



普通高等教育“十一五”国家级规划教材  
湖北省精品课程教材

# 理论力学

**Theoretical Mechanics**

何 铨 主编

■ 华中科技大学出版社

本书共 15 章,第 1~4 章为静力学内容,主要介绍各种常见约束的约束力特征,各种力系的特征、简化和平衡。第 5~7 章为运动学内容,主要介绍点运动的基本特征和基本计算方法,刚体的基本运动分析方法,点的合成运动分析方法,刚体平面运动分析方法。第 8~15 章为动力学内容,主要介绍质点动力学的基本规律,动力学普遍定理,惯性力和达朗贝尔原理,虚位移原理和动力学普遍方程,拉格朗日方程以及碰撞。每章均安排了难度不同的习题,书末附有习题参考答案。

本书可以作为高等学校工科力学和工程类各专业的理论力学教材,不同专业可以根据需要选用全部或部分内容;也可供有关工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

理论力学/何 铨 主编. —武汉:华中科技大学出版社,2007 年 8 月  
ISBN 978-7-5609-4068-7

I. 理… II. 何… III. 理论力学-高等学校-教材 IV. O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 083911 号

## 理论力学

责任编辑:徐正达 古 丰  
责任校对:代晓莺

何 铨 主编

封面设计:刘 卉  
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:787mm×960mm 1/16

印张:21.75

字数:392 000

版次:2007 年 8 月第 1 版

印次:2007 年 8 月第 1 次印刷

定价:30.00 元

ISBN 978-7-5609-4068-7/O·414

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

# 前 言

本书是根据国家力学教学指导委员会提出的高等学校工科理论力学教学大纲编写的。在体系上,我们仍然采用了静力学、运动学和动力学三大模块的传统格局,实践证明,采用这种体系来编写理论力学教材和进行课堂教学是科学的、有效的。在内容安排和写作中,我们力图做到理论严谨、逻辑清晰、由浅入深、论述简明。

本书对静力学内容作了一定的简化,但必要的、基本的内容仍然是完备的。对运动学内容作了适当的调整和增减,比如,将刚体的定点转动的基本特征在刚体的基本运动中进行论述,对点的合成运动进行了比较严密的推导,但刚体的合成运动则完全没有论及。本书的动力学部分是按照力学专业学生应该掌握的常用知识体系安排的,我们对这部分的内容进行了比较充分的展开和论证,突出了点的动力学分析、动能和功的计算、虚位移基本概念的论证、拉格朗日方程的应用,补充了变形连续体的动量守恒分析。在许多理论力学教材中,有机械振动基础这一章,而本书没有将这一内容编入,主要原因是考虑到目前理论力学课程的教学课时较少,没有时间讲授这方面的内容,而需要学习这方面知识的专业又有专门的振动理论课程。

本书的习题绝大部分取自作者所在理论力学教研室原来编写的理论力学习题集,这些习题是前辈同事们经过多年积累形成的。在此向他们表示衷心的感谢。

在此,还要感谢华中科技大学将本书列入“百门精品课程教材建设计划”,感谢教育部专家组将本书列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材,感谢华中科技大学出版社的领导和编辑为本书出版所付出的辛劳。

由于编者水平所限,书中缺点和错误在所难免,衷心希望大家批评和指正,以使本书不断提高和完善。

编 者

2006 年 11 月

# 目 录

|                     |      |
|---------------------|------|
| 绪论                  | (1)  |
| 0.1 理论力学的研究对象和任务    | (1)  |
| 0.2 理论力学的体系和研究方法    | (1)  |
| 0.3 本书的主要内容和学习要求    | (2)  |
| <br>                |      |
| 第 1 章 静力学公理和物体的受力分析 | (4)  |
| 1.1 基本概念            | (4)  |
| 1.2 静力学公理           | (5)  |
| 1.3 力系的等效           | (7)  |
| 1.4 平面力矩和平面力偶       | (7)  |
| 1.5 约束与约束力          | (9)  |
| 1.6 受力分析与受力图        | (13) |
| 习题                  | (17) |
| <br>                |      |
| 第 2 章 平面力系的简化和平衡    | (21) |
| 2.1 力的合成与分解         | (21) |
| 2.2 平面汇交力系          | (22) |
| 2.3 平面力偶系           | (24) |
| 2.4 平面任意力系          | (25) |
| 2.5 物系的平衡、静定与超静定问题  | (29) |
| 2.6 平面静定桁架          | (35) |
| 习题                  | (39) |
| <br>                |      |
| 第 3 章 空间力系的简化和平衡    | (46) |
| 3.1 空间汇交力系          | (46) |
| 3.2 空间力矩理论          | (48) |
| 3.3 空间力偶理论          | (50) |
| 3.4 空间任意力系的简化和平衡    | (51) |
| 3.5 平行力系中心与重心       | (56) |
| 习题                  | (58) |

