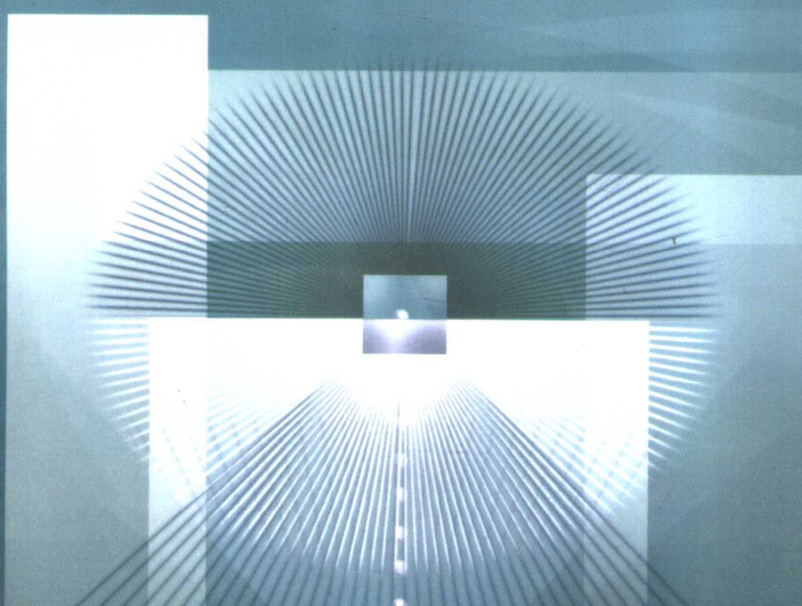
西安交通大学 "十五"规划教材

21世纪大学电子信息类专业规划教材

配套辅导用书

电磁场与电磁波（第2版）学习辅导

冯恩信 张安学 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學 "十五"规划教材
21世纪大学电子信息类专业规划教材 配套辅导用书

电磁场与电磁波

（第2版）

学习辅导

冯恩信 张安学 编著

西安交通大学出版社
·西 安·

内容提要

“电磁场与电磁波”是电子信息类专业的一门技术基础课，本课程内容是电子信息类专业学生所具备的知识结构中的重要组成部分。本书是作者编写的《电磁场与电磁波》(第 2 版，西安交通大学出版社)的配套辅导书。内容依此教材也分为 8 章，每章分为 5 部分：主要内容关系，重点要求，复习提要，典型题解及课后习题解答。

本书适合作为电子信息类专业本科生“电磁场与电磁波”课程的学习辅导书，也可供其他讲授或学习电磁场与电磁波基础的教师、学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波学习辅导/冯恩信，张安学编著.
—西安：西安交通大学出版社，2006.10
ISBN 7-5605-2234-3

Ⅰ.电… Ⅱ.①冯…②张… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教学参考资料②电磁波-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 103791 号

书　　名：电磁场与电磁波学习辅导
编　　著：冯恩信　张安学
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路 25 号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
网　　址：http://press.xjtu.edu.cn
电子邮箱：eibooks@163.com
印　　刷：陕西宝石兰印务有限责任公司
字　　数：243 千字
开　　本：727 mm×960 mm　1/16
印　　张：13.25
版　　次：2006 年 10 月第 1 版　2006 年 10 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5605-2234-3/TN・91
定　　价：18.00 元

前　言

“电磁场与电磁波”是电子信息类专业的一门技术基础课，本课程内容是电子信息类专业学生所具备的知识结构中的重要组成部分。“电磁场与电磁波”课程中的基本物理量是矢量场，内容比较抽象，被认为是一门教师难教、学生难学的课程。

自从作者编写的《电磁场与电磁波》第 1 版出版以后，有不少学生和读者希望能有一本与教材内容配套的教学辅导书，以方便在学习过程中参考。应广大学生和读者的要求，在出版社的大力支持下，配合第 2 版教材，我们编写了这本教学辅导书。

本书是作者编写的《电磁场与电磁波》(第 2 版，西安交通大学出版社)的配套辅导书。希望能帮助使用该教材的读者理解和掌握本课程的基本要求和重点内容，正确理解电磁场与电磁波的基本概念、规律和方法。

本书内容按配套教材，也分为 8 章，包括矢量场、静电场、恒定电流场、恒定磁场、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁辐射与天线。

