高职高专数学规划教材

高等数学

Advanced Mathematics

李修清 主编

東北大學出版社
Northeastern University Press

高职高专数学规划教材

高 等 数 学

Advanced Mathematics

主 编 李修清

副主编 张德全 董锦华

东北大学出版社

·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 李修清主编. — 沈阳 ：东北大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-81102-439-5

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 115606 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印 张：18.25
字 数：467 千字
出版时间：2007 年 8 月第 1 版
印刷时间：2007 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：潘佳宁 刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：张 立
责任出版：秦 力

ISBN 978-7-81102-439-5 定 价：28.00 元

前　言

为满足“十一五”期间高职高专教育大力发展的需要，作为工程、机电、经济管理类专业重要基础课的高等数学，其教材应该具有自己的特色。为此我们根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在总结多年高职高专数学教学经验、探索高职高专数学教学的发展方向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上编写了本书。本书以“联系实际，深化概念，加强计算，注重应用，提高素质”为特色，在内容编排上从特殊到一般，从具体到抽象，十分注意基本概念、基本定理的几何意义、物理意义和实际背景的诠释，深入浅出，难点分散，易于教，便于学。归纳起来，本教材具有以下方面的特色。

1. 基本概念、基本定理与实际相联系

数学历来有“抽象”之说，刚入学的大学生学习高等数学时一般都需要一段适应过程，而对高职高专的新生，更需要一段不短的适应过程。为缩短这一过程，我们十分注意理论与实际相结合，尽量按辩证唯物论的认识论即“实践—理论—实践”的认识过程编写，做到由特殊到一般。引进重要的数学概念和定理时，在保证数学概念的准确性及基本理论的完整性、系统性的原则下，尽量借助几何直观图形和物理意义来解释这些概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化。

2. 数学知识与实际问题紧密结合

为提高学生应用数学知识解决实际问题的能力，在编写教材时，我们是从两个方面着手的。一方面，选择了较多工程上或经济上的应用性例题和习题以提高学生应用数学解决实际问题的意识和能力；另一方面，根据具体教学内容在每一章的最后一节，安排了运用数学软件包 Mathematica 进行相应数学运算的例题，涉及了若干数学实验模型，提高学生应用计算机解决实际问题的兴趣并扩充解决实际问题的手段，再次体现了“以应用为目的”的编写原则。

3. 基本要求与拓宽知识相结合，适应不同要求和不同层次的教学

编写教材时，我们是根据教学的基本要求，按照够用为度的原则编写的，但也考虑到有些专业的特殊要求，适当地增加了一些内容，如在一元函数微积分中增加了曲率及其计算公式、导数在经济学中的应用、定积分在物理学和经

济学中的简单应用，在多元函数积分学中增加了平面曲线积分，在无穷级数中增加了傅立叶级数等。我们认为，这样有利于实施弹性教学模式，扩大了本书的适应性。

本书可供工程、机电、经济管理类等专业选用，一些章节用号“*”标出，供任课教师做不同选择。全书共分10章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数。其中第一、二、三、七章由李修清编写，第四、五、十章由张德全编写，第六、八、九章由董锦华编写，李修清主持了全书的编写工作，并对全书进行了编纂。

由于我们的水平有限，加之成书时间比较仓促，书中错漏及不足之处难免，敬请专家和读者批评指正。

编　者

2007年2月

目　　录

第一章　函数与极限

本章的主要内容是函数、极限与连续性，它们是高等数学中最重要、最基本的概念. 函数关系是变量与变量之间的最基本的一种依赖关系，它是高等数学的研究对象. 极限是高等数学中的一个重要概念. 从极限思想的产生到极限理论的确立，经历了大约两千年的时间. 极限理论的确立使微分和积分有了坚实的逻辑基础，并使微积分在当今科学的各个领域得以更广泛、更合理、更深刻地应用和发展. 当大家学完了高等数学之后，就会深切感受到极限概念是微积分的灵魂. 函数的连续性与极限概念密切相关，它反映了函数的一种重要性态.

第一节　函数的概念

一、区间与邻域

1. 区间

我们将自然数集记作 **N**；整数集记作 **Z**；有理数集记作 **Q**；实数集记作 **R**.

