全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

王增辉　解顺强　主编

中国农业出版社

线性代数

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线 性 代 数

王增辉　解顺强　主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 /王增辉，解顺强主编. —北京：中国农业出版社，2007.2
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-10325-2

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①王…②解… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 021681 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑 朱 雷

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2007 年 2 月第 1 版　　2007 年 2 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16　　印张：10.5
字数：179 千字
定价：15.00 元

内 容 提 要

本书主要内容有：行列式、矩阵、n维向量的基本知识、线性方程组及其数值解法、矩阵的特征值与特征向量、二次型等，每节后面配有习题，书末附有习题参考答案。

本书内容丰富，讲解详细，通俗易懂，适合作为普通高等工科、农科和经济管理类等各专业线性代数课程的教材或参考书。

编写人员名单

主　编　王增辉　解顺强

副主编　赵　昕　郭亚军

参　编　张起飞　王　波　吕金凤

前　言

本教材是为普通高等学校非数学专业学生《线性代数》课程而编写的，在编写过程中充分参考了工科类、农林类和经管类《线性代数》教学大纲，由具有丰富经验的教师集体讨论编写而成，可作为高等农林院校各专业《线性代数》课程的教材或教学参考书。

本教材在内容安排上力求适合工科、农科、经管等各专业以及非数学类硕士研究生入学考试的需要。在编写时，我们按照循序渐进的原则，深入浅出。在引入概念时，尽可能从实际问题出发，在叙述上尽可能做到通俗易懂。对教材中的一些繁长的定理证明略去，而是增加一些适当例子予以说明，对一些重要的定理的证明加“*”号，以便根据实际情况处理。考虑到有些专业的需要，我们增加了线性方程组的数值解法一章，并加以“*”号可供选用。教材中每一节后都安排了难易适中、内容丰富的习题供学生选用，书末附习题参考答案。本教材的基本内容（“*”号除外）可在36学时左右讲授完毕。

参加本教材编写工作的有：吉林农业大学王增辉、赵昕、张起飞、王波（第一章、第二章、第三章、第五章），河北科技师范学院解顺强、郭亚军、吕金凤（第四章、第六章、第七章），全书由王增辉统稿。

在本教材的编写过程中得到了吉林农业大学教务处和河北科技师范学院教务处的大力支持，也得到了吉林农业大学安希忠教授的热情指导和帮助，作者所在学校的部分同仁也给予了许多帮助。吉林农业大学徐兴梅老师在文字排版中做了大量工作，作者在此一并致谢！

由于编者的水平有限，再加上时间较仓促，书中难免有不妥和错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2006年12月

目　录

第一章　行列式

行列式在线性代数中是一个重要的概念，也是一个有用的工具，在科学技术领域有着广泛的应用．本章从二元一次线性方程组和三元一次线性方程组出发，引入二阶行列式和三阶行列式的定义，进而归纳给出 n 阶行列式的定义，然后介绍行列式的性质，最后介绍克莱姆法则．

第一节　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

在初等代数中，曾学过用消元法求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

这里 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}，b_1，b_2 为常数，x_1，x_2 为未知数，为消去方程组（1）中未知数，用 a_{22}，a_{12}分别乘方程组中的第一个方程与第二个方程得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}, \end{cases}$$

然后两式相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组（1）有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

（2）式是解二元一次线性方程组的公式，我们看到（2）式并不容易记住，但细心观察会发现（2）式的分母相同且都是由方程组（1）中未知数的系数构成，我们将这四个系数按照它们在方程（1）中原来的位置排成两行两列，并

在两侧各加一竖线表示（2）式分母这个数，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

若将 a_{11}、a_{22} 两个数构成的对角线叫主对角线，将 a_{12}，a_{21} 构成的对角线叫副对角线，那么（3）式右端恰是（3）式左端主对角线两个数乘积减去副对角线两个数的乘积，我们称（3）式为二阶行列式．其中左端是行列式的记号，右端是行列式的值，数 $a_{ij}(i, j=1,2)$ 叫行列式的元素．

按二阶行列式的定义，二元一次线性方程组的求解公式（2）可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

简记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则（4）可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{5}$$

其中行列式 D 叫方程组的系数行列式，x_1 的分子 D_1 是用常系数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得到的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得到的二阶行列式．

例 1 求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

解 计算行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3.$$

由（5）式得方程组的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{1} = 0, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{1} = 3.$$

二、三阶行列式

首先来讨论三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{6}$$

的求解问题.