每章包含 5 个部分。第 1 部分是主要内容关系，给出了每一章的主要内容和它们之间的关系；第 2 部分是每章的重点要求；第 3 部分是复习提要，帮助读者对每章内容进行总结；第 4 部分是典型题解，详细分析和解答大量的例题，使读者加深对理论内容的理解和掌握，拓宽解题思路，提高解题技巧；第 5 部分是课后习题答案。

本书第 1 至 4 章的典型题解和课后习题答案由张安学博士编写；其余部分由冯恩信编写。

在本书编写中，参考了近年来国内外相关的教材和参考书，吸收了很多有益的经验，受到不少启发。对为本书的编写和出版给予帮助和支持的人士，在此一并表示衷心的感谢。

书中有不妥或错误之处，敬请读者批评指正。

编者

目　录

第 1 章　矢量场

1.1　主要内容关系

- 矢量场
  - 矢量
    - 矢量的定义
    - 矢量的表示方法
      - 数学符号表示
      - 几何表示
      - 坐标分量表示
    - 矢量的代数运算
      - 两矢量的和与差
      - 标量乘矢量
      - 两矢量的点积和叉积
  - 矢量场在三种坐标系中的表示
    - 直角坐标系
    - 圆柱坐标系
    - 圆球坐标系
  - 矢量场的微分和源
    - 标量场的方向导数和梯度
    - 矢量场的通量和散度
    - 矢量场的环量和旋度
  - 矢量场中的几个定理
    - 格林定理
    - 亥姆霍兹定理
    - 唯一性定理

1.2　重点要求

(1)熟练掌握矢量的表示方法,矢量的运算;掌握矢量场的概念。

(2)掌握在直角、圆柱和圆球三种常用坐标系中空间位置点和矢量的表示方法;了解在三种常用坐标系之间矢量场的坐标和坐标分量之间的关系。

(3)熟悉梯度的意义、梯度和方向导数的关系;熟悉在三种常用坐标系中怎样计算梯度;了解梯度的一些运算规则。

(4)熟悉通量和散度的意义;熟悉在三种常用坐标系中怎样计算散度;了解散度的一些运算规则及高斯定理的意义。

(5)熟悉环量、环量强度和散度的意义;熟悉在三种常用坐标系中怎样计算旋度;了解旋度的一些运算规则及斯托克斯定理的意义。

(6)熟悉无旋场与无散场的特点;掌握亥姆霍兹定理的意义;了解在无界空间中的矢量场。

(7)掌握标量格林定理。

(8)掌握唯一性定理。

1.3 复习提要

1. 矢量及其矢量场

(1)标量与矢量

(2)矢量的表示方法

矢量可用符号表示、几何表示、坐标分量表示。

$$\boldsymbol{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$$

矢量可用其大小和单位矢量表示为

$$\boldsymbol{A}=A\hat{a}$$

(3)矢量的代数运算

矢量的加减法:

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(A_x\pm B_x)\hat{x}+(A_y\pm B_y)\hat{y}+(A_z\pm B_z)\hat{z}$$

点积: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

矢积:
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

(4)标量场与矢量场

2. 三种常用坐标系中的矢量场

(1)三种常用坐标系

三种常用坐标系为直角坐标系、圆柱坐标系和圆球坐标系,它们的坐标分别为(x, y, z),(ρ,φ,z),(r,θ,φ)。

直角坐标系的坐标轴单位矢量为$\hat{x}$,$\hat{y}$,$\hat{z}$,则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$$

圆柱坐标系的坐标轴单位矢量为$\hat{\rho}$,$\hat{\varphi}$,$\hat{z}$,则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_\rho(\boldsymbol{r})\hat{\rho} + A_\varphi(\boldsymbol{r})\hat{\varphi} + A_z(\boldsymbol{r})\hat{z}$$

圆球坐标系的坐标轴单位矢量为 $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_r(\boldsymbol{r})\hat{r} + A_\theta(\boldsymbol{r})\hat{\theta} + A_\varphi(\boldsymbol{r})\hat{\varphi}$$

位置矢量　$\boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = r\hat{r}$

(2)直角坐标系中的坐标分量和圆柱坐标系中的坐标分量的关系，用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

