

普通高等教育基础课规划教材

大学物理 学习指导

DAXUE WULI XUEXI ZHIDAO

◎ 李德钊 金东星 编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



本书是参照教育部(原国家教委)颁布的《理工科非物理类本科大学物理课程教学基本要求》编写的。本书共分6篇,即力学基础、机械振动和机械波、热学基础、电磁学、波动光学和近代物理基础,计18章。每章包含学习的基本要求、重点和难点、内容小结、问题讨论、解题指导和示例几部分。每一篇内容之后还提供了具有一定深度和广度的自测试题,便于读者进行自我检查。

本书是普通高等院校理、工、医、农各专业及电大、职大、函大、自学考试各类学生学习大学物理的极好参考书,同时,对从事大学物理教学的青年教师、以及报考非物理专业研究生的考生都具有较高的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导/李德钊,金东星编. —北京:机械工业出版社, 2007.5
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978 - 7 - 111 - 21463 - 2

I. 大… II. ①李…②金… III. 物理学 - 高等学校 - 教学参考资料 IV. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 066488 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑:李永联 版式设计:张世琴 责任校对:程俊巧
封面设计:马精明 责任印制:洪汉军
北京京丰印刷厂印刷
2007 年 7 月第 1 版 · 第 1 次印刷
169mm × 239mm · 14 印张 · 541 千字
标准书号:ISBN 978 - 7 - 111 - 21463 - 2
定价:29.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
销售服务热线电话(010) 68326294
购书热线电话:(010) 88379639 88379641 88379643
编辑热线电话:(010) 88379711
封面无防伪标均为盗版

前 言

大学物理是理工院校各有关专业的一门重要的基础课，它对于学生素质的提高、知识结构的形成、智能训练和能力培养诸方面都起着重要的作用。对于刚进入大学的低年级学生来说，由于学习难度增大，教学进度较快，往往会遇到许多困难，例如对物理概念的深入理解、应用高等数学知识解决物理问题、提高综合分析问题的能力、适应规范化解题要求、改进学习方法等诸多方面，一时难以适应。为了帮助学生加深对基本概念和基本规律的理解，加强对解题思路和解题方法的指导，使学生从中逐步领悟并学会分析问题和解决问题的方法，熟悉题目的类型，掌握解题的基本步骤，开阔思路，进而掌握学习的主动性，我们在总结多年来教学经验的基础上，按照教学大纲的要求，编写了《大学物理学习指导》一书，作为学习大学物理课程的辅助教材。

本书每一章均包括学习的基本要求、重点和难点、内容小结、问题讨论以及解题指导和示例几部分内容。在每一篇的内容之后，均提供了具有一定深度和广度的自测试题，便于读者掌握情况进行自我检查，另外还结合具体要求提供几份模拟试题供大家参考。

本书的第1、2、3、4、5、6、7、8、9章由李德钊执笔，第10、11、12、13、14、15、16、17、18章由金东星执笔。全书在编写过程中得到了南京理工大学有关领导和应用物理系广大教师的支持和帮助，在此表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，错误和不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

写在解题之前

许多科学大师都曾津津乐道于他们早年在解习题中的受益。虽然做习题本身不是科学研究，但它对研究能力的培养有着重要的作用。索末菲曾写信给他的学生海森堡，告诫他：“要勤奋地去做练习，只有这样，你才会发现，哪些你理解，哪些你还没有理解。”

物理理论来源于实践，而解答物理习题则是理论联系实际的主要手段之一。生产实践、科学实验和日常生活中存在的许多物理现象，经过模拟、简化、抽象为物理习题。于是，解答物理习题是学习物理的重要环节，是一种带有创造性的脑力劳动。通过解题，可以巩固、加深和扩大所学的理论，可以培养逻辑思维和综合思考的能力，以及分析和解决问题的能力，还可以帮助我们牢固、系统地掌握有关科学知识。所以，解题不仅仅是为了求得一个正确的答案。

每一个学习物理的人都希望自己能成为一个高明的解题者，怎样才能把美好的愿望变为现实呢？依靠题海战术是不行的，必须不断地探索、概括，从而掌握解题的规律，这样才能达到目的。为了尽快实现这一愿望，解题时应遵从下列步骤：

