21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

弹性力学简明教程

第三版

全程导学及习题全解

主编 刘海英

◆知识归纳 梳理主线重点难点
◆习题详解 精确解答教材习题
◆提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经……导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJIN……DAO

弹性力学简明教程

第三版

全程导学及习题全解

主编　刘海英
编委　任爱娣　郝淑英　张春秋

- ◆知识归纳　梳理主线重点难点
- ◆习题详解　精确解答教材习题
- ◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学简明教程全程导学及习题全解 / 刘海英主编.
—北京：中国时代经济出版社，2007.9
(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-80221-374-6

Ⅰ.弹... Ⅱ.刘... Ⅲ.弹性力学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 104028 号

弹性力学简明教程全程导学及习题全解

刘海英 主编

出版者	中国时代经济出版社
地　址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦 11 层东办公区
邮　编	100007
电　话	(010)68320825（发行部） (010)88361317（邮购）
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　本	787 × 1092　1/16
版　次	2007 年 9 月第 1 版
印　次	2007 年 9 月第 1 次印刷
印　张	10.25
字　数	135 千字
印　数	1～5000 册
定　价	13.00 元
书　号	ISBN 978-7-80221-374-6

前　言

本书是为配合由徐芝纶教授编著，高等教育出版社出版的《弹性力学简明教程》（第三版）编写的学习辅导书。可供开设“弹性力学”课程的高等工科院校学生作参考书使用及准备报考研究生的学生作为复习使用，也可供讲授弹性力学课程的教师进行参考。

本书各章节的顺序与教材保持一致，其各章节内容编排如下：本章学习重点与难点。突出重点，系统地归纳出理论学习部分的主要内容，将有关公式用表格的形式表现出来，便于理解、记忆和同类问题的对比。典型例题讲解。每章精选几道例题，每道例题详细解答后，对易混淆的概念进行解释，对解题技巧进行归纳，以巩固相关知识，对求解同类问题具有一定的指导意义。习题全解。对教材中的所有习题给出了详细解答，解题过程中注重解题的思路和方法，帮助学生更好地掌握所学的知识，使解题的能力得到提高。

本书在编写的过程中，得到了天津大学张琪昌教授的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。同时，对《弹性力学简明教程》（第三版）作者徐芝纶教授表示衷心的感谢。由于作者的水平有限，错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指证。

编　者

2007年7月

目　　录

第一章　绪　　论

本章学习重点与难点

重点

一、弹性力学的内容：弹性力学的研究对象、内容和范围，注意与其它力学在任务、研究对象和研究方法上的相同点及不同点。

二、弹性力学的基本假定、基本量和坐标系

1. 为简化计算，弹性力学假定所研究的物体处于连续的、完全弹性的、均匀的、各向同性的、小变形的状态。

2. 各种基本量的正负号规定。注意弹性力学中应力分量的正负号规定与材料力学中的正负号规定有何相同点和不同点。

外力（体力、面力）均以沿坐标轴正向为正，面力的正负号与所处的面无关（只与坐标系有关），注意与应力分量正面正向、负面负向约定的区别。

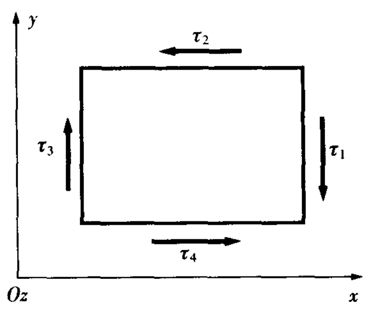
3. 五个基本假定在建立弹力力学基本方程时的用途。

难点

建立正面、负面的概念，确立弹性力学中应力分量的正负号规定。

典型例题讲解

例 1-1　试分别根据在材料力学中，和弹性力学中符号的规定，确定图中所示的切应力 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ 的符号。



例 1-1 图

【解答】 (1)在材料力学中规定,凡企图使单元或其局部顺时针转动的切应力为正,反之为负。所以,τ_1,τ_3 为正;τ_2,τ_4 为负。

(2)在弹性力学中规定,作用于正坐标面上的切应力以正坐标轴方向为正,作用于负坐标面上的切应力以负坐标轴方向为正,相反的方向均为负。所以,τ_1,τ_2,τ_3,τ_4 均为负。

习题全解

1-1 试举例说明,什么是均匀的各向异性体,什么是非均匀的各向同性体,什么是非均匀的各向异性体。

【解答】 木材、竹材是均匀的各向异性体;混合材料通常称为非均匀的各向同性体,如沙石混凝土构件,为非均匀的各向同性体;有生物组织如长骨,为非均匀的各向异性体。

1-2 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体?一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体?

