subset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma)$，所以

$$\varphi(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\varphi(A_\gamma).$$

15. 设 $\{A_n\}_n$ 是一个集列. 求证：

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\forall n\in\mathbb{N}\text{，存在 } m\in\mathbb{N}\text{，总有整数 } m\geqslant n \text{ 且 } x\in A_m\}$，

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\text{存在 } n\in\mathbb{N}\text{，使得当 } m\in\mathbb{N}\text{ 且 } m\geqslant n\text{ 时总有 } x\in A_m\}$.

证明 根据 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 的定义，对于任意元素 x，有

$$x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\Leftrightarrow\text{对于每一个正整数 } n\text{，总有 } x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$$
$$\Leftrightarrow\text{对于每一个正整数 } n\text{，总有整数 } m\geqslant n \text{ 使得 } x\in A_m.$$

所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\text{对于每一个正整数 } n\text{，总有整数 } m\geqslant n\text{ 使得 } x\in A_m\}$.

类似地，根据 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 的定义，对于任意元素 x，有

$$x\in\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\Leftrightarrow\text{存在正整数 } n\text{，使得 } x\in\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$$
$$\Leftrightarrow\text{存在正整数 } n\text{，使得当 } m \text{ 为整数且 } m\geqslant n\text{ 时，总有 } x\in A_m.$$

所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\text{存在正整数 } n\text{，使得当 } m\text{ 为整数且 } m\geqslant n\text{ 时，总有 } x\in A_m\}.$$

16. 对于每一个正整数 n，令

$$A_n=\begin{cases}[-1-1/n,0]\text{，当 } n \text{ 为奇数时；}\\ [0,1+1/n]\text{，当 } n\text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

试求集列 $\{A_n\}_n$ 的上极限和下极限.

解 我们有

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}[-1-1/n,1+1/n]=[-1,1]$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m=\{0\}$.

17. 对于每一个正整数 n,令

$$A_n=\begin{cases}\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1/n,0\leqslant y\leqslant n\},\text{当 } n \text{ 为奇数时};\\ \{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant n,0\leqslant y\leqslant 1/n\},\text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

其中(x,y)表示$\mathbb{R}^2$中横坐标为 x,纵坐标为 y 的点.试求集列$\{A_n\}_n$ 的上极限和下极限.

解 显然,$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset A$,其中 $A=\{(x,y)\mid x$ 和 y 都是非负实数$\}$.现在考察 A 中的任意一点(x,y):

假设 $x>0$ 且 $y>0$.这时,任取正整数 n_0,使得 $1/n_0<\min\{x,y\}$.于是,当 $n\geqslant n_0$ 时,总有$(x,y)\notin A_n$.因此$(x,y)\notin\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

假设 $x=0$ 且 $y\geqslant 0$.这时,任取正整数 n_0,使得 $y\leqslant n_0$.于是,当 n 为奇数且 $n\geqslant n_0$ 时,总有$(x,y)\notin A_n$,因此$(x,y)\notin\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.类似地,假设 $x\geqslant 0$ 且 $y=0$.这时,任取正整数 n_0,使得 $x\leqslant n_0$.于是,当 n 为偶数且 $n\geqslant n_0$ 时,总有$(x,y)\in A_n$.因此$(x,y)\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

假设 $x=0$ 且 $y>0$.这时,任取正整数 n_0,使得 $1/n_0<y$.于是,当 n 为偶数且 $n\geqslant n_0$ 时,总有$(x,y)\notin A_n$,因此$(x,y)\notin\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

假设 $x>0$ 且 $y=0$.这时,任取正整数 n_0,使得 $1/n_0<x$.于是,当 n 为奇数且 $n\geqslant n_0$ 时,总有$(x,y)\notin A_n$,因此$(x,y)\notin\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

最后,显然,$(0,0)\in A_n$,$\forall n\in\mathbb{N}$,因此$(0,0)\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

综上所述,我们有

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\{(x,y)\mid x=0$ 且 $y\geqslant 0$,或者 $x\geqslant 0$ 且 $y=0\}$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\{(0,0)\}$.