(1) 弄清题意：认真阅读题目，找出已知条件、隐含条件和待求的量。借助草图，将题意形象化，对于理解题意有很大的帮助。如果题意还未看懂，就想动手解题，那只能是瞎碰，这种用不科学的态度来学习科学知识的不良习惯必须坚决克服。

(2) 确定适用题意的定律：这是解题的关键，也是最费脑筋的一步，同学们往往感到物理题难做，主要就是难在这一步。怎样才能顺利通过这一关呢？靠的就是综合分析能力。分析是把某一复杂事物分解成若干成分逐个认识，而综合则是把某一复杂事物的若干部分，根据它们之间的联系综合在一起，从而认识事物的整体。分析为综合提供基础，综合又为深入地分析创造条件，两者相辅相成。通过分析和综合的逻辑思维活动，就可以找出解题的正确途径和相应的物理规律，从而迅速提高自己的解题能力。

(3) 列出方程：根据分析和综合的结果，建立相应的方程。在列方程过程中，要注意公式的成立条件，如果条件不符合，该公式就不能应用。

(4) 求解方程：列出方程后，先求文字解，再以同一单位制的数字代入运算，得出答案。这样处理可以减少中间运算环节，减少出错的可能性，省时省力。

(4) 求解方程：列出方程后，先求文字解，再以同一单位制的数字代入运算，得出答案。这样处理可以减少中间运算环节，减少出错的可能性，省时省力。

(5) 检查讨论：这是十分重要的，但也是往往易被同学们忽略的一步。面对结果，应该想一想，所求的未知量与哪几个物理量有关？什么关系？如果某一物理量发生变化以致取特殊值时，会得到什么结果？等等。这样就可以把一道习题推广和加深，演变成许多有关的习题，既能巩固、深化理论，又能培养举一反三的能力。只要坚持下去，就一定会有很大的收获。

(6) 解题的规范化格式：

$\left\{ \begin{array}{l} \text{已知：……} \\ \text{求：……} \end{array} \right\}$ 或用抄题代替

解：……

答：……或用讨论、问题分析代替。

(7) 作题后，还应该想一想，为什么要出这一道题？是着重理论上的掌握，还是为了扩大学习掌握解题的方法和技巧，或者两者兼而有之？这种对习题的深入思考，坚持下去，量变就会导致质变，就会产生飞跃，从而使自己上升到更高层次去认识和理解物理规律及其深刻含义，对培养科学的思维方法，提高综合分析问题和解决问题的能力可起到事半功倍的效果。

