复变函数

Function of Complex Variable

卢玉峰　刘西民　编

4

高等教育出版社

复变函数

Function of Complex Variable

卢玉峰 刘西民 编

高等教育出版社

内容简介

本书的先修课程是高等数学。本书主要内容包括：复数与复变函数；解析函数；复变函数的积分；级数；留数及其应用；保形变换；积分变换等。本书强调复变函数的基本理论的几何背景与其在物理及工程技术问题上的应用。内容处理上条理清晰，层次分明，通俗易懂，注重解题方法的训练和能力的培养。为巩固所学知识，每节后都配备了大量的习题。

本书适合高等院校理工类各专业研究生、本科生使用，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/卢玉峰，刘西民编．—北京：高等教育出版社，2007.12

ISBN 978-7-04-022579-2

Ⅰ．复…　Ⅱ．①卢…②刘…　Ⅲ．复变函数-高等学校-教材　Ⅳ．O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第171746号

策划编辑 李　蕊　**责任编辑** 董达英　**封面设计** 李卫青　**责任绘图** 黄建英
版式设计 张　岚　**责任校对** 朱惠芳　**责任印制** 尤　静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市南方印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007年12月第1版
印　　张	13.5	**印　　次**	2007年12月第1次印刷
字　　数	250 000	**定　　价**	18.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　22579-00

前　言

复变函数是一门古老而富有生命力的学科，它是在17和18世纪伴随着微积分的发展和解决实际问题的需要而发展起来的数学分支。复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论中的平面问题的有力工具，是工科数学中理工科院校学生继工科数学分析之后的又一门数学基础课。

复变函数又称为复分析，是实变函数微积分的推广和发展。因此它不仅在内容上与实变函数微积分有许多类似之处，而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似。当然，复变函数也有自身的特点，有自己的研究工具和方法，在学习过程中，应注意与微积分理论的比较，从而加深理解，同时也需注意复变函数本身的特点，并掌握它自身所固有的理论和方法。

本书只假定读者熟悉基本的微积分理论，全面介绍了复变函数的基本理论及其在工程问题上的应用，理论和实际应用密切结合，列举了大量的复变函数在工程技术及物理学等各个学科应用的例子。为了让读者更通俗地理解复变函数理论，对一些定理我们只给了描述性的证明，而未给出严格的数学论证。各章后附有大量的各种难易程度的习题供读者选做。本书适合作为高等工科院校各本科专业、理工类高年级本科生和研究生以及工程技术人员的复变函数教材和教学参考书，其中有些内容在教学中可以根据具体情况进行取舍。我们力求用简洁的语言在最少的数学基础上介绍复变函数的基本内容，但由于作者学识浅薄，文中不妥、谬误之处一定存在，恳请读者批评指正。

本书的编写得到了大连理工大学应用数学系王仁宏先生的热情鼓励，并得到了东北大学理学院张庆灵教授、高等教育出版社编辑的关心和指导。编者谨向他们表示衷心的感谢！

编　者

2007年6月于大连理工大学

目 录

第一章 复数与复变函数

§1.1 复数与复平面

为更好地了解复数，首先重温不同数域的建立过程.

有理数可以写成两个整数的比，即形如$\frac{m}{n}$，$n\neq 0$，并且规定所有的$\frac{n}{n}=1$.记所有的有理数构成的集合为$\mathbb{Q}$，有理数经过有限次的加减乘除运算的结果还是有理数，即有理数关于四则运算是封闭的.

注意到有理数恰好是如下方程的解

$$ax+b=0,$$

其中a,b是有理数.

但所有有理数都不满足方程

$$x^2=5, \tag{1.1}$$

因此，在有理数的基础上延拓数的概念很有必要，记$\sqrt{5}$为方程(1.1)的解，它为无理数，由此无理数产生.有理数和无理数统称为实数，记为$\mathbb{R}$.但人们又发现在实数范围内不能解方程

$$x^2=-1. \tag{1.2}$$

根据经验，人们再次把数的概念延拓，加入方程(1.2)的根$\sqrt{-1}$.用i表示$\sqrt{-1}$，从而数由实数扩充到复数.

