

◎ 高等学校教材

# 高等数学 (下册)

段正敏 易正俊 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

013/452

:2

2007

高等学校教材

# 高等数学

---

( 下 册 )

段正敏 易正俊 主编

杨 虎 主审

高等教育出版社

## 内容提要

本书以提高学生的数学素质,培养学生自我更新知识及创造性地应用数学知识解决实际问题的能力为宗旨。书中的定义和结论产生于对实际问题的调查研究,即从实际问题出发,导出一般结论,强调发散和归纳思维;突出数学基本思想,淡化各种运算技巧;突出应用和数学建模。

本书由上、下两册构成。上册内容包括:极限论,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用。下册内容包括:向量代数与空间解析几何,多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程。

本书可作为高等学校理工类各专业高等数学教材,也可用于学生自学。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/段正敏,易正俊主编. —北京:高等教育出版社,2007.12

ISBN 978-7-04-022565-5

I. 高… II. ①段…②易… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第177456号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 张耀明 封面设计 王凌波 责任绘图 朱静  
版式设计 张岚 责任校对 刘莉 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100011  
总机 010-58581000

经销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印刷 北京明月印务有限责任公司

开本 787×960 1/16  
印张 23  
字数 430 000

购书热线 010-58581118  
免费咨询 800-810-0598  
网址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版次 2007年12月1版  
印次 2007年12月第1次印刷  
定价 24.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 22565-00

# 目 录

## 第七章 向量代数与空间解析几何

1

第一节 向量及其线性运算	1
一、向量的概念	1
二、向量的线性运算	2
习题 7-1	5
第二节 空间直角坐标系与向量的坐标表示	5
一、空间直角坐标系	5
二、空间两点间的距离	6
三、向量的坐标表示	7
四、向量的模与方向余弦	8
习题 7-2	10
第三节 向量的乘法运算	10
一、向量的数量积	10
二、向量的向量积	12
三、向量的混合积	14
习题 7-3	16
第四节 平面与直线	16
一、平面及其方程	17
二、直线及其方程	20
习题 7-4	26
第五节 空间曲面与曲线	27
一、曲面方程的概念	27
二、柱面	28
三、旋转曲面	29
四、空间曲线及其方程	31
五、空间曲线在坐标面上的投影	32
习题 7-5	34
第六节 二次曲面	35

一、椭球面 .....	35
二、双曲面 .....	36
三、抛物面 .....	37
习题 7-6 .....	38
总习题七 .....	38

## 多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的基本概念 .....	40
一、平面点集 .....	40
二、多元函数的概念 .....	42
三、二元函数的图像 .....	43
四、多元函数的极限 .....	44
五、多元函数的连续性 .....	46
习题 8-1 .....	48
第二节 偏导数 .....	49
一、偏导数及其计算 .....	49
二、偏导数的几何意义 .....	52
三、高阶偏导数 .....	53
习题 8-2 .....	56
第三节 全微分 .....	57
一、全微分的概念 .....	57
二、全微分的应用 .....	63
习题 8-3 .....	64
第四节 复合函数的求导法则 .....	66
一、复合函数的链导法则 .....	66
二、全微分形式不变性 .....	71
习题 8-4 .....	72
第五节 隐函数的微分法 .....	74
一、一个方程确定的隐函数 .....	74
二、方程组确定的隐函数 .....	76
习题 8-5 .....	80
第六节 多元函数微分法在几何上的应用 .....	80
一、空间曲线的切线及法平面 .....	81
二、曲面的切平面及法线 .....	83

习题 8-6 .....	85
第七节 方向导数与梯度 .....	86
一、方向导数 .....	86
二、梯度 .....	89
习题 8-7 .....	91
第八节 多元函数的极值 .....	93
一、多元函数的极值 .....	93
二、多元函数的最大值与最小值 .....	96
三、条件极值 拉格朗日乘数法 .....	97
习题 8-8 .....	100
总习题八 .....	101