目 录

前言

写在解题之前

第1篇 力学基础

第1章 质点力学基础 1

1.1 内容小结 1

1.2 问题讨论 4

1.3 解题指导和示例 6

第2章 质点力学中的守恒

定律 24

2.1 内容小结 24

2.2 问题讨论 27

2.3 解题指导和示例 30

第3章 刚体的转动 45

3.1 内容小结 45

3.2 问题讨论 49

3.3 解题指导和示例 51

自测试题 (I) 62

第2篇 机械振动和机械波

第4章 机械振动 67

4.1 内容小结 67

4.2 问题讨论 72

4.3 解题指导和示例 75

第5章 机械波 93

5.1 内容小结 93

5.2 问题讨论 98

5.3 解题指导和示例 101

自测试题 (II) 114

第3篇 热 学

第6章 气体动理学理论 118

6.1 内容小结 118

6.2 问题讨论 123

6.3 解题指导和示例 125

第7章 热力学基础 136

7.1 内容小结 136

7.2 问题讨论 140

7.3 解题指导和示例 141

自测试题 (III) 153

第4篇 电 磁 学

第8章 真空中的静电场 158

8.1 内容小结 158

8.2 问题讨论 160

8.3 解题指导和示例 164

第9章 静电场中的导体和

电介质 178

9.1 内容小结 178

9.2 问题讨论 181

9.3 解题指导和示例 182

自测试题 (IV) 193

模拟试题 199

模拟试题 (I) 199

模拟试题 (II) 203

模拟试题 (III) 207

模拟试题 (IV) 210

第10章 稳恒电流的磁场 213

10.1 内容小结 213

10.2 问题讨论 216

10.3 解题指导和示例 217

第11章 电磁感应 234

11.1 内容小结 234

11.2 问题讨论 237

11.2 问题讨论	237	18.1 内容小结	357
11.3 解题指导和示例	238	18.2 问题讨论	362
第 12 章 电磁场与电磁波		18.3 解题指导和示例	364
.....	256	自测试题 (VII)	371
12.1 内容小结	256	大学物理试题样卷	374
12.2 问题讨论	259	大学物理试题样卷一	374
12.3 解题指导和示例	261	大学物理试题样卷二	377
自测试题 (V)	265	大学物理试题样卷三	380
第 5 篇 波动光学		大学物理试题样卷四	384
第 13 章 光的干涉	274	附录	387
13.1 内容小结	274	附录 A 常用物理量基本常数表	387
13.2 问题讨论	280		387
13.3 解题指导和示例	283	附录 B 希腊字母表	388
第 14 章 光的衍射	294	参考答案	389
14.1 内容小结	294	自测试题参考答案	389
14.2 问题讨论	299	自测试题 (I) 参考答案	389
14.3 解题指导和示例	304	自测试题 (II) 参考答案	393
第 15 章 光的偏振	314	自测试题 (III) 参考答案	396
15.1 内容小结	314	自测试题 (IV) 参考答案	401
15.2 问题讨论	319	自测试题 (V) 参考答案	408
15.3 解题指导和示例	321	自测试题 (VI) 参考答案	412
自测试题 (VI)	329	自测试题 (VII) 参考答案	415
第 6 篇 近代物理基础		模拟试题参考答案	418
第 16 章 狭义相对论基础		模拟试题 (I) 参考答案	418
.....	335	模拟试题 (II) 参考答案	420
16.1 内容小结	335	模拟试题 (III) 参考答案	424
16.2 问题讨论	339	模拟试题 (IV) 参考答案	426
16.3 解题指导和示例	341	大学物理试题样卷参考答案	430
第 17 章 量子光学基础	348	大学物理试题样卷一参考答案	430
17.1 内容小结	348		430
17.2 问题讨论	351	大学物理试题样卷二参考答案	432
17.3 解题指导和示例	352		432
第 18 章 原子的量子理论		大学物理试题样卷三参考答案	434
.....	357		434
		大学物理试题样卷四参考答案	436
			436

第1篇 力学基础

第1章 质点力学基础

本章要求

- (1) 掌握位置矢量、位移、速度、加速度和力等物理量的意义及相互关系。
- (2) 掌握牛顿三个运动定律的意义及其适用条件，掌握受力分析和隔离体解题方法。
- (3) 借助于笛卡儿坐标系能熟练地计算质点在平面内运动时的速度和加速度，能熟练地计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。
- (4) 正确理解机械运动的矢量性、瞬时性、叠加性和相对性。

本章的重点是对基本概念的理解和基本规律的掌握。

本章的难点是矢量性和相对性在具体问题中的应用以及利用高等数学方法来求解相应的物理规律。

1.1 内容小结

1.1.1 基本概念

1. 位置矢量（矢径） r

位置矢量是描写质点在某一时刻相对于坐标系的位置的物理量，是描写质点状态的第一个参量，它是矢量。在各个时刻，矢径的端点连接描绘出的曲线就是质点在这段时间内的运动轨迹。

2. 位移 Δr

$$\Delta r = r_B - r_A \quad (1-1)$$

位移是描写某段时间内相对于坐标原点位置变动的大小和方向的物理量，它是矢量。在一般情况下， $|\Delta r| \neq \Delta s$ ；在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限情况下， $dr = ds$ 。

在笛卡儿坐标系中

$$\Delta \mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} \quad (1-2)$$

位移具有相对性

$$\Delta \mathbf{r}_{AC} = \Delta \mathbf{r}_{AB} + \Delta \mathbf{r}_{BC} \quad (1-3)$$

式中, $\Delta \mathbf{r}_{AC}$ 表示质点 A 相对参考系 C 的位移; $\Delta \mathbf{r}_{AB}$ 表示质点 A 相对参考系 B 的位移; $\Delta \mathbf{r}_{BC}$ 表示参考系 B 相对参考系 C 的位移。

3. 速度

速度是描写质点运动快慢和方向的物理量。

$$(1) \text{ 平均速度 (矢量) } \bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-4)$$

$$(2) \text{ 平均速率 (标量) } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1-5)$$

$$(3) \text{ 瞬时速度 (矢量) } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-6)$$

$$(4) \text{ 瞬时速率 (标量) } v = \frac{ds}{dt} \quad (1-7)$$

平均速度的量值和平均速率是两个不同的概念。一般情况下, 它们是不相等的, 只有在沿直线单方向运动时, 它们才相等。而瞬时速度的量值和瞬时速率在任一时刻都是相等的。