|                                  |       |
|----------------------------------|-------|
| <b>第 4 章 摩擦</b> .....            | (64)  |
| 4.1 滑动摩擦 .....                   | (64)  |
| 4.2 带摩擦力的平衡问题 .....              | (66)  |
| 4.3 滚动摩擦 .....                   | (73)  |
| 习题 .....                         | (77)  |
| <b>第 5 章 点的运动学和刚体的基本运动</b> ..... | (80)  |
| 5.1 运动学的基本概念 .....               | (80)  |
| 5.2 点的运动方程 .....                 | (80)  |
| 5.3 动点的速度和加速度 .....              | (81)  |
| 5.4 刚体的平动和定轴转动 .....             | (86)  |
| 5.5 刚体的定点转动 .....                | (91)  |
| 习题 .....                         | (93)  |
| <b>第 6 章 点的合成运动</b> .....        | (97)  |
| 6.1 点合成运动的基本概念 .....             | (97)  |
| 6.2 点的速度、加速度合成定理 .....           | (99)  |
| 6.3 动系任意运动时速度、加速度合成定理的推导 .....   | (112) |
| 习题 .....                         | (117) |
| <b>第 7 章 刚体的平面运动</b> .....       | (123) |
| 7.1 刚体的平面运动及其分解 .....            | (123) |
| 7.2 平面图形上任意点速度的求法 .....          | (124) |
| 7.3 平面图形上任意点加速度的求法 .....         | (128) |
| 7.4 刚体绕平行轴转动的合成 .....            | (134) |
| 习题 .....                         | (135) |
| <b>第 8 章 质点动力学基本规律</b> .....     | (142) |
| 8.1 牛顿运动定律 .....                 | (142) |
| 8.2 质点的运动微分方程 .....              | (145) |
| 8.3 关于质点动力学的例题 .....             | (146) |
| * 8.4 质点相对运动动力学 .....            | (156) |
| 习题 .....                         | (163) |

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| 第 9 章 动量定理              | (167) |
| 9.1 动量定理及其基本方程          | (167) |
| 9.2 质心运动定理              | (171) |
| 9.3 动量定理的一些典型应用         | (176) |
| 习题                      | (183) |
| 第 10 章 动量矩定理            | (187) |
| 10.1 质点的动量矩定理           | (187) |
| 10.2 质点系的动量矩定理          | (188) |
| 10.3 定轴转动刚体的动力学         | (190) |
| 10.4 质点系的相对运动动量矩定理      | (193) |
| 10.5 刚体平面运动动力学          | (195) |
| * 10.6 空间运动刚体的相对运动动量矩定理 | (203) |
| * 10.7 陀螺仪(或回转仪)的理论基础   | (209) |
| 习题                      | (213) |
| 第 11 章 动能定理             | (218) |
| 11.1 质点的动能定理            | (218) |
| 11.2 质点系的动能定理           | (219) |
| 11.3 力对质点的功             | (219) |
| 11.4 力对刚体的功             | (223) |
| 11.5 质点系和刚体的动能计算        | (228) |
| 11.6 功率和功率方程            | (235) |
| 11.7 势力、势能以及相应的动能定理     | (236) |
| 习题                      | (241) |
| 第 12 章 达朗贝尔原理(动静法)      | (246) |
| 12.1 惯性力的概念             | (246) |
| 12.2 达朗贝尔原理             | (246) |
| 12.3 惯性力系的简化            | (249) |
| 12.4 定轴转动刚体对轴承的附加动反力    | (258) |
| 习题                      | (260) |
| 第 13 章 虚位移原理(虚功原理)      | (265) |
| 13.1 约束及其分类             | (265) |