## 重积分

第一节 二重积分 .....	103
一、实例 .....	103
二、二重积分的定义及性质 .....	105
三、二重积分的计算 .....	108
四、二重积分的换元法 .....	122
习题 9-1 .....	124
第二节 三重积分 .....	127
一、实例 .....	128
二、三重积分的概念 .....	128
三、 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 $\Omega$ 上的三重积分的存在条件及性质 .....	129
四、三重积分的计算 .....	130
五、三重积分的换元法 .....	142
习题 9-2 .....	142
第三节 重积分的应用 .....	144
一、质点系的质心、转动惯量和引力 .....	144
二、平面薄片和空间物体的质心、转动惯量和引力 .....	145
习题 9-3 .....	149
总习题九 .....	150

## 曲线积分与曲面积分

第一节 第一型曲线积分 .....	152
-------------------	-----

一、实例 .....	152
二、第一型曲线积分的定义 .....	153
三、利用第一型曲线积分的定义求空间柱面的表面积 .....	154
四、第一型曲线积分的计算法 .....	155
习题 10-1 .....	161
第二节 第二型曲线积分 .....	162
一、第二型曲线积分的定义 .....	162
二、第二型曲线积分的计算法 .....	165
习题 10-2 .....	169
第三节 格林公式 .....	170
一、格林公式(Green 公式) .....	170
二、平面曲线的第二型曲线积分与路径无关的条件 .....	175
*三、格林公式导出的相关物理学中的概念及性质 .....	181
四、格林公式的另一种形式及其在物理上的应用 .....	184
习题 10-3 .....	185
第四节 第一型曲面积分 .....	187
一、实例 .....	187
二、第一型曲面积分的定义 .....	187
三、第一型曲面积分的计算法 .....	188
习题 10-4 .....	196
第五节 第二型曲面积分 .....	197
一、基本概念 .....	197
二、实例 .....	199
三、第二型曲面积分的定义 .....	200
四、第二型曲面积分的计算法 .....	202
习题 10-5 .....	207
第六节 高斯公式 .....	208
一、高斯公式(Gauss 公式) .....	208
二、散度的定义及其物理意义 .....	212
*三、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件 .....	214
习题 10-6 .....	215
第七节 斯托克斯公式 .....	216
一、斯托克斯定理(Stokes 定理) .....	216

二、旋度的定义及其物理意义	220
* 三、空间向量场的几个等价条件	222
习题 10-7	224
总习题十	224

## 无穷级数

第一节 数项级数	227
一、数项级数的基本概念	228
二、无穷级数的基本性质	229
习题 11-1	232
第二节 正项级数	233
习题 11-2	241
第三节 一般项级数	242
一、交错级数	242
二、级数的绝对收敛与条件收敛	244
* 三、绝对收敛级数的性质	246
习题 11-3	249
第四节 幂级数	250
一、函数项级数的概念	250
二、幂级数的基本概念	251
三、幂级数的运算	255
四、幂级数的性质	256
习题 11-4	259
第五节 函数展开成幂级数	260
一、泰勒级数	260
二、函数展开成幂级数	262
习题 11-5	265
第六节 函数幂级数展开式的应用	266
一、近似计算	266
二、欧拉公式	267
习题 11-6	268
第七节 傅里叶级数	268
一、三角级数	268
二、以 $2\pi$ 为周期的函数的傅里叶级数	270



三、奇偶函数的傅里叶级数 .....	274
四、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 .....	277
习题 11-7 .....	279
总习题十一 .....	280

## 微分方程

第一节 微分方程的基本概念 .....	282
习题 12-1 .....	285
第二节 可分离变量方程 .....	285
习题 12-2 .....	287
第三节 齐次方程 .....	288
一、齐次方程 .....	288
* 二、 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ 型微分方程的解法 .....	290
习题 12-3 .....	291
第四节 一阶线性微分方程 .....	292
一、线性方程 .....	292
二、伯努利方程 .....	294
习题 12-4 .....	296
第五节 全微分方程 .....	296
习题 12-5 .....	298
第六节 一阶微分方程应用和举例 .....	299
习题 12-6 .....	303
第七节 可降阶的高阶微分方程 .....	303
一、 $y''(x) = f(x)$ 型的微分方程 .....	304
二、 $F(x, y', y'') = 0$ 型的微分方程 .....	304
三、 $F(y, y', y'') = 0$ 型的微分方程 .....	306
* 四、恰当导数方程 .....	308
习题 12-7 .....	309
第八节 二阶线性方程 .....	309
一、二阶线性齐次方程解的结构 .....	310
二、二阶线性非齐次方程解的结构 .....	313
* 三、常数变易法求二阶线性非齐次方程的特解 .....	314
习题 12-8 .....	316