设 a，$b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$. 有限区间被定义为如下数集：

$$\text{开区间}(a,\ b)=\{x\mid a<x<b\};$$
$$\text{闭区间}[a,\ b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\};$$
$$\text{半开区间}[a,\ b)=\{x\mid a\leqslant x<b\};$$
$$(a,\ b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

其中，a 和 b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 此外还有无限区间. 引进记号 $-\infty$(读作负无穷大)及 $+\infty$(读作正无穷大)，无限区间被定义为如下数集：

$$(a,\ +\infty)=\{x\mid a<x\};$$
$$[a,\ +\infty)=\{x\mid a\leqslant x\};$$
$$(-\infty,\ b)=\{x\mid x<b\};$$
$$(-\infty,\ b]=\{x\mid x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,\ +\infty)=\mathbf{R}.$$

以后如果遇到所作的论述对各类区间(有限或无限；开或闭或半开)都适用时，为了使叙述更简捷，就用“区间 I”来代表它们.

2. 邻域

设 x_0 是给定的实数，δ 是给定的正数，称数集 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\ \delta)$，即

$$U(x_0,\ \delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.$$

由于
$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$

所以点 x_0 的 δ 邻域是开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. 两个端点关于 x_0 对称，其中 x_0 确定了邻域的位置，称作邻域的中心，δ 确定了邻域的大小，称为邻域的半径，如图 1-1 所示.

将邻域的中心 x_0 去掉所得的数集，称为**点 x_0 的去心 δ 邻域**，记作$\dot{U}(x_0,\ \delta)$，即

$$\dot{U}(x_0,\ \delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta),$$

如图 1-2 所示.

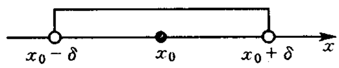

图 1-1

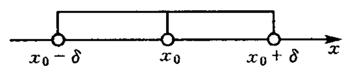

图 1-2

二、函数概念

函数的概念在 17 世纪以前一直与公式紧密关联. 到了 1837 年，德国数学家狄利克雷(1805—1859)才抽象出了较为合理，且今天仍为人们所接受的函数概念.

1．函数的定义

定义 1-1 设 x，y 是两个变量，D 是给定的数集. 若对于 x 在D 内每取一个数值，变量 y 按照一定的对应法则f，总有确定的数值与它对应，则称 y 是x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中数集 D 为函数$f(x)$的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$. x 为**自变量**，y 为**因变量**.

当 x 在D_f 内取定某个数值x_0 时，对应的 y 取到的数值y_0 称为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=f(x_0).$$

当 x 在定义域D_f 内取遍每一个值，对应的函数值的全体组成的数集，称为函数 $y=f(x)$的**值域**，记作 R_f，即

$$R_f=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D_f\}.$$

2．函数概念的几点说明

(1) 函数的两个要素：对应法则 f 和定义域D_f. 这是判定两个函数是否为相同函数的依据. 如果两个函数的对应法则相同，定义域相同，那么这两个函数就是相同的函数，而与自变量和因变量用什么符号表示无关.

如函数 $y=\sqrt{x}$与 $s=\sqrt{t}$，虽然变量表示的符号不同，但对应法则和定义域却相同，这两个函数表示同一个函数.

(2) 函数定义域的确定：通常，如果函数不是由实际问题所确定的，即没有实际意义，并用数学表达式表示，那么定义域是由使函数表达式有意义(成立)的 x 所能取到的一切实数组成的数集，并称为自然定义域. 但如果函数有实际意义，则需要根据实际问题确定定义域.

如函数 $y=x^2$ 的自然定义域为 $D_f=(-\infty,\ +\infty)$. 如果这一函数表示正方形面积 y 与边长x 的关系，则它的定义域为 $D_f=(0,\ +\infty)$.

(3) 单值与多值函数：函数定义中，没有指明有几个确定的 y 值与x 值对应. 如果对每一个 $x\in D_f$，总有唯一确定的 y 值与x 对应，称函数为**单值函数**，如果有两个或两个以上确定的 y 值与x 对应，则称函数为**多值函数**.

本课程所讨论的函数，除特别说明外，都是指单值函数.

(4) 函数的常用表示法：函数至少可以用三种不同的方法表示——**图形法**、**表格法**、**公式法**. 我们举一个用表格法表示函数的例题.