(5) 相对速度

$$\mathbf{v}_{AC} = \mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BC} \quad (1-8)$$

式中, $\mathbf{v}_{AC}$ 表示质点 A 相对参考系 C 的速度; $\mathbf{v}_{AB}$ 表示质点 A 相对参考系 B 的速度; $\mathbf{v}_{BC}$ 表示参考系 B 相对参考系 C 的速度。

4. 加速度

加速度是描写质点运动速度变化快慢的物理量。

$$(1) \text{ 平均加速度 (矢量) } \bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1-9)$$

$$(2) \text{ 瞬时加速度 (矢量) } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1-10)$$

在笛卡儿坐标系中

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1-11)$$

在自然坐标系中

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = a_n \mathbf{n}_0 + a_t \mathbf{t}_0 \quad (1-12)$$

式中, $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ 为法向加速度; ρ 是曲率半径; $\mathbf{n}_0$ 是法线方向的单位矢量;

$a_t = \frac{dv}{dt}$ 为切向加速度; $\mathbf{t}_0$ 为切线方向的单位矢量。

(3) 相对加速度

$$\boldsymbol{a}_{AC} = \boldsymbol{a}_{AB} + \boldsymbol{a}_{BC} \quad (1-13)$$

式中, $\boldsymbol{a}_{AC}$ 表示质点 A 相对参考系 C 的加速度; $\boldsymbol{a}_{AB}$ 表示质点 A 相对参考系 B 的加速度; $\boldsymbol{a}_{BC}$ 表示参考系 B 相对参考系 C 的加速度。

5. 力的概念

力是物体间的相互作用, 力是矢量。

按照力的性质, 力可分为接触作用力和非接触作用力 (即场作用力)。弹性力、摩擦力和流体的粘滞阻力等是接触作用力; 而万有引力 (重力)、电磁力等是非接触作用力, 或者称为场力。

按照力做功的特点, 力又可分为保守力和非保守力。万有引力 (重力)、弹性力和静电力是保守力; 摩擦力、粘滞阻力和磁场力等是非保守力或称耗散力。

上述描写质点运动的几个基本物理量, 虽然它们的物理意义各不相同, 但它们都具有矢量性、瞬时性、相对性和叠加性。掌握了这一点, 可以加深对这几个物理量的理解。

1.1.2 基本规律

1. 运动的叠加原理

任何一个运动都可以看成由几个独立进行的运动叠加而成。

利用这一原理, 可以把复杂的运动分解成若干个简单的运动来处理。

2. 运动方程

反映质点位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 随时间 t 变化的关系式称为质点的运动方程。

矢量形式 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

笛卡儿坐标系中分量形式

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

对于匀变速直线运动为

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1-14)$$

若写成 $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ 形式, 则表示质点的位移。

3. 轨迹方程

从运动方程中消去时间参量 t , 则得到质点运动的轨迹方程。

$$f(x, y, z) = 0$$

4. 角量和线量的关系

$$v = R\omega \quad (1-15)$$

4 大学物理学习指导

$$a_t = R\alpha \quad (1-16)$$

$$a_n = R\omega^2 \quad (1-17)$$

5. 力的叠加原理

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (1-18)$$

6. 牛顿运动定律

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1-19)$$

在笛卡儿坐标系中

$$F_x = ma_x$$

$$F_y = ma_y$$

$$F_z = ma_z$$

在自然坐标系中

$$F_t = ma_t$$

$$F_n = ma_n$$

1.2 问题讨论

1.2.1 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \frac{dr}{dt}$

矢量在物理学中得到广泛的应用，但是矢量相对于时间的微商（如 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ）和矢量的模相对于时间的微商（如 $\frac{dr}{dt}$ ）之间的区别往往不容易被初学者所理解。下面通过人在岸边拉船靠岸的例子来加以说明。

一人站在离水面为 h 的岸边，以恒定速率 v_0 收绳拉船靠岸，船与岸边的水平距离为 x ，求船的速度。

小船速度的方向是沿水平面指向岸边，假定在 t 时刻小船位于 A 点，如图 1-1 所示，位置矢量为 $\mathbf{r}_A$ ，在 $(t + \Delta t)$ 时刻，小船运动到 B 点，位置矢量为 $\mathbf{r}_B$ 。于是，在 Δt 时间内小船的位移为