第九节 二阶常系数齐次线性方程解法 .....	316
习题 12-9 .....	320
第十节 二阶常系数线性非齐次方程解法 .....	320
一、 $f(x) = p_m(x)e^{\alpha x}$ 型 .....	321
二、 $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos \beta x + P_n(x)\sin \beta x]$ 型 .....	323
习题 12-10 .....	325
* 第十一节 欧拉方程 .....	326
习题 12-11 .....	327
* 第十二节 线性微分方程组 .....	327
习题 12-12 .....	330
第十三节 微分方程的幂级数解法 .....	331
习题 12-13 .....	332
总习题十二 .....	332

## 习题答案

# 7

## 第七章 向量代数与空间解析几何

“数”与“形”是数学中的两大研究对象. 空间直角坐标系的引入沟通了代数与几何的联系, 使得空间中的图形可以用构成它的点的坐标所满足的方程来讨论; 而变量所满足的方程通过直角坐标系又有了明确的几何意义. 空间解析几何是以代数方法为主要研究工具的一门数学学科.

向量在数学和物理学中有着广泛的应用. 在空间解析几何中应用更是直接. 本章首先介绍向量及其代数运算, 然后以向量为工具研究空间的直线与平面, 最后讨论一般的空间曲面与曲线等.

### 第一节 向量及其线性运算

#### 一、向量的概念

在自然界中经常会遇到两种量, 一种是只用一个实数就能表示的量, 如年龄、身高、体温等, 这种量称为数量; 而另一种量却不是用一个实数就能表达的, 例如速度、力、位移等等, 这些量不仅有大小而且有方向. 既有大小又有方向的量称为**向量**.

向量可以用粗体英文字母表示, 如  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{F}$ , 也可用字母上加箭头来表示, 如  $\vec{a}$ 、 $\vec{r}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{F}$ .

向量的几何表示法由于向量既有大小又有方向, 因此在几何上向量常用一条带有方向的线段(称为有向线段)来表示, 如图 7-1. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以  $M_1$  为起点  $M_2$  为终点的向量记为  $\overrightarrow{M_1M_2}$ .

向量的大小叫做**向量的模**, 记为  $|\mathbf{a}|$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ . 模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为 0 的向量称为**零向量**, 记作  $\mathbf{0}$  或  $\vec{0}$ . 零向量的起点与终点重合, 方向不确定, 或者说它的方向可以看作是任意的.

如果两个向量大小相等、方向相同, 称这两个**向量相等**.

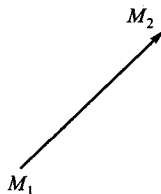
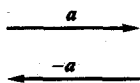


图 7-1

与起点位置无关的向量称为**自由向量**。如无特别声明，今后讨论的向量都是自由向量。



称与向量  $a$  大小相等方向相反的向量为  $a$  的**负向量**，记为  $-a$ 。如图 7-2。如果两个非零向量的方向相同或相反，称这两个向量**平行**，记为  $a \parallel b$ 。规定零向量与任何向量都平行。如果将两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点就在一条直线上，因此，两向量平行又称两向量**共线**。

图 7-2

## 二、向量的线性运算

### 1. 向量的加法

**定义 1** 设有两个向量  $a$ 、 $b$ ，平移向量  $b$  使  $b$  的起点与  $a$  的终点重合，此时从  $a$  的起点到  $b$  的终点的向量  $c$  称为向量  $a$  与  $b$  的和，记作  $a + b$ ，即

$$c = a + b.$$

上述做出两向量和的方法叫做向量加法的**三角形法则**，如图 7-3。三角形法则的实际背景是：设一物体移动的位移为  $a$ ，再移动位移  $b$ ，其结果相当于直接移动位移  $a + b$ 。因此，三角形法则的物理意义是位移的合成。