【解答】 一般的混凝土构件可以作为理想的弹性体,而钢筋混凝土构件不可以作为理想的弹性体;一般的岩质地基不可以作为理想弹性体,而土质地基可以作为理想的弹性体。

1-3 五个基本假定在建立弹性力学基本方程时有什么用途?

【解答】 (1)连续性假定:引用这一假定以后,物体中的应力、应变和位移等物理量就可看成是连续的,因此,建立弹性力学的基本方程时就可以用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。

(2)完全弹性假定:引用这一完全弹性的假定还包含形变与形变引起的正应力成正比的含义,亦即二者成线性的关系,服从胡克定律,从而使物理方程成为线性的方程。

(3)均匀性假定:在该假定下,所研究的物体内部各点的物理性质显然都是相同的。因此,反映这些物理性质的弹性常数(如弹性模量 E 和泊松比 μ 等)就不随位置坐标而变化。

(4)各向同性假定:所谓“各向同性”是指物体的物理性质在各个方向上都是相同的。进一步地说,就是物体的弹性常数也不随方向而变化。

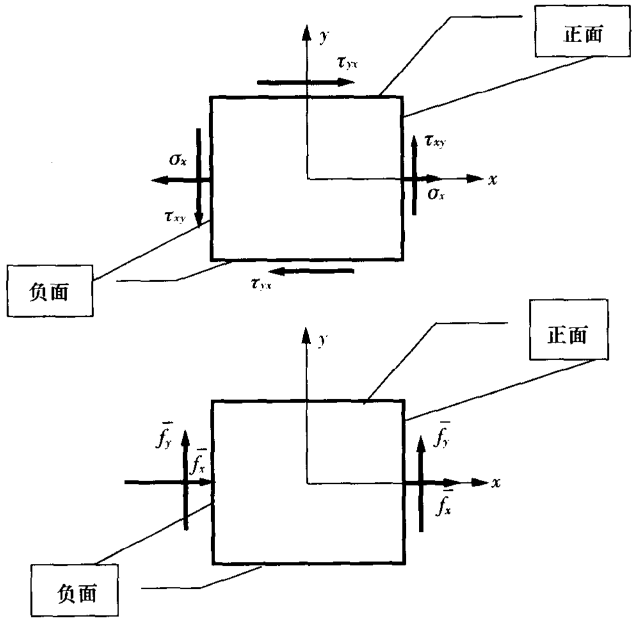
(5)小变形假定:我们研究物体受力后的平衡问题时,不用考虑物体尺寸的改变,而仍然按照原来的尺寸和形状进行计算。同时,在研究物体的变形和位移时,可以将它们的二次幂或乘积略去不计,使得弹性力学中的微分方程都简化为线性微分方程。

在上述这些假定下,弹性力学问题都化为线性问题,从而可以应用叠加原理。

1-4 应力和面力的符号规定有什么区别?试分别画出正面和负面上的正的应力和正的面力的方向。

【解答】 应力的符号规定是：当作用面的外法线指向坐标轴的正方向时（即正面时），这个面上的应力（不论是正应力或切应力）以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负。与此相反，当作用面的外法线指向坐标轴的负方向时（即负面时），这个面上的应力就以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴的正方向为负。

面力的符号规定是：当面力的指向沿坐标轴的正方向时为正，沿坐标轴的负方向时为负。



解 1-4 图

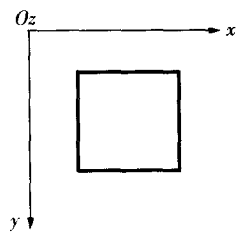
1-5 试比较弹性力学和材料力学中关于切应力的符号规定。

【解答】 在弹性力学和材料力学中切应力的符号规定不尽相同：材料力学中规定，凡企图使微段顺时针转动的切应力为正；在弹性力学中规定，作用于正坐标面上的切应力以沿坐标轴正方向为正，作用于负坐标面上的切应力以沿坐标轴负方向为正，相反的方向均为负。