例 1-1 据统计，某地 2006 年 9 月 19—29 日每天的最高气温如表 1-1 所示.

表 1-1

日期(9 月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温(℃)	29	31	31	30	24	21	23	19	26	28	30

这个表格确实表达了该地区的最高温度是日期的函数，这里不存在任何计算温度的公式(否则就不需要气象局了)，但是每一天都会产生出一个唯一的最高气温，对每个日期 t，都有一个相应的唯一最高气温 N.

例 1-2 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin(x-2)$的定义域.

解 x 应满足如下不等式组

$$\begin{cases}4-x^2>0,\\ |x-2|\leqslant 1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}-2<x<2,\\ 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

即

$$1\leqslant x<2.$$

所以，所求函数的定义域为[1, 2).

例 1-3 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(x+h)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(f(x))$.

解 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}$,

$$f(x+h)=\frac{1}{1-(x+h)}=\frac{1}{1-x-h},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}\ (x\neq 0,\ x\neq 1),$$

$$f(f(x))=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{1-x-1}=\frac{x-1}{x}\ (x\neq 0,\ x\neq 1).$$

例 1-4 设绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 求定义域 D_f，值域 R_f，并画出它的图形.

解 $D_f=(-\infty,\ +\infty)$, $R_f=[0,\ +\infty)$，它的图形如图 1-3 所示.

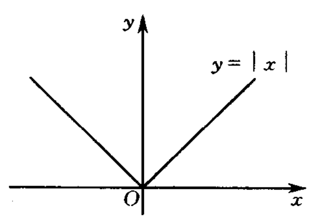

图 1-3

这一函数表达式的特点是当自变量 x 在不同的取值范围内，其对应法则用不同表达式表示，但它仍表示一个函数，称这样的函数为**分段函数**. 其中 $x=0$ 是分段函数的分段点. 图形在 $x=0$ 处出现“尖点”(0, 0). 函数在 $x=0$ 处可能发生某种性质上的改变. 分段函数要分段求值，分段作图，要根据 x 的具体取值范围，选取相应的表达式表示函数.

分段函数是今后研究的主要对象之一，特别要留意函数在“分段点”处性质的变化.

例 1-5 设符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 求定义域 D_f，值域 R_f，并画出它的图形.

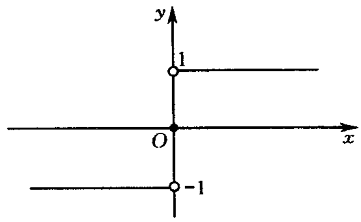

图 1-4

解 符号函数也是分段函数，$D_f = (-\infty, +\infty)$，$R_f = \{-1, 0, 1\}$，图形如图 1-4 所示.

“$x = 0$”是函数的“分段点”，且图形在 $x = 0$ 处断开，所以函数在 $x = 0$ 处可能发生性质的变化.

对任何 $x \in D_f = R$，有 $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$. 由这一公式，自然会理解符号函数名字的由来.

三、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在某区间 I 上有定义（I 可能是 $f(x)$ 的定义域，也可能是定义域的子集）. 如果存在某一正数 M，使得对于每一个 $x \in I$，有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

例 1-6 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x| \leqslant 1$. 而 $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

2. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**，称区间 I 为**单调增加区间**；如果当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**，并称区间 I 为**单调减少区间**. 单调增加函数的图形随着 x 的增大，呈现上升趋势，单调减少函数的图形随着 x 的增大，呈现下降趋势.

例 1-7 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty) \subset D_f$ 内单调增加，在 $(-\infty, 0] \subset D_f$ 内单调减少，在 $D_f = (-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，若对任意的 $x \in D_f$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对任意的 $x \in D_f$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例 1-8 $y = \cos x$ 是偶函数；$y = x^3 + \sin x$ 是奇函数；$y = \sin x + \cos x$ 既非偶函数，也非奇函数.

4. 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，如果存在非零实数 T，使得对任意 $x \in D_f$，有 $x + T \in D_f$，且

$$f(x + T) = f(x).$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为 $f(x)$ 的**周期**. 通常周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例 1-9 $f(x) = \sin x$，$f(x) = \cos x$ 都是周期函数，周期都是 2π；$f(x) = \tan x$，$f(x) = \cot x$ 也都是周期函数，周期都是 π.