|               |                     |              |
|---------------|---------------------|--------------|
| 13.2          | 广义坐标与自由度            | (266)        |
| 13.3          | 可能位移、实位移、虚位移        | (270)        |
| 13.4          | 虚功和广义力              | (274)        |
| 13.5          | 虚位移原理               | (277)        |
| 13.6          | 动力学普遍方程             | (281)        |
|               | 习题                  | (284)        |
| <b>第 14 章</b> | <b>拉格朗日方程及其应用</b>   | <b>(289)</b> |
| 14.1          | 第二类拉格朗日方程           | (289)        |
| * 14.2        | 完整系统的能量关系           | (295)        |
| * 14.3        | 第一类拉格朗日方程           | (299)        |
|               | 习题                  | (304)        |
| <b>第 15 章</b> | <b>碰撞</b>           | <b>(307)</b> |
| 15.1          | 碰撞现象的基本特征           | (307)        |
| 15.2          | 研究碰撞的基本定理           | (307)        |
| 15.3          | 两物体的碰撞及其恢复系数        | (309)        |
| 15.4          | 碰撞对定轴转动刚体和平面运动刚体的作用 | (311)        |
| 15.5          | 关于碰撞的例题             | (312)        |
|               | 习题                  | (320)        |
| <b>附录</b>     |                     | <b>(323)</b> |
| 附录 A          | 一些典型空间约束的类型及其约束力    | (323)        |
| 附录 B          | 一些简单均质物体的重心位置       | (324)        |
| 附录 C          | 一些简单均质物体的转动惯量       | (326)        |
|               | <b>习题参考答案</b>       | <b>(328)</b> |
|               | <b>参考文献</b>         | <b>(338)</b> |

# 绪 论

## 0.1 理论力学的研究对象和任务

以牛顿运动定律为基础演化、发展而成的力学知识体系称为牛顿力学或经典力学。理论力学是经典力学的基础部分,它研究质点、质点系或物体在力的作用下作机械运动的基本规律。所谓机械运动,是指物体之间在空间的相对位置随时间的变化。所谓力,是指质点、质点系或物体之间的相互机械作用,这种作用使质点、质点系或物体的运动状态发生改变。理论力学研究力与机械运动改变之间的一般规律。物体的平衡(如相对于地球静止、匀速直线运动)是机械运动的特殊情况,所以理论力学也研究物体的平衡规律。但应该指出,在宇宙中没有绝对的平衡,一切平衡都是相对的和暂时的。

由于质点和质点系是力学研究的最基本的物质模型,因此,从知识体系上讲,理论力学中的力学定律、定理和基本方程适用于其他所有力学分支,是整个力学的重要基础。学习理论力学是学习和研究力学的起点。

物体的机械运动是生活和工程中最常见的运动,也是最简单的一种物质运动形式。在机械、航空航天、土木、交通、电力等重要工程领域中,大量的力学问题需要解决,其中大部分问题都涉及理论力学的基本概念和基本方法,因此,理论力学是现代工程技术的重要理论基础之一。它与其他专业知识结合,可以帮助我们解决实际工程技术问题,促进科学技术和社会经济的发展。作为一个工科大学生或工程技术人员,必须对此有足够的了解,很好地掌握这些理论基础,才能适应实际工作和社会发展的需要。

理论力学也是工科大学生的一门重要技术基础课。它为学习一系列后续力学和专业课程,如材料力学、机械原理、机械设计、流体力学、弹塑性力学和振动力学等提供基础,这些课程中的理论推导和计算,都需要经常用到本课程的基本原理和方法。

## 0.2 理论力学的体系和研究方法

理论力学是经过长期,反复的实践、深化和提高,逐步归纳总结出来的一个力学知识体系,通常分为三部分,即静力学、运动学和动力学。静力学研究物体平衡时作用力之间的关系;运动学从几何观点研究点和刚体的运动,而不考虑形成这些运动所需要的力;动力学研究作用于物体上的力与运动变化之间的关系。这种体



系是经过长期提炼、发展形成的,它适合理论力学知识的论述,符合人们的认知过程。本书就是按照这种体系编写的。

与物理学中其他领域一样,理论力学的研究方法有理论、计算和实验三种。理论分析的作用主要包括四个方面:

(1) 以公理和定律为基础,应用逻辑推理和数学推演,建立质点、质点系和刚体运动的各种基本定理和基本方程。

(2) 对于实际系统,根据实际情况和力学分析的需要,抓住主要因素、忽略次要因素,将其抽象为质点、质点系或刚体组成的力学模型(本课程主要研究刚体系统);再对力学模型进行准确的受力分析,几何、运动分析,然后应用力学基本定理和基本方程建立力学模型的具体力学方程,这样,就将实际系统转化成为一个数学描述,所以也称为数学模型。