定义 1.1 称$a+b\mathrm{i}$为复数，其中a,b是实数.两个复数$a+b\mathrm{i}$和$c+d\mathrm{i}$相等当且仅当$a=c$且$b=d$.

记复数全体为$\mathbb{C}$，复数的加法运算定义为

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}.$$

复数的乘法运算定义为

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}.$$

特别地，n个相同复数z的乘积称为z的n次幂，记作z^n.

复数的减法运算和除法运算分别定义为加法和乘法的逆运算，从而有

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i},$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\quad (c^2+d^2\neq 0).$$

与实数不同，复数没有大小排序.例如，讨论$2+3\mathrm{i}$和$3+2\mathrm{i}$哪个大哪个小是

没有意义的.

例 1.1 计算

$$\frac{(-1+\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})}.$$

解

$$\frac{(-1+\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})-(3+4\mathrm{i})}=\frac{1+4\mathrm{i}}{-1-3\mathrm{i}}=\frac{(1+4\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})}{(-1-3\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})}=-\frac{13}{10}-\frac{1}{10}\mathrm{i}.$$

□

定义 1.2 若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R})$，称 a 和 b 分别为 z 的实部和虚部且记为 $a=\mathrm{Re}\ z, b=\mathrm{Im}\ z$.

若 $a=\mathrm{Re}\ z=0$，则称复数 z 为纯虚数. 若 $b=\mathrm{Im}\ z=0$，则 z 是实数.

显然，$z_1=z_2$ 当且仅当 $\mathrm{Re}\ z_1=\mathrm{Re}\ z_2$ 且 $\mathrm{Im}\ z_1=\mathrm{Im}\ z_2$. 因此任何复数方程都可以转化为一对实数方程.

从代数的观点出发，复数集$\mathbb{C}$可以定义为有序实数对的集合，即

$$\mathbb{C}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}.$$

从而$\mathbb{C}$上的加法和乘法等同如下运算：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d);$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

平面直角坐标系建立了有序实数对和 xy-平面上的点之间的一一对应. 例如在图 1.1 中，有序数对$(-1,2)$对应点 Q. 所以对任意复数 $a+b\mathrm{i}$，都可以找到 xy-平面上的一个点，它的坐标是(a,b)；反之，xy-平面上任意一点(a,b)都唯一确定一个复数 $a+b\mathrm{i}$. 因此，xy-平面可以表示全体复数$\mathbb{C}$.

xy-平面被用来表示全体复数时称作复平面或 z-平面. 由于 x-轴上的点表示实数，故称为实轴，y-轴称为虚轴，其上非原点的点表示纯虚数.

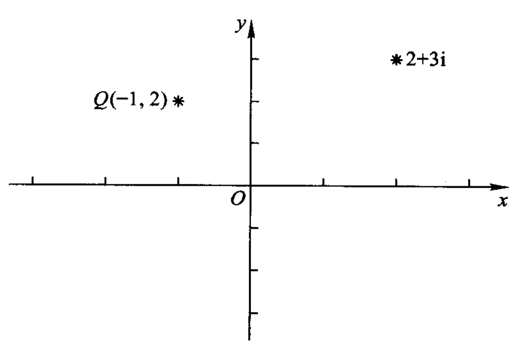

图 1.1

今后经常把复数 z 简称为点 z，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面上点(a,b)不加区别.