周期函数的图形具有在每一个周期长度的区间内形状相同的特点，所以，只要画出一个周期长度区间内的图形，再通过图形的左、右平移而得到整体图形，并且可以研究一个周期长度区间内函数的性质，推及整体性质.

四、反函数

定义 1-2 设给定的函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f，值域为 R_f. 若对任意 $y\in R_f$，总有确定的 $x\in D_f$ 与 y 对应且满足$f(x)=y$，这时得到以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称这个新函数为 $y=f(x)$的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称原给定的函数 $y=f(x)$为**直接函数**.

习惯上，$y=f(x)$的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，且定义域 $D_f^{-1}=R_f$，值域 $R_f^{-1}=D_f$.

我们指出，如果对某些 $y\in R_f$，由关系式 $f(x)=y$ 可以确定多个$x\in D_f$，则反函数 $x=f^{-1}(y)$是多值的.

如 $y=x^2$，它的定义域 $D_f=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $R_f=[0,\ +\infty)$. 在 R_f 上任取数值$y\neq 0$，适合关系式 $x^2=y$ 的数值x 有两个：$x=\pm\sqrt{y}$，所以这个函数的反函数是多值的. 但是不难证明：如果 $y=f(x)$是单调函数，则它的反函数必单值. 因此，如果限制 $x\in[0,\ +\infty)$，则 $y=x^2$ 是单调增加的，因而它的反函数是单值的，即 $x=\sqrt{y}$，我们称它为 $y=x^2$ 的反函数的一个**单值分支**. 另一个单值分支为 $x=-\sqrt{y}$.

若在同一坐标平面上作出直接函数 $y=f(x)$和反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形，则这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的，如图 1-5 所示.

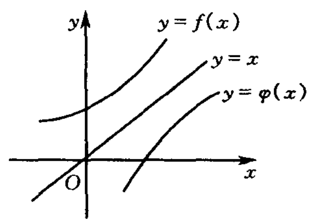

图 1-5

例 1-10 求函数 $y=5x+3$ 和 $y=\sqrt{x-1}$的反函数.

解 从以上两式中解出 x，求得反函数分别为

$$x=\frac{1}{5}(y-3) \quad 和 \quad x=y^2+1.$$

再改记为

$$y=\frac{1}{5}(x-3) \quad 和 \quad y=x^2+1.$$

第二节　初等函数

通常，我们所碰到的函数大多是初等函数，而初等函数是由基本初等函数通过一定的运算关系构成的. 本节主要介绍基本初等函数、复合函数与初等函数等概念，特别要注意复合函数的概念和复合函数的结构.

一、基本初等函数

定义 1-3 如下六种函数统称为基本初等函数：

(1) 常数函数 $y=C$ （C 为常数）；

(2) 幂函数 $y=x^\mu$ （μ 为实数）；

(3) 指数函数 $y=a^x$ （$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）；

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）；

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

以上六种基本初等函数的性质、图形在中学已经学过，但由于在后面的学习中经常要涉及到基本初等函数，故建议读者对基本初等函数的定义、性质、图像列表复习.

二、复合函数

函数 $y=\sin^2 x$ 不是一个基本初等函数，但它可以看做是由基本初等函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 通过中间变量 u 连接成的一个新函数.

定义 1-4 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，并且对于 $u=\varphi(x)$ 的定义域内的全部或部分 x 值所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有定义，便得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，叫做**由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数**，简称**复合函数**，记作 $y=f(\varphi(x))$，而 u 称为**中间变量**.

例 1-11 函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=4-x^2$ 复合而成的，其定义域为 $[-2,2]$，它是 $u=4-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分；$y=\arcsin u$，$u=6+x^2$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 内不能复合成一个函数，因为 $u=6+x^2$ 的函数值均不大于 6，不在 $y=\arcsin u$ 的定义域之内.

例 1-12 分析下列复合函数的结构.

(1) $y=\sqrt{\tan 2x}$；　　　　(2) $y=e^{\cos\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=2x$；

(2) $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2+1$.

例 1-12 中，$v=2x$ 与 $t=x^2+1$ 虽不是基本初等函数，但其结构已十分简单. 像这种由基本初等函数的四则运算所得到的函数，通常称为**简单函数**.