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

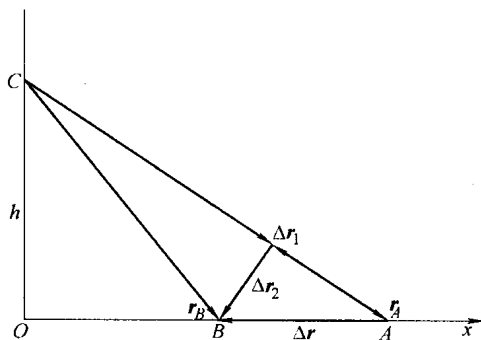


图 1-1

在 r_A 上截去大小等于 r_B 的矢量从而得到 Δr_1 ，再作 Δr_2 。由图 1-1 可知， Δr_1 表示由于位置矢量大小变化而引起的位移； Δr_2 表示由于位置矢量方向变化而引起的位移，于是有

$$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2$$

根据速度的定义式得

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_2}{\Delta t} \\ &= \frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt} = v_t + v_n \end{aligned}$$

而 $|v_t| = \frac{dr}{dt} = v_0$

由此可见，矢径对时间的微商包括矢径大小的变化 v_t 和矢径方向的变化 v_n 两项，而矢径的模对时间的微商只代表了矢径大小的变化，不包括矢径方向的变化，它们的区别是显然的。

1.2.2 在一般曲线运动中， $v \neq \frac{dr}{dt}$ 、 $a \neq \frac{dv}{dt}$

矢量运算比较麻烦，在解题时通常将矢量沿坐标轴分解为标量形式进行运算，如果对速度和加速度的矢量性理解不深就很容易出错。请看下面的例子。

已知某质点的运动方程为 $x=3t$ ， $y=t^2$ （长度单位为 m，时间单位为 s），求 $t=2s$ 时的速度和加速度的量值。运动方程是以分量的形式给出的，根据矢径与坐标的关系，得

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9t^2 + t^4}$$

于是

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \times \frac{18t + 4t^3}{\sqrt{9t^2 + t^4}} \approx 4.7 \text{ m/s} \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{18 + 12t^2}{\sqrt{9t^2 + t^4}} - \frac{1}{2} \times \frac{(18t + 4t^3)^2}{\sqrt{(9t^2 + t^4)^3}} \right] \\ &\approx 2.98 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

这个答案是错误的，因为速度是矢量，它是精确描述质点运动快慢和方向的。上述求解过程只考虑了质点位置改变快慢的大小，而没有考虑位置方向的变化。同样，加速度也是矢量，它描述了速度的大小和方向的变化，而上述求解过程只考虑了速度大小的变化而没有考虑速度方向的变化，所以得出了错误的结果。

正确解法为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = 3t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$$

$t = 2\text{s}$ 时,

$$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

所以

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \text{m/s} = 5 \text{m/s}$$

因为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 2\boldsymbol{j}$$

所以

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2 \text{m/s}^2$$

如果要求 $t = 2\text{s}$ 时的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 又该如何呢? 由 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j}$ 可知加速度的大小恒定, 且沿 y 轴正方向, 于是得出 $a_t = 2 \text{m/s}^2$, $a_n = 0$ 的结论。显然, 这又是错误的, 因为 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j}$ 是合加速度, 它与 a_t 和 a_n 的关系为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t = a_n \boldsymbol{n}_0 + a_t \boldsymbol{t}_0$$

由

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9 + 4t^2}$$

得

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{9 + 4t^2}}$$

$t = 2\text{s}$ 时,

$$a_t = 1.6 \text{m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2^2 - 1.6^2} \text{m/s}^2 = 1.2 \text{m/s}^2$$

想一想, 能否将 $t = 2\text{s}$ 代入 v 的表达式中, 然后再求 a_t ?