例 1.2 设复平面上有 n 个质点位于点 $z_1,\cdots,z_n$，其质量分别为 $m_1,\cdots,m_n$. 证明这 n 个质点的质心是

$$\hat{z}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

解 记 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i},z_2=x_2+y_2\mathrm{i},\cdots,z_n=x_n+y_n\mathrm{i}$，令 $M=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k$. 如果质心的坐标是$(\hat{x},\hat{y})$，则

$$\hat{x}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_kx_k}{M},\quad \hat{y}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_ky_k}{M}.$$

显然，$\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 恰好是复数 $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_kz_k}{M}=\hat{z}$ 的实部和虚部. □

由勾股定理可知，点 $z=a+b\mathrm{i}$ 到原点的距离为$\sqrt{a^2+b^2}$. 定义

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

为 z 的模.

令 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i},z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，则

$$|z_1-z_2|=|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i}|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

就是点(a_1,b_1)和(a_2,b_2)之间的距离，因此点 z_1 和 z_2 之间的距离用$|z_1-z_2|$表示. 在描述平面上的曲线时，这种距离的表示方法很有用. 例如，设 z_0 是一个固定的复数，r 是一个固定的正实数，则方程

$$|z-z_0|=r \tag{1.3}$$

表示与 z_0 的距离是 r 的所有复数的集合. 通常方程(1.3)称为圆周方程.

例 1.3 描述满足下列方程的点 z.

(1) $|z+2|=|z+1|$； (2) $|z-\mathrm{i}|=\mathrm{Im}\ z+1$.

解 (1) 点 z 满足方程(1)当且仅当它到点 -2 和 -1 的距离相等，因此方程(1)是连接 -2 和 -1 的线段的垂直平分线，即方程(1)是直线 $x=-\dfrac{3}{2}$，见图 1.2.

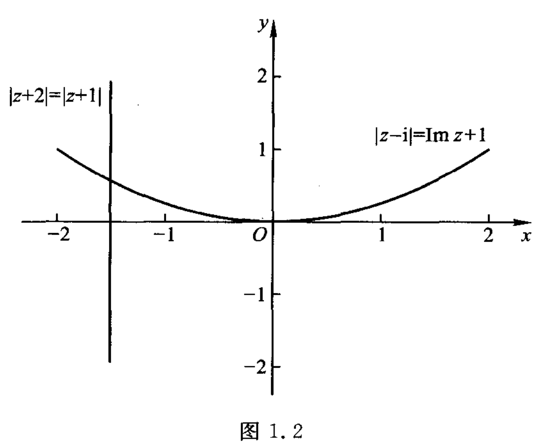

图 1.2

求解方程(1)的另一个方法是设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是方程的解，则可以得到代数式

$$|z+2|=|z+1|,$$

即

$$|x+\mathrm{i}y+2|=|x+\mathrm{i}y+1|.$$

从而

$$x=-\frac{3}{2}.$$

(2) 直接计算可得 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=y+1$，即 $x^2=4y$，它表示一条抛物线(见图 1.2). □

点 $z=a+b\mathrm{i}$ 关于实轴的对称点是 $a-b\mathrm{i}$. 称 $a-b\mathrm{i}$ 是复数 $a+b\mathrm{i}$ 的共轭复数，记为 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$.

容易验证，$z=\bar{z}$ 当且仅当 z 是一个实数；两个复数的和(差)的共轭等于它们共轭的和(差)，即

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}.$$

例 1.4 证明两个复数乘积的共轭等于它们共轭的乘积.

证明 即要证明

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}. \tag{1.4}$$

记 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$，则

$$\overline{z_1 z_2}=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}&=(a_1-b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})=a_1a_2-b_1b_2-a_1b_2\mathrm{i}-a_2b_1\mathrm{i}\\&=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因此方程(1.4)成立. □

下面是复数模与其共轭的另外一些基本性质，它们的验证留作练习.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ (z_2\neq 0),\quad |z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}\,z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},\quad \bar{\bar{z}}=z,\quad |z|=|\bar{z}|,\quad z\bar{z}=|z|^2.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\quad(z_2\neq 0),$$

特别地，

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

例 1.5 用复数表示圆的方程

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0,$$

其中 A,B,C,D 是常数，$A\neq 0$.