三、初等函数

定义 1-5 由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，且能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**，否则就是**非初等函数**.

例 1-13 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$y=\ln\dfrac{x+\cos^2 x}{\sin x}$

等都是初等函数. 而分段函数

$$y=\operatorname{sgn} x,\quad f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

是非初等函数.

第三节　函数的极限

研究物质的运动，仅仅知道有关的函数在变化过程中单个的取值情况是很不够的，还需要弄清楚函数变化时总的变化趋势，其终极状况，以及是否隐含着某种“相对稳定”的性质等. 函数极限的概念，就是从函数变化趋势的直观形象中抽象出来的.

假设在自变量 x 的某一变化过程中，函数 $f(x)$ 具有这样的变化趋势：函数值 $f(x)$ 无限

接近于某常数 A，我们就说，在自变量 x 的该变化过程中，函数 $f(x)$以常数 A 为极限.

本节先讨论特殊函数——数列的极限，然后再讨论一般的函数极限.

一、数列的极限

1. 数列的概念

数列是指按照一定规律排列而成的一列数：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

简记为$\{x_n\}$. 数列中的每一个数称作数列的项，第 n 项 x_n 称作数列$\{x_n\}$的通项或一般项. 例如：

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}:\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots;$$

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots;$$

$$\{(-1)^{n-1}\}:\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots.$$

可见，数列的项 x_n 依赖于项数 n 的变化而变化，相当于项数 n 的函数，即 $x_n=f(n)$，其中自变量 n 取正整数，对应法则就是数列的通项 x_n. 所以数列可作为特殊的函数加以讨论. 如果用图形描绘数列，它对应于数轴上一列点. 它也可理解为数轴上的一个动点 x_n，随着 n 的变化移动到数轴上相应位置形成的，如图 1-6 所示.

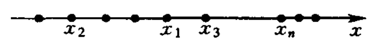

图 1-6

2. 数列的极限

数列 $x_n=f(n)$的自变量 n 取正整数 1，2，$\cdots$，逐渐增大，记作 $n\to\infty$，相应数列各项在数轴上将其对应点描出来，观察它们在数轴上的移动趋势.

例 1-14 数列 $x_n=\dfrac{n+1}{n}$：2，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，$\cdots$，如图 1-7 所示.

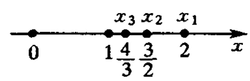

图 1-7

观察结果：随着 n 无限增大，数列 $x_n=\dfrac{n+1}{n}$大于 1 而无限接近于常数 1. 这个常数 1 就称作数列 $x_n=\dfrac{n+1}{n}$当 $n\to\infty$时的极限.

例 1-15 数列 $x_n=(-1)^{n-1}$：1，-1，1，-1，$\cdots$，如图 1-8 所示.

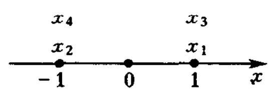

图 1-8

观察结果：随着 n 无限增大，数列 $x_n=(-1)^{n-1}$在两个常数 -1，1 上交替变化，没有无限接近于一个确定的常数. 因此说这个数列没有极限.

由这两个具体数列的变化趋势，可抽象出数列极限的一种定性描述定义.

定义 1-6 设数列$\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，对应的数列的项 x_n 无限接近某个确定的常数 A，则称常数 A 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的**极限**，或称当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$**收敛**于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A\ (n\to\infty).$$

如果当 n 无限增大时，数列的项 x_n 不是无限接近一个确定的常数，则称数列$\{x_n\}$没有极限，或称数列$\{x_n\}$**发散**.

例 1-16 观察下列数列的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{3^n}$; (2) $x_n=2n+1$.

解 先列出所给的数列:

(1) $x_n=\frac{1}{3^n}$: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3^2}$, $\cdots$, $\frac{1}{3^n}$, $\cdots$;

(2) $x_n=2n+1$: 5, 7, $\cdots$, $2n+1$, $\cdots$.

观察当 $n\to\infty$ 时的发展趋势, 得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)$不存在.

注 关于数列极限还有精确定义, 数列 x_n 与 A 的无限接近程度可用距离 $|x_n-A|$ 无限小表示, 而 $|x_n-A|$ 无限小等价于对任意给定的无论多么小的正数 ε, 恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立. 这个不等式成立的条件是 n 无限增大, n 无限增大可用存在正整数 N, 当 $n>N$ 表示. 于是数列 $\{x_n\}$ 极限的精确定义如下.