(3) 应用各种数学工具寻求数学模型的解答。

(4) 对得到的解答进行分析,揭示物理意义和各种物理量的变化规律;对于复杂系统,还需要将解答与实验或实际观察结果进行比较,确定解答的准确度和适用范围。

本课程对第(1)点要进行比较系统、全面的学习,对第(2)、(3)、(4)点只进行一些简单问题的必要练习。

计算和实验两种方法,在理论力学范围内,主要用于复杂系统方程的求解、实际系统的实验验证、复杂环节力学特性的实验研究。鉴于理论力学课程的性质特点、课程的基础性和学时限制,本书基本上不涉及这方面的内容。但需要指出,如果条件容许,应该设计一些数值计算方面的题目、开设一些典型的理论力学实验,对学生进行课内或课外的训练,以加强学生的实际认识。

### 0.3 本书的主要内容和学习要求

本书共 15 章。

第 1~4 章为静力学内容,主要介绍静力学公理,各种常见约束的约束力特征,各种力系的特征、简化和平衡。力的平衡分析在所有力学课程中都要用到,希望学生通过学习掌握它的本质、技巧和解题方法。

第 5~7 章为运动学内容,主要介绍点运动的基本特征和基本计算方法,刚体的基本运动分析方法,点的合成运动分析方法,刚体平面运动分析方法。这些是运动学的最基本内容,一般工科专业的学生都应该通过课内或课外的学习和掌握它们。

第 8~15 章为动力学内容,主要介绍质点动力学的基本规律,动力学普遍定理,惯性力和达朗贝尔原理,虚位移原理和动力学普遍方程,拉格朗日方程以及碰撞。其中,动力学普遍定理和拉格朗日方程是动力学分析的最基本的方法和工具,

希望工程专业的学生要掌握这些知识,否则遇到稍微复杂一点的实际问题,就会概念混乱、分析片面、结果错误,甚至束手无策。

本书内容是根据课程大纲和目前工科各专业的教学需要安排的。全部讲完需要 80~90 学时,不同专业可以根据需要选用全部或部分内容。

我们希望学生在学习本课程时,做好以下两件主要的事情。

(1) 通过听课、自学、讨论,将课程内容理解透彻并融会贯通。

(2) 一定要独立完成必要的练习或作业,许多细节问题(如受力和运动分析)、具体分析过程、解决问题的思路 and 技巧等,必须通过练习才能真正体会和掌握。

# 第1章 静力学公理和物体的受力分析

本章介绍静力学的基本概念、静力学公理、平面力矩和力偶的定义及基本特性,常见的平面约束类型及约束力、受力分析和受力图。

## 1.1 基本概念

### 1. 刚体

任何情况下不变形的物体称为刚体,不变形是指物体上任何两点间的距离保持不变。如无特别指出,在本教材中的物体即指刚体。

### 2. 力

力的概念来自实践。人类在最早的劳动中就已经知道如何使用自己的体力。现代科学认为,力总是一个物体对另一个物体的作用,力是造成物体运动变化的原因。在宏观表现上,这种力可以是超距离的,也可以是由接触而产生的。一个物体放在桌子上,物体受到地球的引力(即重力)的作用,这是一个超距离的力;物体同时受到桌面的支承力,这是一个由接触产生的力。

实践表明,确定一个力,需要说明它的大小、方向和作用点,即一个力有三个要素。因此,一个力可以用一个定点矢量  $\boldsymbol{F}$  来表示,矢量  $\boldsymbol{F}$  的起点就是力的作用点,长度和方向分别代表力的大小和方向。顺便指出,本书一般用黑斜体字母来表示矢量,如  $\boldsymbol{F}$ 、 $\boldsymbol{G}$ 、 $\boldsymbol{e}$ ;对于需要用两个字母表示的线段矢量,采用两个字母上方加箭头的符号来表示,如  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 。

### 3. 单位制

国际单位制(international system of units, 简称为 SI units\*)已被全世界接受。在 SI 制中,长度单位为米(meter:m),时间单位为秒(second:s),质量的单位为千克(kilogram:kg),它们都是基本单位。力的单位为牛顿(Newton:N),它是由牛顿第二定律  $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$  导出的,即  $1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ ,这种单位也称为导出单位。

美国常用的单位制(U. S. customary system units)为 FPS 制,基本单位有:长度单位为英尺(foot:ft),时间单位为秒(second:s),力的单位为磅(pound:lb)。质量单位为斯拉格(slug),它是由牛顿第二定律导出的,即  $1\text{ slug} = 1\text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$ 。两种单位的换算关系如表 1.1 所示。