1.3 解题指导和示例

1.3.1 质点运动学问题的类型

1) 已知运动方程求速度、加速度。

解决这一类问题, 采用微分法。

2) 已知加速度和初始条件, 求速度和运动方程。

解决这一类问题, 采用积分法。

1.3.2 质点动力学问题的类型

1) 已知质点的质量及运动规律, 求其他物体施于该质点的作用力。

2) 已知质点的质量和其他物体施于某质点的作用力及初始条件, 求质点的运动规律。

3) 已知质点的部分运动情况和它所受到的部分作用力, 求质点运动的未知

部分和受力的未知方面。

1.3.3 解题步骤

1) 根据题意分析物理过程, 明确已知条件, 找出未知量和待求量。

2) 确定研究对象, 画出示意图和受力分析图。

3) 对每个运动物体列出运动方程矢量式。

4) 选取适当的坐标系, 将矢量方程分解为分量式, 然后求解方程, 求出文字解后再代入数据进行运算, 得出最后结果并给出单位, 必要时对结果进行讨论。

1.3.4 解题示例

例 1-1 一质点在 xOy 平面内运动, 运动方程的参数形式为 $x = 4t^2 - 2$, $y = 2t$, 其中 x 、 y 的单位为 m , t 的单位为 s 。求:

(1) $t_1 = 1s$, $t_2 = 2s$ 时刻质点的位置;

(2) 质点在第 $2s$ 内的位移及平均速度;

(3) 质点在第 $2s$ 内的平均加速度;

(4) 质点在第 $2s$ 末的瞬时加速度;

(5) 什么时刻质点的位置矢量和速度矢量垂直? 并求此时刻的位置矢量和速度矢量。

解 (1) 质点运动方程的矢量形式为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (4t^2 - 2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

所以 $t_1 = 1s$ 时, $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$t_2 = 2s$ 时, $\mathbf{r}_2 = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

(2) 第 $2s$ 内的位移和平均速度分别为

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 12\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{12\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{2 - 1} = 12\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

(3) 因为 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 8t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

所以 $t = 1s$ 时, $\mathbf{v}_1 = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$t = 2s$ 时, $\mathbf{v}_2 = 16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

于是

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{2 - 1} = 8\mathbf{i}$$

(4) 因为 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

所以 $a = 8i$

(5) 根据矢量代数知识, 当 $r \cdot v = 0$ 时, 位置矢量和速度矢量垂直。即

$$[(4t^2 - 2)i + 2tj] \cdot [8ti + 2j] = 0$$

整理得 $32t^3 - 12t = 0$

所以 $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{\frac{3}{8}}s$, $t_3 = -\sqrt{\frac{3}{8}}s$ (舍去)

当 $t_1 = 0$ 时, $r_1 = -2j$

$$v_1 = 2j$$

$t_2 = \sqrt{\frac{3}{8}}s$ 时, $r_2 = -0.5i + 1.22j$

$$v = 4.9i + 2j$$

说明 上述解法运用了矢量代数的运算法则, 优点是简洁、明了。读者不妨采用各量沿 x 、 y 轴的分量形式求解, 并加以比较。

例 1-2 如图 1-2 所示, 跨过滑轮 C 的绳子, 一端挂有重物 B , 另一端 A 被人拉着沿水平方向匀速运动, 其速度为 $v_0 = 1 \text{ m/s}$ 。 A 点离地面的距离保持 $h = 1.5 \text{ m}$ 。运动开始时, 重物在地面上的 B_0 处, 绳 AC 在铅直位置, 滑轮离地面高度 $H = 10 \text{ m}$, 其半径忽略不计。求:

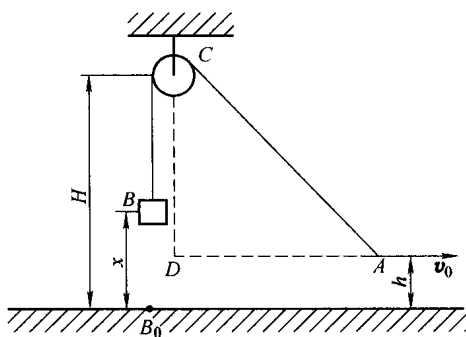


图 1-2

- (1) 重物 B 上升的运动方程;
- (2) 在 t 时刻的速度和加速度;
- (3) 重物 B 到达滑轮 C 处所需要的时间。

解 (1) 由题意可知, $t = 0$ 时, $AC = H - h$ 。设物体在某一时刻 t 离地面的高度为 x , 则在 t 时刻, $AC = H - h + x$ 。