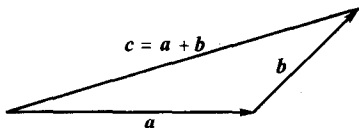


图 7-3

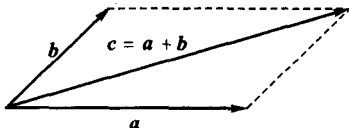


图 7-4

类似的也可以用平行四边形法则定义向量的加法：当非零向量  $a$  与  $b$  不平行时，平移向量使  $a$  与  $b$  的起点重合，以  $a$ 、 $b$  为邻边作平行四边形，从公共起点到对角顶点的向量等于向量  $a$  与  $b$  的和  $a + b$ （如图 7-4）。

若两个向量  $a$ 、 $b$  在同一直线上（或者平行），则它们的和规定为

(1) 若  $a$ 、 $b$  同向，其和向量的方向就是  $a$ 、 $b$  的共同方向，其模为  $a$  的模与  $b$  的模之和。

(2) 若  $a$ 、 $b$  反向，其和向量的方向为  $a$ 、 $b$  中较长的向量的方向，其模为  $a$ 、 $b$  中较大的模与较小的模之差。

平行四边形法则的实际背景可以看作力的合成或速度的合成。

### 2. 向量的减法

**定义 2** 规定两个向量  $a$  与  $b$  的差  $c$  为

$$c = a - b = a + (-b).$$

上式表明，把向量  $b$  的负向量  $-b$  加到向量  $a$  上，便得  $a$  与  $b$  的差  $a - b$ （如图 7-5）。特别地，当  $b = a$  时，有

$$a - a = a + (-a) = 0.$$

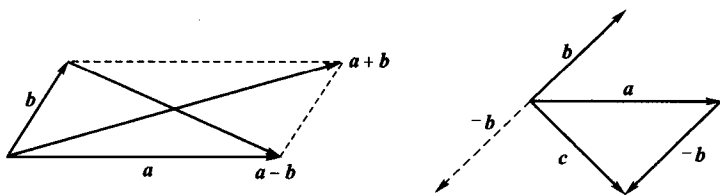


图 7-5

### 3. 数与向量的乘法(数乘)

**定义 3** 设  $\lambda$  是一个实数,  $a$  是一个非零向量, 那么向量  $a$  与实数  $\lambda$  的乘积是一个向量, 记作  $\lambda a$ , 向量  $\lambda a$  的模和方向规定如下:

- (1)  $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$ ;
- (2) 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  方向相同, 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  方向相反; 当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda a = 0$ . 即  $\lambda a$  为零向量, 这时它的方向可以是任意的. 特别地, 当  $\lambda = \pm 1$  时, 有

$$1a = a, (-1)a = -a.$$

由此可知: 两向量  $a$ 、 $b$  平行的充分必要条件是  $b = \lambda a$ ; 或更一般的有两向量  $a$ 、 $b$  平行的充分必要条件是  $\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$  (其中  $\lambda_1, \lambda_2$  为实数且不同时为零).

**定义 4** 设有两个非零向量  $a$  与  $b$ , 将它们平移使起点重合, 这时两向量所在射线之间的夹角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 称为向量  $a$  与  $b$  的夹角, 记为  $(\hat{a}, \hat{b})$ , 如图 7-6 所示.

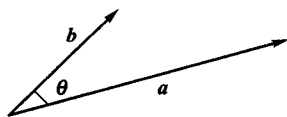


图 7-6

因为方向一致或相反的两向量平行, 所以夹角为 0 或  $\pi$  的两个向量平行. 而夹角为  $\frac{\pi}{2}$  的两个向量叫作垂直.