1-6 试举例说明正的应力对应于正的形变。

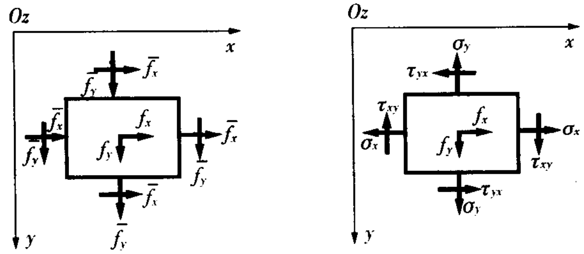
【解答】 如梁受拉伸时，其形状发生改变，正的应力（拉应力）对应于正的形变。

1-7 试画出题 1-7 图中的矩形薄板的正的体力，面力和应力的方向。



题 1-7 图

注意：(1)无论在哪一个位置的体力，在哪一个边界面上的面力，均以沿坐标轴正方向为正，反之为负。(2)边界面上的应力应是以在正坐标面上，方向沿坐标轴正方向为正，反

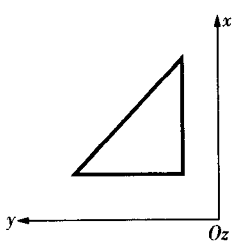


解 1-7 图

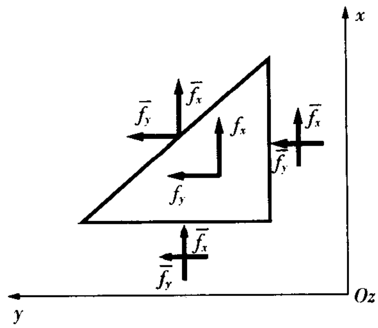
(a)体力和面力;(b)体力和应力

之为负;在负坐标面上,方向沿坐标轴负方向为正,反之为负。

1-8　试画出题 1-8 图中的三角形薄板的正的面力和体力的方向。



题 1-8 图



解 1-8 图

第二章　平面问题的基本理论

本章学习重点与难点

重点

一、两类平面问题的概念

名称	平面应力问题		平面应变问题	
	未知量	已知量	未知量	已知量
位移	u,v	$w\neq 0$	u,v	$w=0$
应变	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$	$\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$ $\varepsilon_z=-\dfrac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$	$\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=\varepsilon_z=0$
应力	$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$	$\tau_{yz}=\tau_{xz}=\sigma_z=0$	$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$	$\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$, $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$
外力	体力、面力的作用面平行于 xy 平面，外力沿板厚均匀分布。		体力、面力的作用面平行于 xy 平面，外力沿 z 轴无变化。	
形状	物体在一个方向的几何尺寸远小于其它两个方向的几何尺寸(等厚度薄板)。		沿一个方向(通常取为 z 轴)很长的等截面棱柱体(等截面长柱体)。	

二、平面问题的基本方程

平面问题的基本方程共有八个，见下表。其中，E,μ,G 分别是弹性模量、泊松比和切变模量，$G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$。

名称	基本方程表达式	应用基本假定
平衡微分方程	$\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0,\quad \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0$。	连续性，小变形，均匀性
几何方程	$\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}$。	连续性，小变形，均匀性

续表

名称	基本方程表达式		应用基本假定
物理方程	平面应力问题 $\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y),\\ \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x),\\ \gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}。\end{cases}$	平面应变问题 $\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x-\dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right),\\ \varepsilon_y=\dfrac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y-\dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right),\\ \gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}。\end{cases}$	连续性，小变形，均匀性，完全弹性，各向同性

三、平面问题的边界条件

弹性力学平面问题的边界条件有三类，如下表。其中 S_σ，S_u 分别表示面力、位移已知的边界，l 和 m 则是边界面的方向余弦。

位移边界条件	应力边界条件	混合边界条件
$\begin{cases}u=\bar{u},\\ v=\bar{v}。\end{cases}S_u$ 上	$\begin{cases}l\sigma_x+m\tau_{xy}=\bar{f}_x,\\ l\tau_{xy}+m\sigma_y=\bar{f}_y。\end{cases}S_\sigma$ 上	$u=\bar{u}$，$v=\bar{v}$。S_u 上 $\begin{cases}l\sigma_x+m\tau_{xy}=\bar{f}_x,\\ l\tau_{xy}+m\sigma_y=\bar{f}_y。\end{cases}S_\sigma$ 上

