◉高等学校教材

高等数学（下册）

段正敏　易正俊　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高 等 数 学

（下 册）

段正敏　易正俊　主编
杨　虎　　　　　主审

高等教育出版社

内容提要

本书以提高学生的数学素质，培养学生自我更新知识及创造性地应用数学知识解决实际问题的能力为宗旨。书中的定义和结论产生于对实际问题的调查研究，即从实际问题出发，导出一般结论，强调发散和归纳思维；突出数学基本思想，淡化各种运算技巧；突出应用和数学建模。

本书由上、下两册构成。上册内容包括：极限论，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用。下册内容包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。

本书可作为高等学校理工类各专业高等数学教材，也可用于学生自学。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/段正敏，易正俊主编．—北京：高等教育出版社，2007.12

ISBN 978-7-04-022565-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．①段…②易…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 177456 号

策划编辑　于丽娜　**责任编辑**　张耀明　**封面设计**　王凌波　**责任绘图**　朱　静
版式设计　张　岚　**责任校对**　刘　莉　**责任印制**　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007年12月1版
印　　张	23	**印　　次**	2007年12月第1次印刷
字　　数	430 000	**定　　价**	24.10元

物料号　22565-00

目 录

多元函数微分法及其应用

无穷级数

微分方程

习题答案

7 第七章 向量代数与空间解析几何

“数”与“形”是数学中的两大研究对象. 空间直角坐标系的引入沟通了代数与几何的联系，使得空间中的图形可以用构成它的点的坐标所满足的方程来讨论；而变量所满足的方程通过直角坐标系又有了明确的几何意义. 空间解析几何是以代数方法为主要研究工具的一门数学学科.

向量在数学和物理学中有着广泛的应用. 在空间解析几何中应用更是直接. 本章首先介绍向量及其代数运算，然后以向量为工具研究空间的直线与平面，最后讨论一般的空间曲面与曲线等.

第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念

在自然界中经常会遇到两种量，一种是只用一个实数就能表示的量，如年龄、身高、体温等，这种量称为数量；而另一种量却不是用一个实数就能表达的，例如速度、力、位移等等，这些量不仅有大小而且有方向. 既有大小又有方向的量称为**向量**.

向量可以用粗体英文字母表示，如，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$，也可用字母上加箭头来表示，如$\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$.

向量的几何表示法 由于向量既有大小又有方向，因此在几何上向量常用一条带有方向的线段(称为有向线段)来表示，如图 7－1. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点 M_2 为终点的向量记为$\overrightarrow{M_1M_2}$.

向量的大小叫做**向量的模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为 0 的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，方向不确定，或者说它的方向可以看作是任意的.

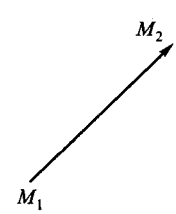

图 7－1

如果两个向量大小相等、方向相同，称这**两个向量相等**.

与起点位置无关的向量称为**自由向量**. 如无特别声明，今后讨论的向量都是自由向量.

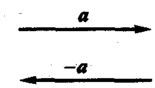

图 7-2

称与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等方向相反的向量为 **$\boldsymbol{a}$ 的负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$. 如图 7-2. 如果两个非零向量的方向相同或相反，称这**两个向量平行**，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何向量都平行. 如果将两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点就在一条直线上，因此，两向量平行又称**两向量共线**.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，平移向量 $\boldsymbol{b}$ 使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述做出两向量和的方法叫做向量加法的**三角形法则**，如图 7-3. 三角形法则的实际背景是：设一物体移动的位移为 $\boldsymbol{a}$，再移动位移 $\boldsymbol{b}$，其结果相当于直接移动位移 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因此，三角形法则的物理意义是位移的合成.

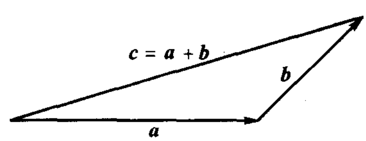

图 7-3

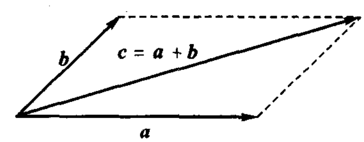

图 7-4

类似的也可以用平行四边形法则定义向量的加法：当非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，从公共起点到对角顶点的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 7-4).

若两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 在同一直线上（或者平行），则它们的和规定为

(1) 若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向，其和向量的方向就是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的共同方向，其模为 $\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{b}$ 的模之和.

(2) 若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 反向，其和向量的方向为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中较长的向量的方向，其模为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

平行四边形法则的实际背景可以看作力的合成或速度的合成.