### 4. 向量线性运算的性质

(1) 向量的加法满足下列运算规律:

交换律  $a + b = b + a$ ;

结合律  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

由于向量的加法符合交换律与结合律, 故  $n$  个向量  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) 相加可写成  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , 如图 7-7 是 5 个向量的和的示意图,

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

(2) 数与向量的乘法满足下列运算规律:

结合律  $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$ ;

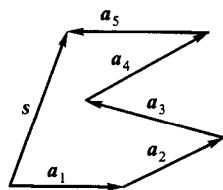


图 7-7

分配律  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ ;

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

利用向量与数的乘积任一非零向量  $a$  还可以表示为

$$a = |a| a^0,$$

其中  $a^0$  表示与  $a$  同方向的单位向量. 由此得到

$$a^0 = \frac{1}{|a|} a, \text{ 记为 } a^0 = \frac{a}{|a|}.$$

该过程称为将非零向量单位化.

**例 1** 试用向量证明三角形的中位线定理: 三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边长度的一半.

**解** 如图 7-8, 设  $D$  是  $AB$  的中点,  $E$  是  $AC$  的中

$$\text{点, 则 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC} \text{ 且 } |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|.$$

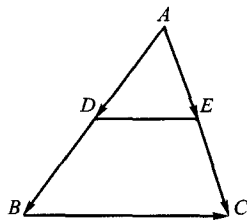


图 7-8

**例 2** 设  $\overrightarrow{AB} = a + 5b$ ,  $\overrightarrow{BC} = -6a + 18b$ ,  $\overrightarrow{CD} = 8(a - b)$ , 求证:  $A, B, D$  三点共线.

**证** 由  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$$= (-6a + 18b) + 8(a - b) = 2a + 10b = 2\overrightarrow{AB},$$

知  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$  同向. 即  $\angle ABD = \pi$ , 所以  $A, B, D$  三点共线.

**例 3** 证明向量  $c = \frac{|a|b + |b|a}{|a| + |b|}$  表示向量  $a$  与  $b$  夹角平分线的方向.

**证** 设  $a^0, b^0$  分别表示与  $a, b$  同方向的单位向量, 则

$$a^0 = \frac{a}{|a|}, b^0 = \frac{b}{|b|}.$$

而以  $a^0, b^0$  为邻边的平行四边形为菱形, 其对角线平分顶角, 于是

$$d = a^0 + b^0 = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} = \frac{|a|b + |b|a}{|a||b|},$$

这是与  $a^0, b^0$  夹角平分线平行之向量, 又

$$c = \frac{|a|b + |b|a}{|a| + |b|} = \frac{|a||b|}{|a| + |b|} \cdot \frac{|a|b + |b|a}{|a||b|} = \lambda d,$$

其中  $\lambda = \frac{|a||b|}{|a| + |b|} > 0$ , 故  $c$  表示  $a$  与  $b$  夹角平分线的方向.

## 5. 向量的投影

**定义 5** 设有向量  $a$  和  $u$  轴, 用  $\varphi$  表示它们之间的夹角(规定  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ), 称

数量  $|\mathbf{a}| \cos \varphi$  为向量  $\mathbf{a}$  在  $u$  轴上的投影, 或者说  $\mathbf{a}$  在  $u$  轴方向上的投影, 记为

$$\text{Prj}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi.$$

图 7-9 表示向量  $\mathbf{a}$  在  $u$  轴上的投影, 即

$$\text{Prj}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi = AB.$$

投影是个数量可正可负: 当  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  时,

投影为正, 即  $\text{Prj}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi = AB > 0$ ; 当  $\frac{\pi}{2}$

$< \varphi \leq \pi$  时, 投影为负, 即  $\text{Prj}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi =$

$AB < 0$ ; 当  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时, 投影为零, 即  $\text{Prj}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi = 0$  (此时为一个点).

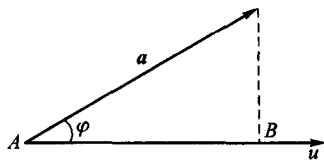


图 7-9

可以证明: 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和.

此结论不难推广到  $n$  个向量的情况.