四、平面问题的两条求解途径

1. 处理平面问题时，常用按位移求解和按应力求解这两条途径。在满足相应的求解方程和边界条件之后，前者先求出位移再用几何方程、物理方程分别求出应变和应力；后者先求出应力再由物理方程、几何方程分别求出应变和位移。

2. 按位移求解平面问题，归结为在给定边界条件下，求解以位移表示的平衡微分方程(平面应力情况)：

$$\begin{cases}\dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)=0,\\ \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=0。\end{cases}$$

3. 按应力求解平面问题，除运用平衡微分方程外，还需补充应变相容方程，该方程可用应变或应力分量表示。

用应力表示的相容方程：

一般情况下：

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)，平面应力问题$$

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-\left(\frac{1}{1-\mu}\right)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)。平面应变问题$$

常体力情况下：

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0。$$

用应变表示的相容方程：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}。$$

按应力求解常体力情况下的两类平面问题，归结为在给定边界条件下，求解如下的偏微分方程组，若是多连通(开孔)物体，相应的位移分量需满足位移单值条件：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0,\\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0,\\ \nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0。\end{cases}$$

五、关于位移解法、应力解法及应变相容方程

1. 弹性力学问题按位移求解(或按位移、应变、应力同时求解)时，应变相容方程能自行满足。按应力求解时，为保证从几何方程求得连续的位移分量，需补充应变相容方程，是保证物体(单连体)连续的充分和必要条件。对于多连体，只有在加上位移单值条件，才能使物体变形后仍保持为连续体。

2. 按位移求解时需联立求解二阶偏微分方程，虽在理论上讲适用于各类边界条件，但实际运用时较难得到精确满足位移边界条件的解析解。因此，使其在寻找精确解时受到了限制。然而，这一方法在数值解法中得到了广泛应用。

3. 应力解法通常适用于应力边界条件或仅在局部给定位移的混合边界条件。由于可引入应力函数求解，故在寻找平面问题的解析解时，用此法求解比按位移求解容易。

4. 在按应力解法求解的方程组中并不隐含弹性常数，因此，按应力求解单连通平面弹性体的应力边界问题时，其应力解答与 E,μ,G 无关(但应变、位移分量与弹性常数有关)，即应力与材料性质无关。这意味着不同弹性材料的物体(不论是属于平面应力问题，还是属于平面应变问题)，只要在 xy 平面内具有相同的形状、约束和荷载，那么，$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 的分布情况就相同(不考虑体力)。可以证明：对于多连通(开孔)物体，若作用在同一边界上外力的主矢为零，上述结论也成立。

难点

一、两类平面问题的异同点。

二、圣维南原理的适用范围，对其定义的把握。在利用圣维南原理在小边界(次要边界)上局部放松，使应力边界条件近似满足时，注意主矢(主矩)的正负号规定：应力合成的主矢(主矩)与外力主矢(主矩)方向一致时取正号，反之取负号。

三、列出应力边界条件。

典型例题讲解

例 2-1 已知薄板有下列形变关系：$\varepsilon_x = Axy, \varepsilon_y = By^3, \gamma_{xy} = C - Dy^2$，式中 A, B, C, D 皆为常数，试检查在形变过程中是否符合连续条件，若满足并列出应力分量表达式。

【解】 (1)相容条件：

将形变分量代入形变协调方程(相容方程)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

其中
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0。$$

所以满足相容方程，符合连续性条件。

(2)在平面应力问题中，用形变分量表示的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\mu^2}(Axy + \mu By^3),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = \frac{E}{1-\mu^2}(\mu Axy + By^3),$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G(C - Dy^2)。$$

(3)平衡微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0。 \end{cases}$$

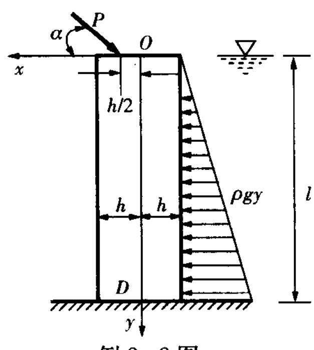
其中
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{EA}{1-\mu^2}y, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{E}{1-\mu^2}(3By^2 + \mu Ax),$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = -2GDy。$$

若满足平衡微分方程，必须有

$$\begin{cases} \dfrac{EA}{1-\mu^2}y - 2GDy + f_x = 0, \\ \dfrac{E}{1-\mu^2}(3By^2 + \mu Ax) + f_y = 0。 \end{cases}$$