2. 向量的减法

定义 2 规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{c}$ 为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

上式表明，把向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上，便得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(如图 7-5). 特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$a - a = a + (-a) = 0.$$

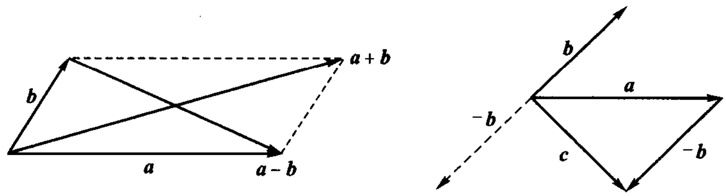

图 7－5

3. 数与向量的乘法(数乘)

定义 3 设 λ 是一个实数，$\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，那么向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模和方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda = 0$时，$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的. 特别地，当 $\lambda = \pm 1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

由此可知：两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$；或更一般的有两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$(其中 λ_1、λ_2 为实数且不同时为零).

定义 4 设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将它们平移使起点重合，这时两向量所在射线之间的夹角 $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，如图 7－6所示.

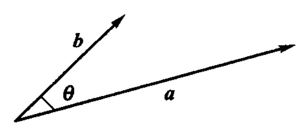

图 7－6

因为方向一致或相反的两向量平行，所以夹角为 0 或 π 的两个向量**平行**. 而夹角为$\dfrac{\pi}{2}$的两个向量叫作**垂直**.

4. 向量线性运算的性质

(1) 向量的加法满足下列运算规律：

交换律 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;

结合律$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n (n \geqslant 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n$，如图7－7是 5 个向量和的示意图，

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5.$$

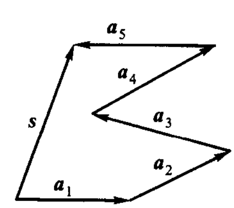

图 7－7

(2) 数与向量的乘法满足下列运算规律：

结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

利用向量与数的乘积任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 还可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,$$

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 由此得到

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}，\text{记为}\quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

该过程称为将非零**向量单位化.**

例 1　试用向量证明三角形的中位线定理：三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边长度的一半.

解　如图7-8，设 D 是 AB 的中点，E 是 AC 的中点，则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

因为$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC}$且$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

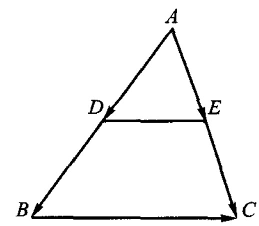

图 7-8

例 2　设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，求证：$A$、$B$、$D$ 三点共线.

证　由$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$$=(-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b})+8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AB},$$

知$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BD}$同向. 即$\angle ABD=\pi$，所以 A、B、D 三点共线.

例 3　证明向量 $\boldsymbol{c}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线的方向.

证　设 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$ 分别表示与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，则

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\ ,\ \boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

而以 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$ 为邻边的平行四边形为菱形，其对角线平分顶角，于是

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

这是与 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$ 夹角平分线平行之向量，又

$$\boldsymbol{c}=\frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\lambda\boldsymbol{d},$$

其中 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}>0$，故 $\boldsymbol{c}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线的方向.

5. 向量的投影

定义 5　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 u 轴，用 φ 表示它们之间的夹角(规定$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)，称

数量 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影，或者说 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴方向上的投影，记为

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi.$$

图 7－9 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影，即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB.$

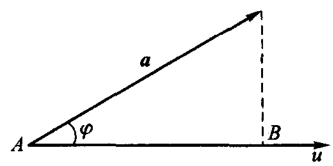

图 7－9

投影是个数量可正可负：当 $0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 时，投影为正，即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB>0$；当 $\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$ 时，投影为负，即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB<0$；当 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，投影为零，即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=0$（此时为一个点）.

可以证明：两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和.

此结论不难推广到 n 个向量的情况.

习题 7－1

1. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 只有满足什么条件时，向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 才能平分 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之间的夹角？

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，问应满足什么条件时，下列关系式成立：

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　（2）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　（4）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

3. 如图 7－10 所示，设已知立方体三边上的向量，而 A、B、C、D、E、F 为各边的中点，求证：$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$ 组成一个三角形.

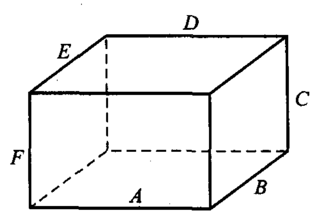

图 7－10

4. 在三角形 ABC 中，$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$|AB|=2$，求 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影.

5. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边 5 等分，设分点依次为 D_1，D_2，D_3，D_4，再把各分点与点 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

6. 用向量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

第二节　空间直角坐标系与向量的坐标表示

一、空间直角坐标系

空间直角坐标是确定点在空间位置的一种形式，它是依据空间的点与一组

有序的数组(x,y,z)之间存在一一对应关系而给出的.