## 习题 7-1

1. 向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  只有满足什么条件时, 向量  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  才能平分  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  之间的夹角?

2. 设  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  均为非零向量, 问应满足什么条件时, 下列关系式成立:

(1)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ ;      (2)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ ;

(3)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ ;      (4)  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ .

3. 如图 7-10 所示, 设已知立方体三边上的向量, 而  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  为各边的中点, 求证:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{EF}$  组成一个三角形.

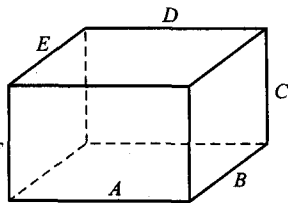


图 7-10

4. 在三角形  $ABC$  中,  $\angle C = \frac{\pi}{6}$ ,  $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ,  $F$

$|\overrightarrow{AB}| = 2$ , 求  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  在  $\overrightarrow{AB}$  上的投影.

5. 把  $\triangle ABC$  的  $BC$  边 5 等分, 设分点依次为  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , 再把各分点与点  $A$  连接, 试以  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$  表示向量  $\overrightarrow{D_1A}$ ,  $\overrightarrow{D_2A}$ ,  $\overrightarrow{D_3A}$  和  $\overrightarrow{D_4A}$ .

6. 用向量方法证明: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

## 第二节 空间直角坐标系与向量的坐标表示

### 一、空间直角坐标系

空间直角坐标是确定点在空间位置的一种形式, 它是依据空间的点与一组

有序的数组  $(x, y, z)$  之间存在一一对应关系而给出的。

在空间任意选定一点  $O$ ，过  $O$  点做三条相互垂直且具有相同单位长度的数轴，三条数轴的正向要符合右手规则，即右手握住  $z$  轴，大拇指指向  $z$  轴的正向，其余四个手指从  $x$  轴的正方向以  $\frac{\pi}{2}$  角度转

向  $y$  轴的正方向，这就构成了空间直角(右手)坐标系，称点  $O$  为坐标原点，三条数轴依次记为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴，统称为坐标轴。由两条坐标轴所决定的平面称为坐标面，它们两两相互垂直，分别简称为  $xOy$  面、 $yOz$  面、 $zOx$  面。三张坐标面把空间分为八个部分，每个部分称为卦限，分别用大写罗马数字 I、II、…、VIII 表示，如图 7-11 所示。在  $xOy$  平面之上， $yOz$  平面之前， $zOx$  平面之右的卦限称为第 I 卦限。在  $xOy$  平面上方的其余三个卦限按逆时针方向依次称为第 II 卦限、第 III 卦限和第 IV 卦限。在  $xOy$  平面下方的四个卦限，规定第 V 卦限在第 I 卦限之下，其余三个卦限也按逆时针方向依次称为第 VI 卦限、第 VII 卦限、第 VIII 卦限。

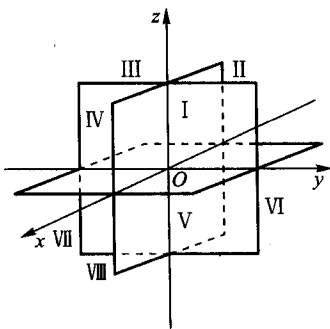


图 7-11

在  $xOy$  平面之上， $yOz$  平面之前， $zOx$  平面之右的卦限称为第 I 卦限。在  $xOy$  平面上方的其余三个卦限按逆时针方向依次称为第 II 卦限、第 III 卦限和第 IV 卦限。在  $xOy$  平面下方的四个卦限，规定第 V 卦限在第 I 卦限之下，其余三个卦限也按逆时针方向依次称为第 VI 卦限、第 VII 卦限、第 VIII 卦限。

设  $M$  是空间任意一点，过  $M$  点分别作三张与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴垂直的平面，这三张平面与  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的交点分别为  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  (如图 7-12)。点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  在相应的坐标轴上的坐标依次为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，于是空间点  $M$  唯一确定了一个有序数组  $(x, y, z)$ 。反之，对给定的有序数组  $(x, y, z)$ ，若在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上分别取坐标为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ ，过点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  分别作垂直于  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的三张平面，