18. 设 A 和 B 都是集合,并且 A 是有限集.试根据定义证明:

(1) 当 B 是有限集时,$A\cup B$ 是有限集;

(2) 当 B 是可数无限集时,$A\cup B$ 是可数无限集;

(3) 当 B 是不可数集时,$A\cup B$ 是不可数集.

证明 显然,当 $A=\varnothing$时,三个结论都成立.现在假定 $A\neq\varnothing$.不妨设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$,其中 p 为某个正整数.

(1) 设 B 是有限集.于是,$A\cup B=A\cup(B\backslash A)$,其中 $B\backslash A$ 是有限集.当 $B\backslash A=\varnothing$时,$A\cup B=A$,从而,$A\cup B$ 是有限集.当 $B\backslash A\neq\varnothing$时,不妨假

设 $B\setminus A=\{y_1,y_2,\cdots,y_q\}$，其中 q 为某个正整数. 这样，注意到 $A\cup B=\{x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_q\}$，立即可知 $A\cup B$ 对等于 $\{1,p+q\}$，所以 $A\cup B$是有限集.

(2) 设 B 是可数无限集. 由于 $B=(B\cap A)\cup(B\setminus A)$且 $B\cap A$ 是有限集，根据(1)，$B\setminus A$ 是无限集. 这样一来，根据定理 1.4.5，$B\setminus A$ 是可数无限集. 不妨假设 $B\setminus A=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$. 这样，注意到 $A\cup B=\{x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$，立即可知 $A\cup B$ 对等于$\mathbb{N}$，所以 $A\cup B$ 是可数无限集.

(3) 设 B 是不可数集. 假如 $A\cup B$ 是可数集，则由 $B\subset A\cup B$ 可知 B 是可数集. 这与已知条件矛盾. 所以 $A\cup B$ 是不可数集.

19. 求证：一个非空集合 A 是可数集，当且仅当存在$\mathbb{N}$到 A 的满射.

证明 假设 A 是非空的可数集. 当 A 是非空有限集时，不妨设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$. 对于每一个正整数 n，令

$$\varphi(n)=\begin{cases}a_n, & \text{当 } n<p \text{ 时；}\\ a_n, & \text{当 } n\geqslant p \text{ 时.}\end{cases}$$

显然 φ 是$\mathbb{N}$到 A 的满射. 当 A 为可数无限集时，根据定义，存在$\mathbb{N}$到 A 的双射，当然存在$\mathbb{N}$到 A 的满射.

反过来，假设 φ 是$\mathbb{N}$到 A 的一个满射. 于是，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\varphi(n)\}$. 对于每一个正整数 n，令

$$A_n=\begin{cases}\{\varphi(1)\}, & \text{当 } n=1 \text{ 时；}\\ \{\varphi(n)\}\setminus\bigcup_{j=1}^{n-1}\{\varphi(j)\}, & \text{当 } n>1 \text{ 时.}\end{cases}$$

再令 $S=\{n\mid n\in\mathbb{N}\text{ 且 }A_n\neq\varnothing\}$. 显然，每一个 A_n 不是单点集，就是空集；$\{A_n\}_n$ 是一列两两不相交的集合；S 是$\mathbb{N}$的非空子集，从而，S 是可数集；$A=\bigcup_{n\in S}A_n$，并且 A 与 S 对等. 由此可见，A 是可数集.

20. 设 A,B,C 和 D 都是集合. 求证：

(1) 若 A 是非空有限集，B 是可数无限集(不可数集)，则 $A\times B$ 是可数无限集(相应地，不可数集)；

(2) 若 A 和 B 都是可数无限集，则 $A\times B$ 是可数无限集；

(3) 若 $A\sim C$ 且 $B\sim D$，则 $A\times B\sim C\times D$.

证明 (1) 假设 A 是非空有限集，不妨设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$. 于是，根据第 13 题的结论，$A\times B=(\bigcup_{j=1}^{p}\{a_j\})\times B=\bigcup_{j=1}^{p}(\{a_j\}\times B)$.

当 B 是可数无限集时，显然，对于每一个 $j\in\{1,p\}$，$\{a_j\}\times B$ 是可数无限集. 这样，利用定理 1.4.7 可以推知，$\bigcup_{j=1}^{p}(\{a_j\}\times B)$是可数无限集，即 $A\times B$ 是可数无限集.