解 令 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$x^2+y^2=z\bar{z},\quad x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

将上面这些式子代入方程中得

$$\alpha z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0,$$

其中 $\alpha=A,\beta=\dfrac{B+\mathrm{i}C}{2},d=D.$ □

例 1.6 设 z_1,z_2 是两个复数,求证:

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

证明

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

□

练习 1.1

1. 计算下面各题,将结果写成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式.

(1) $\dfrac{(8+2\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})}{(4+\mathrm{i})^2}$;

(2) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}-\dfrac{8+\mathrm{i}}{7-\mathrm{i}}$;

(3) $\left[\dfrac{2+\mathrm{i}}{8\mathrm{i}-(1-2\mathrm{i})}\right]^2$;

(4) $\mathrm{i}^3(1+5\mathrm{i})^2$;

(5) $(2+\mathrm{i})(13-\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$;

(6) $((5-\mathrm{i})^2-3)\mathrm{i}$.

2. 证明:若 $z_1z_2=0$,则必有 $z_1=0$ 或 $z_2=0$.

3. 证明:对任意复数 z,$\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)=-\mathrm{Im}\,z$.

4. 解方程:

(1) $\mathrm{i}z=6-5z\mathrm{i}$; (2) $\dfrac{1-z}{z}=1-5\mathrm{i}$; (3) $(2-\mathrm{i})z^2+6z=0$; (4) $z^2+25=0$.

5. 设 z 是复数且 $\mathrm{Re}\,z>0$,证明 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)>0$.

6. 设 z 是复数且 $\mathrm{Im}\,z>0$,证明 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)<0$.

7. 设 z_1,z_2 都是复数,且 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是负实数,证明 z_1 和 z_2 都是实数.

8. 证明:平面上直线方程可以写成

$$a\bar{z}+\bar{a}z=c,$$

其中 a 是非零复常数，c 是实数.

9. 证明：

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{j=1}^{n} z_j\Big)=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} z_j,$$

$$\mathrm{Im}\Big(\sum_{j=1}^{n} z_j\Big)=\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n} z_j.$$

10. 设 n 是正整数，证明复数的双线性公式

$$(z_1+z_2)^n=z_1^n+\binom{n}{1}z_1^{n-1}z_2+\cdots+\binom{n}{k}z_1^{n-k}z_2^k+\cdots+z_2^n,$$

其中 $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

11. 证明：点 $1,-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是一个等边三角形的三个顶点.

12. 证明：点 $3+\mathrm{i},6$ 和 $4+4\mathrm{i}$ 是直角三角形的顶点.

13. 在平面上描述满足下面方程的点的集合.

(1) $\mathrm{Im}\, z=-2$;

(2) $1<|z-1+\mathrm{i}|<3$;

(3) $|z-2|=\mathrm{Re}\, z+2$;

(4) $|z-1|+|z+1|=7$;

(5) $\mathrm{Re}\, z\geqslant -3$;

(6) $-2<\mathrm{Im}\, z<4$.

14. 证明：如果 $(\bar{z})^2=z^2$，则 z 是实数或纯虚数.

15. 求复数 $w=\dfrac{1+z}{1-z}(z\neq 1)$ 的实部、虚部和模.

16. 若 $|a|<1,|b|<1$，证明：

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1.$$

17. 若 $|z|=1$，证明：

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1.$$

18. 若 $z=x+\mathrm{i}y$，证明：

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

19. 证明：如果 $|z|=1(z\neq 1)$，则 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)=\dfrac{1}{2}$.

20. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实常数，z_0 是多项式方程

$$z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

的一个根，证明$\overline{z_0}$也是该方程的根.