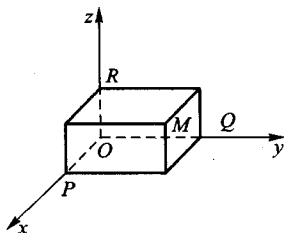


图 7-12

这三张平面有且仅有唯一的交点  $M$ ，因而有序数组  $(x, y, z)$  唯一对应于空间一点  $M$ 。这样，通过空间直角坐标系，空间点  $M$  与有序数组  $(x, y, z)$  之间就建立起了一一对应的关系。有序数组  $(x, y, z)$  称为点  $M$  的坐标，并把点  $M$  记为  $M(x, y, z)$ ，其中第一个数  $x$  称为横坐标，第二个数  $y$  称为纵坐标，第三个数  $z$  称为竖坐标。

## 二、空间两点间的距离

我们知道在数轴上， $M_1(x_1)$ 、 $M_2(x_2)$  两点之间的距离为

$$|M_1M_2| = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

在平面上， $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$  两点之间的距离为



$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

从而我们可以证明在空间上任意两点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$  之间的距离是 (如图 7-13):

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

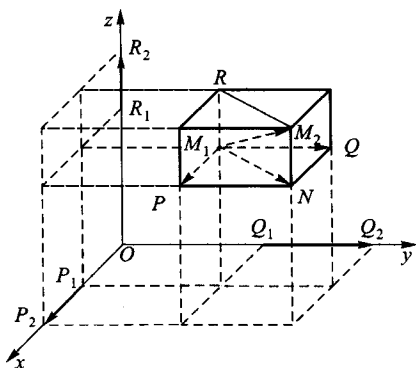


图 7-13

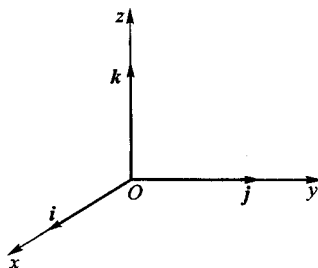


图 7-14

### 三、向量的坐标表示

为了用坐标表示向量, 我们需要将向量放在空间直角坐标系中进行研究.

分别记与  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴正向相同的单位向量为  $i$ 、 $j$ 、 $k$  (如图 7-14). 如果将向量的起点移到坐标原点, 则这个向量就称为向径. 向径是由终点所唯一确定的. 反之, 任给空间一点  $M$ , 也能唯一的确定一个向径, 因此空间点  $M$  与向径之间构成一一对应关系. 设点  $M$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 由向量的数乘知: 向径  $\vec{OP} = xi$ 、 $\vec{OQ} = yj$ 、 $\vec{OR} = zk$ , 如图 7-15 所示. 由向量的加法法则可知

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OP} + \vec{PN} + \vec{NM} \\ &= \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = xi + yj + zk, \end{aligned}$$

从而

$$\vec{OM} = xi + yj + zk.$$

称上式为向径  $\vec{OM}$  的坐标分解式. 而表达式中  $i$ 、 $j$ 、 $k$  前面的系数  $x$ 、 $y$ 、 $z$  其实就是向量  $\vec{OM}$  分别在三个坐标轴上的投影, 也就是向量  $\vec{OM}$  的终点坐标, 因而  $(x, y, z)$  称为向径  $\vec{OM}$  的坐标表示. 从而  $\vec{OM} = (x, y, z)$ .

设  $a = \vec{NM}$  是一个起点为  $N(x_1, y_1,$

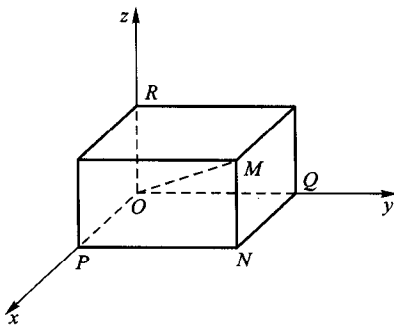


图 7-15