为了求解方程组（6），我们分别用（$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$）乘第一个方程，用（$a_{12}a_{32}-a_{13}a_{22}$）乘第二个方程，用（$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$）乘第 3 个方程，再把所得的三个式子相加，可消去 x_2，x_3，

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，可解出 x_1 为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

同理可解出 x_2，x_3 的表达式

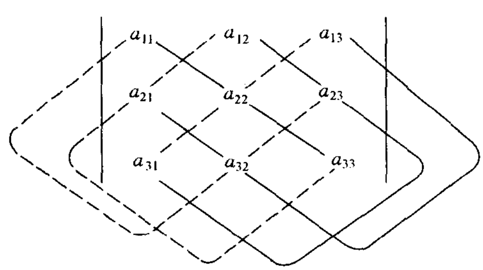
$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{33}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

为了简单地表出这个方程组的解，我们引进三阶行列式的概念. 规定三阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由定义可以看出，一个三阶行列式是由不同行不同列的三个数相乘得到的 6 项的代数和，这些项前面所带的正负号可以从下图看出，凡是实线上 3 个元素相乘所得到的项的前面带正号；虚线上 3 个元素相乘所得到的项的前面带负号.



若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则由三阶行列式定义知方程组（6）的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{7}$$

称 D 为方程组（6）的系数行列式.

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 按三阶行列式定义得

$$\begin{aligned} D &= 1\times 0\times(-1)+1\times 3\times 2+2\times(-1)\times 2-2\times 0\times 2- \\ &\quad 1\times 2\times 3-1\times(-1)\times(-1) \\ &= 0+6-4-0-6-1 \\ &= -5. \end{aligned}$$

例 3 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=5, \\ -x_1+x_2+x_3=2. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+2+1+1-1+2=6,\ D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=9,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=8,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=13,$$

由公式（7）得解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{4}{3},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{13}{6}.$$

例 4 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$

解 由三阶行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6=0.$$

可解出 $x=2$ 或 $x=3$.

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{vmatrix}$.

2. 解方程组 $\begin{cases}6x_1-5x_2=35,\\x_1+x_2=180.\end{cases}$

3. 解方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\3x_1+4x_2-2x_3=11,\\3x_1-2x_2+4x_3=11.\end{cases}$

4. 解方程 $\begin{vmatrix}1&3&3\\0&x&-2\\2&0&x\end{vmatrix}=0.$

5. 证明 $\begin{vmatrix}1&x&a^2+x^2\\1&y&a^2+y^2\\1&z&a^2+z^2\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x).$

第二节 n 阶行列式

为了定义 n 阶行列式，我们引进余子式和代数余子式的概念. 为此我们先来看二阶行列式与三阶行列式的关系.

由三阶行列式与二阶行列式的定义可得

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}. \quad (1)$$

从上式我们看到，三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘一个二阶行

列式的代数和.

下面以三阶行列式为例引入余子式、代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素 $a_{ij}(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$ 所在的第 i 行元素与第 j 列元素划掉，剩下的元素按原来位置不动所构成的二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如在三阶行列式 D 中，元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是在 D 中划掉第一行和第二列元素所构成的二阶行列式，即

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

有了余子式和代数余子式的概念，(1) 式可写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

这表明，三阶行列式的值等于它的第一行每个元素与它的代数余子式的乘积之和.

类似可以定义四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14} \quad (2)$$

其中 (2) 式右端的 A_{1j} $(j=1, 2, 3, 4)$ 是四阶行列式 D 中元素 a_{1j} $(j=1, 2, 3, 4)$ 的代数余子式. 例如

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$