\* SI 是法文 *Système International d'Unités* 的缩写。

表 1.1 部分单位换算关系

| 物理量 | FPS 制  | SI 制        |
|-----|--------|-------------|
| 力   | 1 lb   | 4.448 2 N   |
| 质量  | 1 slug | 14.953 8 kg |
| 长度  | 1 ft   | 0.304 8 m   |

按 SI 制,当物理量的值很大或很小时,往往使用一个前缀符号来表示原量值的倍数,例如, $0.006\text{ m} = 6\text{ mm}$ , $50\,000\text{ N} = 50\text{ kN}$ 等。在 SI 制中常用的前缀符号与其代表的数量级关系如表 1.2 所示。

表 1.2 SI 制中前缀字符及其代表的数量级

| 倍数        | 前缀名称  | SI 制中的前缀符号 |
|-----------|-------|------------|
| $10^9$    | giga  | G          |
| $10^6$    | mega  | M          |
| $10^3$    | kilo  | k          |
| $10^{-3}$ | milli | m          |
| $10^{-6}$ | micro | $\mu$      |
| $10^{-9}$ | nano  | n          |

#### 4. 力系

作用于物体上的一群力称为力系。作用在物体上的力,可以在离散的点上作用,也可以在物体的一个区域上分布作用,因此,按作用形式可以将力分为集中力和分布力。分布力沿某条线分布,称为线分布力,比如锋利刀口对被切物体的作用力,细线的重力;分布力在某个面上分布,称为面分布力或面力,比如人行走时脚板对地面的作用力;分布力在物体的体积上分布,称为体力,如物体的重力。

#### 5. 平衡和平衡力系

**平衡** 物体相对于绝对静止的物体保持静止或匀速直线运动的状态。

**平衡力系** 力系中各个力对物体的作用效果彼此抵消的力系,或使物体保持平衡或运动状态不变的力系。因此,平衡物体上作用的力系就是平衡力系。

### 1.2 静力学公理

**公理 1(二力平衡公理)** 只有两个力作用的刚体平衡的充要条件是该两力等值、反向,且在同一直线上。

受二力平衡的刚体称为二力杆(体)。二力平衡公理只适用于刚体,不能用于变形体,一种典型的情况如图 1.1 所示,不计重量、不可伸长的细绳,在拉力  $F_T$ 、

$F'_T$  作用下保持平衡,但在压力  $F_P$ 、 $F'_P$  作用下不能平衡。



图 1.1 细绳在二力作用下的状态

(a) 细绳受拉平衡

(b) 细绳受压不平衡

**公理 2(加减平衡力系公理)** 受力刚体上加、减任意个平衡力系不会改变原受力刚体的状态。

**推论(力的可传性原理)** 刚体上的作用力可沿其作用线任意移动而不会改变对刚体的作用效果。

这一推论的证明很简单,如图 1.2 所示。由力的可传性原理可知,力对刚体的作用效果只需要确定大小、方向和作用线,因此,刚体上的作用力可以视为滑动矢量。

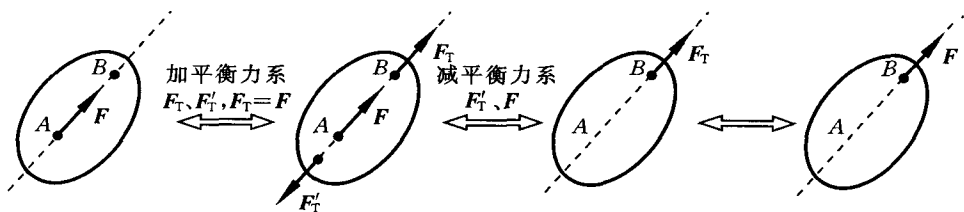


图 1.2 力的可传性原理证明图示

**公理 3(力的平行四边形法则)** 作用点相同的两力,可以用平行四边形法则合成为一个合力,不会改变对刚体的作用效果,如图 1.3 所示。

**推论(三力汇交平衡定理)** 若受三个互不平行的力作用的刚体处于平衡,则此三力必共面且相交于一点。

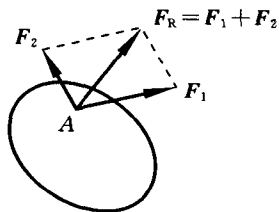


图 1.3 力的平行四边形法则

我们仅就三力已经共面的情况证明这一推论。如图 1.4 所示,由于三个力  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$  互不平行,其中任意两力,如  $F_1$ 、 $F_2$  必相交,设交点为  $O$ ;由公理 3,可将  $F_1$ 、 $F_2$  合成为合力  $F_{12} = F_1 + F_2$ ,剩下的  $F_3$  与  $F_{12}$  要平衡;由公理 1,  $F_3$  与  $F_{12}$  等值、反向且在同一直线上。这就证明了三力汇交平衡定理。