21. 证明：点 z 关于直线 $ax+by=c$(a,b,c 都是实数)的对称点是

$$\frac{2\mathrm{i}c+(b-a\mathrm{i})\overline{z}}{b+a\mathrm{i}}.$$

22. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 复矩阵. $\boldsymbol{B}^*$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的共轭转置矩阵. 换句话说，如果 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，则 $\boldsymbol{B}^*=[\overline{b}_{ji}]$. 对任意的复矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，证明：

(1) 如果对任意 $n\times 1$ 的复列向量 $\boldsymbol{u}$，都有 $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=0$，证明 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵(即对所有的 $i,j,a_{ij}=0$).

(2) 如果(1)只对实列向量成立，举例说明结论($\boldsymbol{A}$ 是零矩阵)是不成立的.

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 的复矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特(Hermite)矩阵.

(1) 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵，则对任意 $n\times 1$ 的复列向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 是实数.

(2) 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是任意的 $n\times m$ 的复矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵.

(3) 证明：如果 $\boldsymbol{B}$ 是任意的 $n\times n$ 的复矩阵，$\boldsymbol{u}$ 是任意的 $n\times 1$ 的复列向量，则 $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ 是非负实数.

§1.2 复数的向量表示与极坐标表示

对复平面上任意一个点 z，连接原点和 z 可得到一个有向线段，称其为由复数 z 决定的向量，简称为向量 z. 向量由其长度和方向所决定，向量在平移变换下保持不变. 例如由 $1+\mathrm{i}$ 决定的向量和以点 $2+\mathrm{i}$ 为起点，以点 $3+2\mathrm{i}$ 为终点的向量是一样的，如图 1.3. 由点 z 决定的向量的长度为$|z|$.

设$\boldsymbol{v}_1$ 和$\boldsymbol{v}_2$ 分别是由点 z_1 和 z_2 决定的向量. 由平行四边形法则得到向量的和$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$(见图 1.4). 若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$. 则图 1.4 中向量$\boldsymbol{v}$ 的终

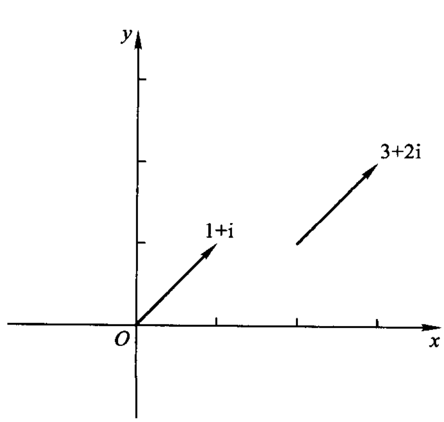

图 1.3

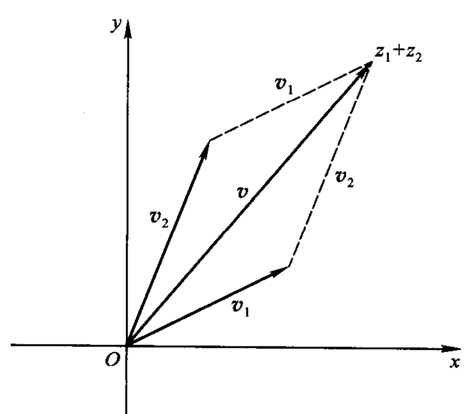

图 1.4

点坐标为(x_1+x_2,y_1+y_2)，即向量$\boldsymbol{v}$对应于点z_1+z_2. 因此复数加法和平面上的向量加法是一致的.

关于复数的长度有下面的三角不等式.

三角不等式 对任意两个复数z_1和z_2都有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$

即三角形两边之和大于或等于第三边. 同时有另一个三角不等式

$$|z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|,$$

或

$$|z_2|\leqslant|z_1|+|z_2-z_1|.$$

即三角形两边之差小于或等于第三边.

例 1.7 设z_1,z_2和z_3为不同的三点，证明此三点共线当且仅当存在实数c，满足$z_3-z_2=c(z_2-z_1)$.