由图 1-2 中 $\triangle ADC$ 可得

$$(H - h)^2 + (v_0 t)^2 = (H - h + x)^2$$

所以

$$x = \sqrt{(v_0 t)^2 + (H - h)^2} - (H - h)$$

即

$$x = \sqrt{t^2 + 8.5^2} - 8.5$$

(2)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 8.5^2}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 8.5^2}} - \frac{t^2}{\sqrt{(t^2 + 8.5^2)^3}}$$

(3) 物体 B 从地面到达滑轮处所需时间为 t , 则将 $x = H$ 代入运动方程得

$$H = \sqrt{t^2 + 8.5^2} - 8.5$$

即

$$10 = \sqrt{t^2 + 8.5^2} - 8.5$$

得

$$t = \sqrt{270}\text{s} \approx 16.4\text{s}$$

例 1-3 一人站在山坡上, 山坡与水平面成 α 角, 他扔出一个初速度为 v_0 的小石子, v_0 与水平面成 θ 角 (向上), 如图 1-3 所示。

(1) 如不计空气阻力, 试求小石子落在斜坡上的距离 s 。

(2) 当 θ 为多大值时, s 有最大值。

解 (1) 建立图 1-3 所示的 xOy 笛卡儿坐标系, 小石子的运动方程为

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \quad (1)$$

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

当小石子落在斜坡上时, 落地点坐标为

$$x = s \cos \alpha \quad (3)$$

$$y = -s \sin \alpha \quad (4)$$

由以上四式, 求出

$$\frac{v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}{v_0 \cos \theta \cdot t} = -\tan \alpha$$

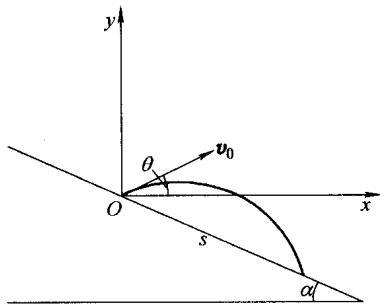


图 1-3

整理后得

$$t^2 - \frac{2v_0}{g} (\sin \theta + \tan \alpha \cos \theta) t = 0$$

于是, 求得石子落在斜坡上的时间为

$$t_1 = 0 \quad (\text{舍去})$$

$$t_2 = \frac{2v_0}{g} (\sin \theta + \cos \theta \tan \alpha)$$

$$= \frac{2v_0 \sin(\theta + \alpha)}{g \cos \alpha}$$

小石子落在斜坡上的距离

$$s = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{v_0 \cos \theta \cdot t}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin(\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

$$(2) \quad \frac{ds}{d\theta} = 0 \quad (\text{极值条件})$$

$$\begin{aligned}
 \text{即} \quad & \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha} [-\sin\theta\sin(\theta+\alpha) + \cos\theta\cos(\theta+\alpha)] \\
 &= \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha} \cos(2\theta+\alpha) = 0
 \end{aligned}$$

于是, 有

$$\cos(2\theta + \alpha) = 0$$

求得

$$2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

又在 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时, $\frac{d^2s}{d\theta^2} < 0$, 可知此时 s 有最大值, 可计算出

$$\begin{aligned}
 s_{\max} &= \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha} \cdot \frac{1}{2} \left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\alpha \right) \\
 &= \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha} (1 + \sin\alpha)
 \end{aligned}$$

例 1-4 一质点沿半径为 R 的圆周按照 $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$ 的规律运动, 式中 v_0 和 b 均为常数。求:

- (1) t 时刻质点的总加速度矢量;
- (2) t 为何值时, 总加速度在数值上等于 b ;
- (3) 到加速度为 b 时, 质点沿圆周运动了多少圈?

解 (1) 根据运动规律, 可知质点沿圆周作匀减速率的圆周运动, 建立自然坐标系, 如图 1-4 所示。于是, 切向速度和加速度的大小为

$$\begin{aligned}
 v_t &= \frac{ds}{dt} = v_0 - bt \\
 a_t &= \frac{dv_t}{dt} = -b
 \end{aligned}$$

法向加速度为

$$a_n = \frac{v_t^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

于是, 合加速度为

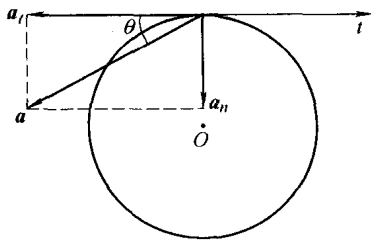


图 1-4