**公理 4(作用与反作用公理)** 相互作用的两个物体(刚体和变形体)间总存在等值、反向、共线且分别作用于两个物体上的一对力,此两力互为作用和反作用力。

**公理 5(刚化公理)** 将变形体视为刚体(刚化)则平衡状态不受影响,反之则不然。

这一公理只能用于变形体的平衡分析,但它是变形体平衡分析的基础,只是在

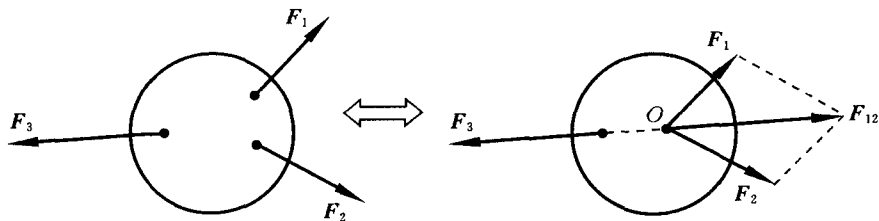


图 1.4 平面上三力汇交平衡的证明

以后的变形体力学(如材料力学、弹性力学)中,大家会不自觉地应用这一公理。

### 1.3 力系的等效

以上五个公理构成了静力学的基础,所有静力学的方法和结果都是基于静力学公理并经过推理、归纳得到的。实际物体或物体系统(简称物系)上往往作用有比较复杂的力系。静力学的基本任务就是将力系简化并分析其平衡,简言之,就是力系的简化和平衡。所谓力系的简化,就是将一个给定的复杂力系转化为一个对物体的作用效果等价的简单力系,这就牵涉到力系的等效问题。实际上,平行四边形法则就是一种力系等效规则,以后我们还要研究力系的其他等效方法。这里只指出,力系的等效就是将力系中的力按照静力学公理进行处理的一些操作,或者说,按静力学公理处理后得到的新力系与原力系是两个等效力系。

### 1.4 平面力矩和平面力偶

#### 1. 平面力矩

大家知道,一个装有转轴的物体,在外力  $F$  作用下( $F$  不平行于转轴、也不通过转轴)将会发生转动,如扳手拧螺帽。我们将这种现象加以扩展:对于没有安装转轴的物体,又设想在物体的任意点  $O$  安装一根转轴,如果点  $O$  在物体之外,设想将物体扩大再安装转轴,那么物体在力  $F$  作用下,将会绕转轴转动。这就是力具有使物体产生转动或转动趋势的效应。平衡的物体不转动,是因为物体上各个力对任意轴的转动效应相互抵消了。现在,假设物体在某个平面上运动,作用力  $F$  也在该平面内,在平面上任意选定一点  $O$ (称为矩心),设想通过点  $O$  的转轴垂直于该平面,如图 1.5 所示。实践证明,力使物体绕转轴的转动效应与力的大小  $F$  及力的作用线到矩心  $O$  的距离  $d$ (称为力臂)成正比,当力  $F$  的作用线通过点  $O$  时,物体就不能转动。由于现在只是在平面内考虑问题,因此定义:力的大小与力臂的乘积并冠以正负号称为力对点的平面力矩,

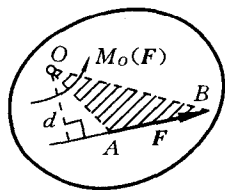


图 1.5 平面力矩

它是力  $F$  使物体绕转轴产生的转动效应的度量, 记为  $M_O(F)$ , 即

$$M_O(F) = \pm Fd = 2 \times S_{\triangle ABO} \quad (1.1)$$

其中, 正负号表示转向,  $S_{\triangle ABO}$  表示  $\triangle ABO$  的面积。为此, 需要事先确定一个参考正转向, 当所考虑的力矩与参考转向相同时为正, 否则为负。平面力矩在图中用一个弧形箭头表示, 如图 1.5 所示。