分析：用形变分量表示的应力分量，满足了相容方程和平衡微分方程条件，若要求出常数 A, B, C, D 还需应力边界条件。



例 2-2 图

例 2-2 如图所示为一矩形截面水坝，其右侧面受静水压力(水的密度为 ρ)，顶部受集中力 P 作用。

试写出水坝的应力边界条件。

【解】 根据在边界上应力与面力的关系

左侧面：$(\sigma_x)_{x=h}=\bar{f}_x(y)=0$，　$(\tau_{xy})_{x=h}=\bar{f}_y(y)=0$；

右侧面：$(\sigma_x)_{x=-h}=\bar{f}_x(y)=-\rho g y$，　$(\tau_{xy})_{x=-h}=\bar{f}_y(y)=0$。

上下端面为小边界面，应用圣维南原理，可列出三个积分的应力边界条件。上端面的面力向截面形心 O 简化，得面力的主矢量和主矩分别为 F_N,F_S,M_O

$$F_N=P\sin\alpha,\quad F_S=-P\cos\alpha,\quad M_O=\frac{Ph}{2}\sin\alpha。$$

$y=0$ 坐标面，应力主矢量符号与面力主矢量符号相反；应力主矩与面力主矩的转向相反。所以

$$\int_{-h}^{h}(\sigma_y)_{y=0}\mathrm{d}x=-F_N=-P\sin\alpha,$$

$$\int_{-h}^{h}(\sigma_y)_{y=0}x\,\mathrm{d}x=-M_O=-\frac{1}{2}Ph\sin\alpha,$$

$$\int_{-h}^{h}(\tau_{yx})_{y=0}\mathrm{d}x=-F_S=P\cos\alpha。$$

下端面的面力向截面形心 D 简化，得到主矢量和主矩为

$$F_N=-P\sin\alpha,\quad F_S=P\cos\alpha-\frac{l^2}{2}\rho g,$$

$$M_D=Pl\cos\alpha-\frac{Ph}{2}\sin\alpha-\frac{l^3}{6}\rho g。$$

$y=l$ 坐标面，应力主矢量、主矩的符号与面力主矢量、主矩的符号相同。所以

$$\int_{-h}^{h}(\sigma_y)_{y=l}\mathrm{d}x=F_N=-P\sin\alpha,$$

$$\int_{-h}^{h}(\sigma_y)_{y=l}x\,\mathrm{d}x=M_D=Pl\cos\alpha-\frac{1}{2}Ph\sin\alpha-\frac{l^3}{6}\rho g,$$

$$\int_{-h}^{h}(\tau_{yx})_{y=l}\mathrm{d}x=F_S=P\cos\alpha-\frac{l^2}{2}\rho g。$$

分析：(1)与坐标轴平行的主要边界只能建立两个等式，而且与边界平行的应力分量不会出现。如在左、右侧面，不要加入$(\sigma_y)_{x=h}=0$或$(\sigma_y)_{x=-h}=0$。

(2)在大边界上必须精确满足应力边界条件，当在小边界(次要边界)上无法精确满足时，可以应用圣维南原理使应力边界条件近似满足，使问题的求解大为简化。应力合成的主矢(主矩)符号的取法亦可用外力主矢(主矩)的方向判断，二者方向一致时取正号，反之取负号。

习题全解

2-1　如果某一问题中，$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$，只存在平面应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$，且它们不沿 z 方向变化，仅为 x,y 的函数，试考虑此问题是否就是平面应力问题？

【解答】 平面应力问题，就是作用在物体上的外力，约束沿 z 向均不变化，只有平面应力分量($\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$)，且仅为 x,y 的函数的弹性力学问题，所以此问题是平面应力问题。

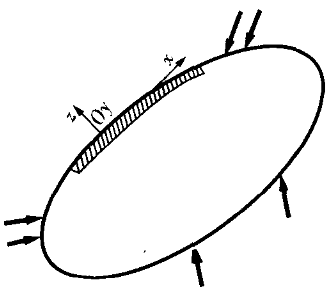
2-2 如果某一问题中，$\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$，只存在平面应变分量 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$，且它们不沿 z 方向变化，仅为 x,y 的函数，试考虑此问题是否就是平面应变问题？