定义 1-6′ 设 $\{x_n\}$ 是一已给数列, A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 恒有

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

又如, 数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 收敛于 0 ($n\to\infty$); 数列 $\{2^n\}$ 发散.

其中数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 单调减少, 即 $\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>\cdots>\frac{1}{2^n}\cdots$ 且有界, 即 $\left|\frac{1}{2^n}\right|<1$; 而数列 $\{2^n\}$ 单调增加, 即 $2<2^2<\cdots<2^n<\cdots$ 但无界. 那么数列的收敛性与其有界性是否有一定联系呢? 答案是肯定的, 即有下列定理.

定理 1-1 (有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 必有界.

注 这个定理可由数列极限的精确定义证明(略).

数列有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条件.

例如, 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 即 $|(-1)^n|=1$, 但它却发散.

将数列收敛的必要条件加强起来, 得到如下数列收敛的充分条件.

定理 1-2 若数列 $\{x_n\}$ 有界且单调, 则数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

注 这个定理的定性解释是: 如果将单调数列各项对应的点在数轴上表示出来, 这些点在数轴上朝着数轴正向或负向移动. 移动结果有两种: 一种是无限接近某一定点, 另一种是沿数轴移向无穷远. 由于数列有界, 所以只能存在前一种结果, 即数列有极限.

例如, 数列 $x_n=|q|^n$, 当 $|q|<1$ 时, 单调减少且有界; 当 $n\to\infty$ 时, $x_n=|q|^n$ 收敛. 类似于数列 $x_n=\frac{1}{2^n}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$.

收敛的数列还有其他的性质, 这将在一般的函数极限性质中作综合阐述.

二、函数的极限

1. 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 x 分别从左、右两边趋向于 1 时的变化情况，如图 1-9 所示．不难看出，当 x 从左边无限接近 1 时，$f(x)$ 无限接近“2”；当 x 从右边无限接近 1 时，$f(x)$ 也无限接近“2”．我们称当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 的极限为 2．

注 $x\to x_0$ 是指 x 无限接近 x_0 而不等于 x_0 的变化状态．所以函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可以有定义，也可以无定义．此例中函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义，但当 $x\to1$ 时，它的极限为 2．所以 $x\to x_0$ 是指 x 落在 x_0 的去心邻域内，即 $0<|x-x_0|<\delta$．

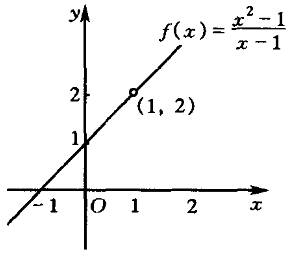

图 1-9

定义 1-7 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果自变量 x 在该邻域内无限接近 x_0，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近某一确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

例如，$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$（$C$ 为常数）；$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$．

2．$x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的极限

我们需要指出，$x\to x_0$ 表示自变量 x 可以从 x_0 的右侧（$x>x_0$）趋向于 x_0，也可以从 x_0 的左侧（$x<x_0$）趋向于 x_0，即不限定 x 趋向于 x_0 的方式，但有时需要考虑 x 仅从某一侧趋向于 x_0 时函数 $f(x)$ 的变化趋势．对于 x 仅从右侧趋向于 x_0（记作 $x\to x_0^+$）的过程，$f(x)$ 以 A 为极限的定义如下．

定义 1-8 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一右半邻域 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 内有定义，如果自变量 x 在此半邻域内无限接近于 x_0，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定常数 A，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^+) \text{ 或 } f(x_0^+)=A.$$

类似地，可以给出 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限** B 的定义．左极限记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=B \quad 或 \quad f(x)\to B\ (x\to x_0^-) \quad 或 \quad f(x_0^-)=B.$$

左、右极限统称为**单侧极限**．相应地，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 叫做**双侧极限**，简称**极限**．

例 1-17 (1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$．

(2) 设函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & x>0,\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$．

解 (1) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$．

由于“$x\to0$”包含 $x\to0^-$ 或 $x\to0^+$，而 $f(x)$ 无限接近的常数不是唯一确定的，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在．