在空间任意选定一点 O，过 O 点做三条相互垂直且具有相同单位长度的数轴，三条数轴的正向要符合右手规则，即右手握住 z 轴，大拇指指向 z 轴的正向，其余四个手指从 x 轴的正方向以$\frac{\pi}{2}$角度转向 y 轴的正方向，这就构成了**空间直角(右手)坐标系**，称点 O 为坐标原点，三条数轴依次记为 x 轴、y 轴、z 轴，统称为坐标轴. 由两条坐标轴所决定的平面称为**坐标面**，它们两两相互垂直，分别简称为 xOy 面、yOz 面、zOx 面. 三张坐标面把空间分为八个部分，每个部分称为**卦限**，分别用大写罗马数字Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ表示，如图 7－11 所示. 在 xOy 平面之上，yOz 平面之前，zOx 平面之右的卦限称为第Ⅰ卦限. 在 xOy 平面上方的其余三个卦限按逆时针方向依次称为第Ⅱ卦限、第Ⅲ卦限和第Ⅳ卦限. 在 xOy 平面下方的四个卦限，规定第Ⅴ卦限在第Ⅰ卦限之下，其余三个卦限也按逆时针方向依次称为第Ⅵ卦限、第Ⅶ卦限、第Ⅷ卦限.

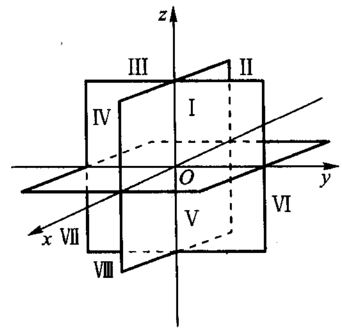

图 7－11

设 M 是空间任意一点，过 M 点分别作三张与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三张平面与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点分别为 P、Q、R(如图 7－12). 点 P、Q、R 在相应的坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间点 M 唯一确定了一个有序数组(x,y,z). 反之，对给定的有序数组(x,y,z)，若在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x、y、z 的点 P、Q、R，过点 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三张平面，这三张平面有且仅有唯一的交点 M，因而有序数组(x,y,z)唯一对应于空间一点 M. 这样，通过空间直角坐标系，空间点 M 与有序数组(x,y,z)之间就建立起了一一对应的关系. 有序数组(x,y,z)称为点 M 的**坐标**，并把点 M 记为 $M(x,y,z)$，其中第一个数 x 称为**横坐标**，第二个数 y 称为**纵坐标**，第三个数 z 称为**竖坐标**.

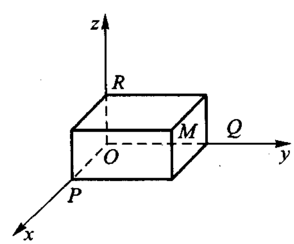

图 7－12

二、空间两点间的距离

我们知道在数轴上，$M_1(x_1)$、$M_2(x_2)$两点之间的距离为

$$|M_1M_2| = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

在平面上，$M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$两点之间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

从而我们可以证明在空间上任意两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离是(如图 7 - 13)：

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

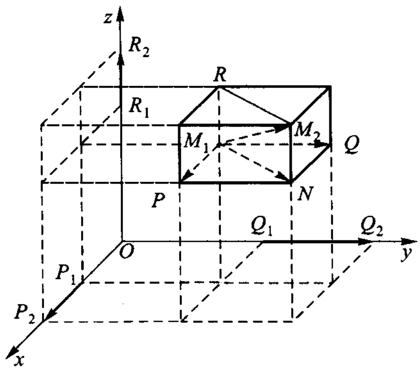

图 7 - 13

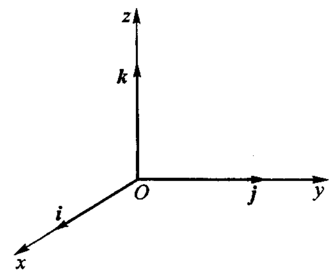

图 7 - 14

三、向量的坐标表示

为了用坐标表示向量，我们需要将向量放在空间直角坐标系中进行研究.

分别记与 x 轴，y 轴，z 轴正向相同的单位向量为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$(如图 7 - 14). 如果将向量的起点移到坐标原点，则这个向量就称为向径. 向径是由终点所唯一确定的. 反之，任给空间一点 M，也能唯一的确定一个向径，因此空间点 M 与向径之间构成一一对应关系. 设点 M 的坐标为 (x, y, z)，由向量的数乘知：向径 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$、$\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$、$\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$，如图 7 - 15 所示. 由向量的加法法则可知

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

从而

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

称上式为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的**坐标分解式**. 而表达式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 前面的系数 x，y，z 其实就是向量 $\overrightarrow{OM}$ 分别在三个坐标轴上的投影，也就是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的终点坐标，因而 (x, y, z) 称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的**坐标表示**. 从而 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$.

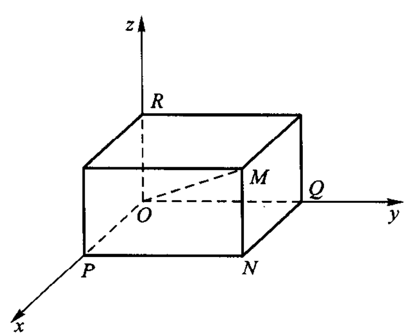

图 7 - 15

设 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{NM}$ 是一个起点为 $N(x_1, y_1,$