【解答】 平面应变问题，就是物体截面形状、体力、面力及约束沿 z 向均不变，只有平面应变分量($\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$)，且仅为 x,y 的函数的弹性力学问题，所以此问题是平面应变问题。

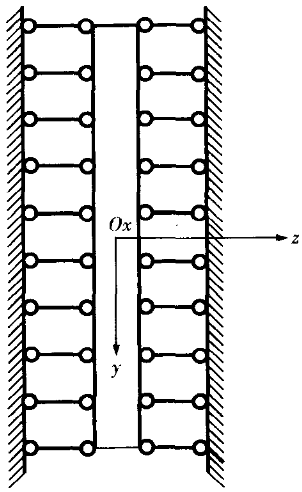
2-3 试分析说明，在不受任何面力作用的空间体表面附近的薄层中，题 2-3 图，其应力状态接近于平面应力的情况。

【解答】 在不受任何面力作用的空间体表面附近的薄层中，可以认为在该薄层的上下表面都无面力，且在薄层内所有各点都有 $\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$，只存在平面应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$，且它们不沿 z 向变化，仅为 x,y 的函数。可认定此问题是平面应力问题。

2-4 试分析说明，在板面上处处受法向约束且不受切向面力作用的等厚度薄板中，题 2-4 图，当板上只受 x,y 向的面力或约束，且不沿厚度变化时，其应力状态接近于平面应变的情况。



题 2-3 图

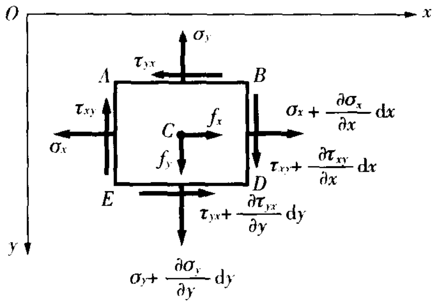


题 2-4 图

【解答】 板上处处受法向约束时 $\varepsilon_z=0$，且不受切向面力作用，则 $\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$ (相应 $\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$)；板边上只受 x,y 向的面力或约束，所以仅存在 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$ 且不沿厚度变化，所以其应变状态接近于平面应变的情况。

2-5 在题 2-5 图的微分体中，若将对形心的力矩平衡条件 $\sum M_C=0$，改为对

角点的力矩平衡条件,试问将导出什么形式的方程?



题 2-5 图

【解】 将对形心的力矩平衡条件$\sum M_C=0$,改为分别对四个角点 A,B,D,E 的平衡条件,为计算方便,在 z 方向的尺寸取为一个单位。

$\sum M_A=0$,

$$\sigma_y dx\times1\times\frac{dx}{2}+\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\times1\times\frac{dy}{2}-\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)dy\times1\times dx$$
$$+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial_y}dy\right)dx\times1\times dy-\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial_y}dy\right)dx\times1\times\frac{dx}{2}-\sigma_x dy\times1\times\frac{dy}{2}$$
$$\text{(a)}$$
$$+f_x dxdy\times1\times\frac{dy}{2}-f_y dxdy\times1\times\frac{dx}{2}=0。$$

$\sum M_B=0$,

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\times1\times\frac{dy}{2}+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx\times1\times dy+$$
$$\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dx\times1\times\frac{dx}{2}-\tau_{xy}dy\times1\times dx-\sigma_x dy\times1\times\frac{dy}{2}- \qquad \text{(b)}$$
$$\sigma_y dx\times1\times\frac{dx}{2}+f_x dxdy\times1\times\frac{dy}{2}+f_y dxdy\times1\times\frac{dx}{2}=0。$$

$\sum M_D=0$,

$$\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dx\times1\times\frac{dx}{2}-\tau_{xy}dy\times1\times dx+\sigma_x dy\times1\times\frac{dy}{2}+$$
$$\tau_{yx}dx\times1\times dy-\sigma_y dx\times1\times\frac{dx}{2}-\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\times1\times\frac{dy}{2}- \qquad \text{(c)}$$
$$f_x dxdy\times1\times\frac{dy}{2}+f_y dxdy\times1\times\frac{dx}{2}=0。$$

$\sum M_E=0$,

$$-\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dx\times1\times\frac{dx}{2}+\sigma_x dy\times1\times\frac{dy}{2}+\tau_{yx}dx\times1\times dy+\sigma_y dx\times1\times$$