(3)圆球坐标系中坐标分量与直角坐标系中的坐标分量的关系，用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\varphi & \sin\varphi\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

3. 梯度

(1)方向导数

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}$$

(2)梯度

$$\nabla\Phi = \hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \hat{l}\cdot\nabla\Phi$$

在圆柱坐标系中：

$$\nabla\Phi = \hat{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

在圆球坐标系中：

$$\nabla\Phi = \hat{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

(3) $\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$

4. 矢量场的散度

(1)通量

$$\Psi=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

(2)散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

在圆柱坐标系及圆球坐标系中分别表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

(3)高斯定理

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{V}$$

5. 矢量场的旋度

(1)矢量场的环量

$$\Gamma=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

(2)旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

圆柱坐标系和圆球坐标系中,矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度可分别用行列式表示为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

(3)斯托克斯定理

$$\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

6. 无旋场与无散场

(1)亥姆霍兹定理:若矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在无限空间中处处单值,且其导数连续有界,源分布在有限区域中,则当矢量场的散度及旋度给定后,该矢量场可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

式中

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

(2)无旋场与无散场

无界空间中,矢量场由其散度及旋度确定,可分为无旋场和无散场;有界空间中,根据区域中矢量场散度及旋度是否为 0,矢量场可分为 4 类。

7. 格林定理

若任意两个标量场 Φ 及 Ψ 在有界空间区域 V 中具有连续的二阶偏导数,在包围区域 V 的封闭面 S 上,具有连续的一阶偏导数,则标量场 Φ 及 Ψ 满足下列等式

$$\iiint_V (\nabla\Psi \cdot \nabla\Phi + \Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V = \oiint_S \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$\iiint_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V = \oiint_S \left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

8. 矢量场的唯一性定理

矢量场的唯一性定理:在空间某一有界区域 V 中的矢量场,当其在该区域 V 中的散度、旋度以及边界面 S 上的切向分量或法向分量给定后,则该区域中的矢量场被唯一地确定。

1.4　典型题解

1-1　已知 $\boldsymbol{A} = 5\hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z}$;$\boldsymbol{B} = 2\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}$,求:(a)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小(模);(b)$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢量;(c)$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$;(d)$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$;(e)直角坐标系中,$\boldsymbol{A}$ 在三个坐标轴上的投影。

解:(a) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}=\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{35}$$

$$B=|\boldsymbol{B}|=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}=\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$$

(b) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢量为

$$\hat{a}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=\frac{1}{\sqrt{35}}(5\hat{x}+3\hat{y}-\hat{z})=\frac{5}{\sqrt{35}}\hat{x}+\frac{3}{\sqrt{35}}\hat{y}-\frac{1}{\sqrt{35}}\hat{z}$$

$$\hat{b}=\frac{\boldsymbol{B}}{B}=\frac{1}{\sqrt{17}}(2\hat{x}+3\hat{y}-2\hat{z})=-\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{x}+\frac{3}{\sqrt{17}}\hat{y}-\frac{2}{\sqrt{17}}\hat{z}$$

(c) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=10+9+2=21$

(d) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\5&3&-1\\2&3&-2\end{vmatrix}=-3\hat{x}+8\hat{y}+9\hat{z}$

(e) $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的投影为 $\boldsymbol{A}\cdot\hat{x}=A_x=5$

$\boldsymbol{A}$ 在 y 轴上的投影为 $\boldsymbol{A}\cdot\hat{y}=A_y=3$

$\boldsymbol{A}$ 在 z 轴上的投影为 $\boldsymbol{A}\cdot\hat{z}=A_z=-1$

1-2 将圆柱坐标系中的矢量场 $\boldsymbol{F}(\rho,\varphi,z)=2\hat{\rho}+3\hat{\varphi}$ 用直角坐标系中的坐标分量表示。

解: 根据

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_\rho\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cos\varphi-3\sin\varphi\\2\sin\varphi+3\cos\varphi\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(2\cos\varphi-3\sin\varphi)\hat{x}+(2\sin\varphi+3\cos\varphi)\hat{y}$$

又因为 $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\z=z\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}[(2x-3y)\hat{x}+(2y+3x)\hat{y}]$

1-3 将圆球坐标系中的矢量场 $\boldsymbol{F}(r,\theta,\varphi)=5\hat{r}+2\hat{\theta}$ 用直角坐标系中的坐标分量表示。