证明 两个向量平行当且仅当其中一个是另一个与一个实数的乘积. 用复数来描述就是，z与w平行当且仅当$z=cw$，其中c是实数. 从图 1.5 可以看到，z_1,z_2和z_3三点共线当且仅当向量z_3-z_2与向量z_2-z_1平行，因此结论成立. □

复平面上的点$z=x+\mathrm{i}y$也可以用极坐标(r,θ)表示为

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,$$

即r是z的模，$r=|z|$. θ表示向量z的倾角，是从正实轴沿着逆时针方向度量的(见图 1.6). 称θ是向量z的辐角. 显然，辐角θ不是唯一的. 用$\operatorname{Arg} z$表示向量z的辐角，$\operatorname{Arg} z$是一个多值函数. 如果θ_0是辐角$\operatorname{Arg} z$的一个值，则$\operatorname{Arg} z=\theta_0+2k\pi\quad(k$为任意整数$)$给出了$z$的全部辐角. 例如，辐角$\operatorname{Arg}\mathrm{i}$的所有值为

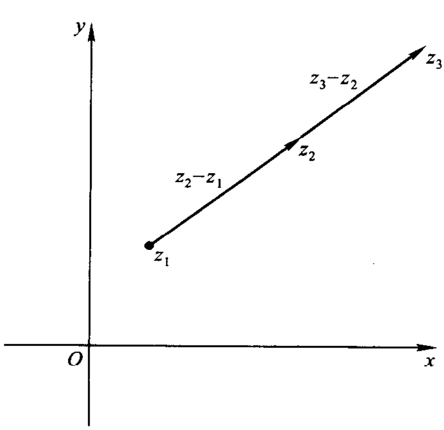

图 1.5

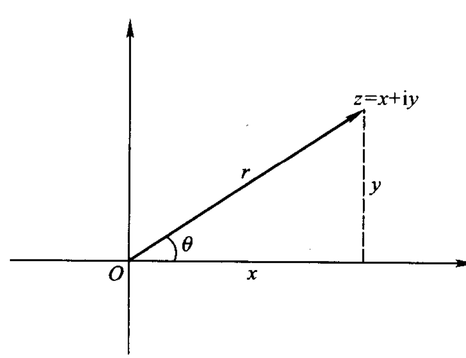

图 1.6

$$\mathrm{Arg}\, \mathrm{i}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

任意长度为 2π 的半开区间都包括辐角 $\mathrm{Arg}\, z$ 的一个值且只有一个值，称这样的区间上的函数为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的一个分支. 区间 $(-\pi,+\pi]$ 称为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主分支，记为 $\arg z$. $\arg z$ 在负实轴处是不连续的且有 2π 的跳跃. 将负实轴这样的直线称为支割线. $\mathrm{Arg}\, z$ 的任意一个分支必定在某处有 2π 的跳跃. 用记号 $\mathrm{Arg}_\tau z$ 表示取值在 $(\tau,\tau+2\pi]$ 上 $\mathrm{Arg}\, z$ 的一个分支. 因此 $\mathrm{Arg}_{-\pi} z$ 即辐角主值 $\arg z$.

有了上面的约定，则 $z=x+\mathrm{i}y$ 的极坐标表示为

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \tag{1.5}$$

其中 θ 是复数 z 的辐角.

再利用欧拉(Euler)公式：$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，我们又可以得到

$$z=re^{\mathrm{i}\theta},$$

这种表示成为复数的指数表示法.

例 1.8 求 $\mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解 $r=|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=2$，方程组 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 和 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 有解 $\theta=\frac{\pi}{3}$，因此 $\mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 特别地，$\arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}$. □

若

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1), \quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)],$$

所以

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

从而得到

$$\mathrm{Arg}\, z_1z_2=\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2. \tag{1.6}$$

由此得到复数乘法的几何解释：向量 z_1z_2 的长度与辐角分别等于向量 z_1，z_2 的长度之积和辐角之和(见图 1.7).

由于除法运算是乘法运算的逆运算，立即可得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

因此

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\, z_1-\mathrm{Arg}\, z_2, \tag{1.7}$$

复数除法的几何解释是向量 $\frac{z_1}{z_2}$ 的长度与辐角分别等于向量 z_1，z_2 的长度之

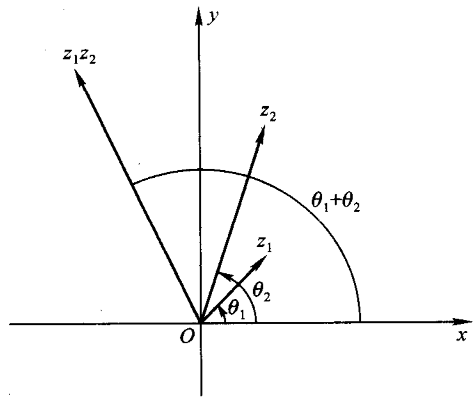

图 1.7

商和辐角之差.

由公式(1.6)和(1.7),立即得到

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k_1\pi, \tag{1.8}$$

k_1 是某个整数.

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k_2\pi, \tag{1.9}$$

k_2 是某个整数.

例 1.9 写出$\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$的极坐标形式.

解 由于 $1+\mathrm{i}$ 和$(\sqrt{3}-\mathrm{i})$的极坐标形式分别是

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

和

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right).$$

因此有

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

□

例 1.10 证明:过点 z_1 和 z_2 的直线 l 垂直于过点 z_3 和 z_4 的直线 L 当且仅当

$$\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=\pm\frac{\pi}{2}.$$

证明 注意直线 l 和 L 垂直的充要条件是向量 z_1-z_2 与 z_3-z_4 垂直. 即向

量 z_1-z_2 旋转$\frac{\pi}{2}$或$-\frac{\pi}{2}$即得向量 z_3-z_4，因此

$$z_1-z_2=(z_3-z_4)\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{2}},$$

即

$$\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=\pm\frac{\pi}{2}.$$

□

例 1.11 证明：三角形内角和等于 π.

证明 设三角形的三个顶点分别为 z_1,z_2,z_3，对应的三个顶角分别为 α,β,γ. 于是

$$\alpha=\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1},\quad \beta=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2},\quad \gamma=\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}.$$

由于

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=-1,$$

根据公式(1.8)得到

$$\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}+\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}+\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\arg(-1)+2k\pi,$$

其中 k 是某个整数. 由于 $0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi, 0<\gamma<\pi$，所以

$$0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi,$$

故必有 $k=0$，即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. □

练习 1.2

1. 证明复平面上三点 $a+b\mathrm{i}, 0, \dfrac{1}{-a+b\mathrm{i}}$ 共线.

2. 设 $z_1=2-\mathrm{i}$ 和 $z_2=1+\mathrm{i}$，运用平行四边形法则做出下面的向量.

(1) z_1+z_2； (2) z_1-z_2； (3) $3z_1-2z_2$.

3. 计算

(1) $\left|\dfrac{2+\mathrm{i}}{-1-2\mathrm{i}}\right|$； (2) $|\overline{(1+\mathrm{i})}(2+3\mathrm{i})(3\mathrm{i}-4)|$； (3) $\left|\dfrac{\mathrm{i}(2-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^2}\right|$；

(4) $\left|\dfrac{(\pi-\mathrm{i})^{50}}{(\pi+\mathrm{i})^{50}}\right|$.

4. 求出下面复数的辐角和极坐标形式.

(1) $-3+3\mathrm{i}$； (2) $-\pi\mathrm{i}$； (3) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$； (4) $(1-\mathrm{i})(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$；

(5) $\dfrac{-\sqrt{7}(1+\mathrm{i})}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

5. 用几何方法证明非零复数 z_1 和 z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ 的充要条件是它们具有相同的辐角.