解:根据

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_r\\A_\theta\\A_\varphi\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\sin\theta\cos\varphi-2\sin\varphi\\5\sin\theta\sin\varphi+2\cos\varphi\\5\cos\theta\end{bmatrix}$$

即　$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\hat{x}(5\sin\theta\cos\varphi-2\sin\varphi)+\hat{y}(5\sin\theta\sin\varphi+2\cos\varphi)+\hat{z}5\cos\theta$

又因为
$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

得　$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{x}+\left(\frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{y}+\frac{5z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{z}$$

1-4　求标量场 $f(x,y,z)=3xy+2yz^2$ 在点(1,1,1)沿 $\boldsymbol{l}=x\hat{x}-2\hat{y}+\hat{z}$ 方向的变化率。

解:标量场沿某一方向的变化率为该标量的梯度在这一方向上的投影,则

$$\nabla f=\hat{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}=3y\hat{x}+(3x+2z^2)\hat{y}+4yz\hat{z}$$

$\boldsymbol{l}$ 的方向为

$$\hat{l}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2^2+1}}(x\hat{x}-2\hat{y}+\hat{z})$$

f 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\nabla f\cdot\hat{l}=\frac{3xy-2(3x+2z^2)+4yz}{\sqrt{x^2+5}}$$

所以,在(1,1,1)点,标量场 f 沿 $\hat{l}$ 方向的变化率为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{3}{\sqrt{6}}$$

1-5 计算下列矢量场的散度：

(a) $\boldsymbol{F}=yz\hat{x}+zy\hat{y}+xz\hat{z}$

(b) $\boldsymbol{F}=\hat{\rho}+\rho\hat{\varphi}$

(c) $\boldsymbol{F}=2\hat{r}+r\cos\theta\hat{\theta}+r\hat{\varphi}$

解：(a) $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\dfrac{\partial F_x}{\partial x}+\dfrac{\partial F_y}{\partial y}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}=z+x$

(b) $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}=\dfrac{1}{\rho}$

(c) $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}=\dfrac{4}{r}-\sin\theta+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

1-6 在圆球坐标系中，矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{r^2}\hat{r}$，证明矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 为无旋场。

证：因为

$$\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\left(\frac{1}{r^2}\right)\hat{r}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ \dfrac{1}{r^2} & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

所以 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 为无旋场。

1-7 求矢量场 $\boldsymbol{F}=\rho\hat{\rho}+\hat{\varphi}+z\hat{z}$ 穿过由 $\rho\leqslant1$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant z\leqslant1$ 确定的区域的封闭面的通量。

解：可以利用高斯定理来求解，由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=2+1=3$$

利用高斯定理，得

$$\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}dV=\iiint_V 3dV=3V=\frac{3\pi}{2}$$

1-8 证明任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 均满足等式

$$\iiint_V(\nabla\times\boldsymbol{A})dV=-\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{S}$$

式中 S 为包围体积 V 的闭合表面，此式又称为矢量斯托克斯定理。

证：设 $\boldsymbol{C}$ 为任一常矢量，则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

那么对于任一体积 V，得

$$\iiint_V\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})dV=-\boldsymbol{C}\cdot\iiint_V\nabla\times\boldsymbol{A}dV$$

根据高斯定理，上式左端应为

$$\iiint_V \nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = \oiint_S (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \cdot \oiint_S \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以得

$$-\boldsymbol{C} \cdot \iiint_V \nabla \times \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \boldsymbol{C} \cdot \oiint_S \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由常矢量 $\boldsymbol{C}$ 的任意性，可得

$$\iiint_V (\nabla \times \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = -\oiint_S \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1-9　已知 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$，$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$，计算 $\boldsymbol{F}$。

解：根据亥姆霍兹定理

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \Phi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

其中

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V'$$

因为 $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$，因此 $\boldsymbol{A} = 0$；对于 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$，有

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\delta(x')\delta(y')\delta(z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \Phi(\boldsymbol{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = \frac{\hat{r}}{4\pi r^2}$$

1-10　已知 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$，$\nabla \times \boldsymbol{F} = \hat{z}\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ 计算 $\boldsymbol{F}$。

解：根据亥姆霍兹定理

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \Phi(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

其中

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V'$$