## 2. 平面力偶

我们仍然考虑所有力均在一个平面上的问题。在集中力系中有两种最简单的力系: 一种是单个集中力; 另一种便是力偶, 它是由两个等值、平行、反向的力  $F$ 、 $F'$

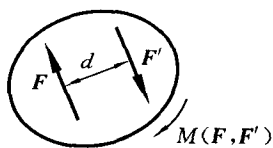


图 1.6 平面力偶

组成的力系, 如图 1.6 所示。力偶所在的平面称为力偶作用面, 力偶的两条力作用线之间的距离  $d$  称为力偶臂。实践证明, 力偶总是使物体绕垂直于作用面的轴产生转动效应, 这表明单个力偶是不平衡力系。容易证明, 力偶的两个力对作用面内任意点的力矩的代数和为常值 ( $\pm Fd$ ), 参考转向确定后, 正负号取决于

力偶的转向,  $\pm Fd$  称为力偶矩。根据上述力使刚体的转动效果用力矩来度量的结论可知, 力偶使刚体的转动效果用力偶矩来度量, 并且力偶使刚体的转动效果对任意矩心均相同。平面力偶在图中用一个弧形箭头表示, 如图 1.6 所示。因为力对作用面内的不同点的力矩一般是不同的, 因此, 一个力使刚体的转动效果与一个力偶使同一个刚体的转动效果不能相互抵消。所以说, 力偶不能用作用面内的一个力来平衡, 一个力偶只能由另一个大小相同、转向相反的力偶来平衡。

力偶可以在其作用面内任意移转, 而不改变它对物体的作用效果, 如图 1.7、图 1.8 所示。在图 1.7 中, 为使力偶作等效旋转, 第一步加两对相同的平衡力系  $F_P$ 、 $F'_P$ , 其中  $F_P = F$ , 并分别将  $F$  和  $F'_P$  合成  $F_R$ 、将  $F'$  和  $F_P$  合成  $F'_R$ , 第二步减去平衡力系  $F_R$ 、 $F'_R$ , 这样就将原来的力偶  $F$ 、 $F'$  等效旋转为力偶  $F_P$ 、 $F'_P$ 。当改变力

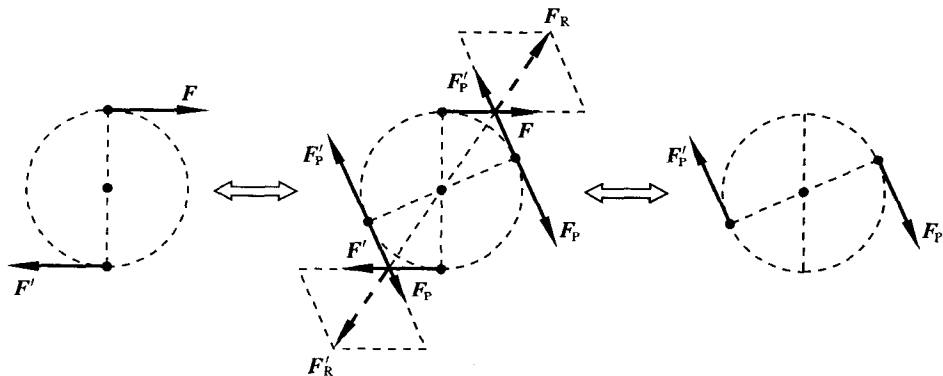


图 1.7 力偶的等效旋转

偶中力的大小和力偶臂长度时,只要保持力偶矩不变,力偶对物体的作用就不会变,如图 1.9 所示。

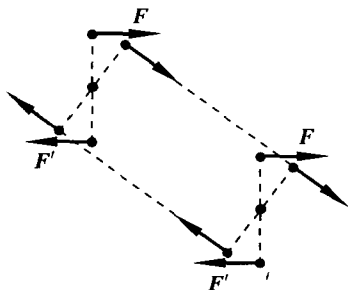


图 1.8 力偶的等效平移

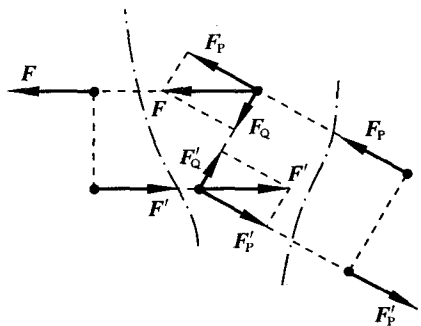


图 1.9 力偶的力偶臂及其力的等效变换

综上所述,可得力偶的性质如下:

- (1) 力偶既不是一个力,本身又不平衡,因此它是一个基本力系。
- (2) 力偶总是使物体产生绕垂直于其作用面的轴转动或转动趋势;力偶使刚体的转动效果用力偶矩来度量,记为  $M$ ,即

$$M = M(F, F') = \pm Fd \quad (1.2)$$

力偶矩  $M$  与矩心以及力偶在其作用面内的位置均无关。

- (3) 力偶可以在其作用面内任意移转,而不改变它对物体的作用效果;当改变力偶中力的大小和力偶臂长短时,只要保持力偶矩不变,力偶对物体的作用就不会变。

- (4) 一个力偶只能用另一个等值反向的力偶来平衡。

## 1.5 约束与约束力

一个物体的运动如果没有受到任何限制,则称此物体为**自由体**。但是,实际物体或物系的运动往往会受到环境条件或周围物体的限制,这种限制称为**约束**,受约束的物体称为**非自由体**。因此,非自由体与周围物体之间就有相互作用,进而也就有作用力与反作用力;非自由体受到的周围物体的作用力称为**约束力**(或**约束反力**)。外界作用于系统的、使之产生运动或运动趋势的力称为**主动力**;约束力是一种被动力,其大小和方向随主动力的变化而变化。

下面来分析几种常用约束的约束力。

### 1. 柔索约束

类型:绳子、胶带、链条等。

特点:只能受拉力,是一种单向约束,忽略柔索的自重且认为柔索不能伸长。

约束反力:柔索约束反力的作用线沿柔索的轴线方向,且使柔索受拉。如图 1.10 所示为几种典型的柔索约束。



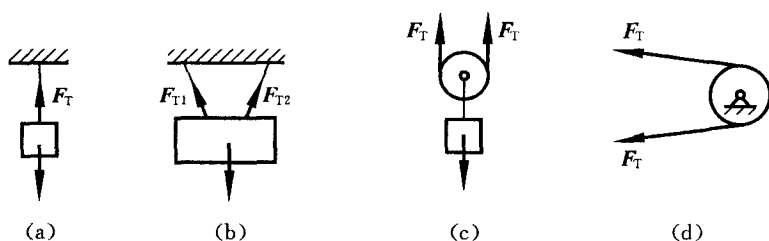


图 1.10 几种典型的柔索约束

(a) 单柔索 (b) 双柔索 (c) 静态条件下跨过动滑轮的柔索 (d) 静态条件下跨过定滑轮的柔索

## 2. 光滑接触面(线)约束

类型:面-面接触、面-线接触、面-点接触、线-线接触、线-点接触,如图 1.11 所示。

约束反力:约束反力的作用线沿两物体接触点处的公法线,指向被约束物体。

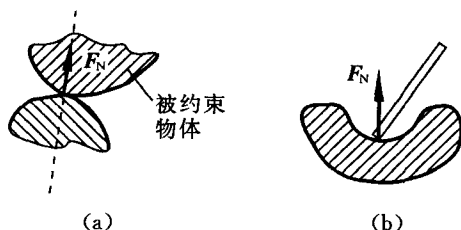


图 1.11 光滑接触面约束

(a) 面(线)-面(线)接触 (b) 面(线)-点接触

## 3. 铰链约束

构成及符号:由构件和一个销钉连接而成,其结构简图和表示符号如图 1.12 所示。

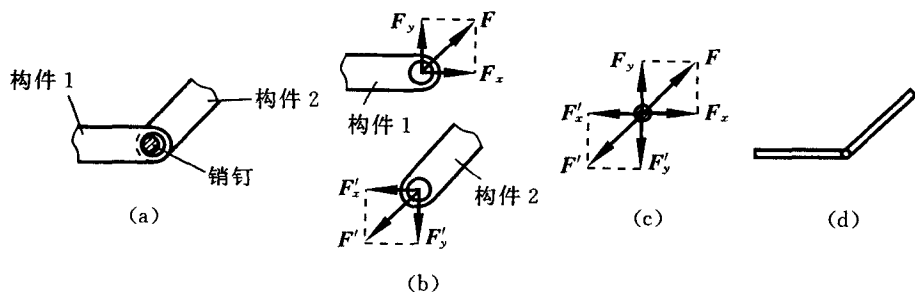


图 1.12 铰链及其约束力

(a) 连接两个构件的铰链 (b) 铰链的约束力 (c) 销钉的受力 (d) 铰链表示符号

特点:不能传递力矩和力偶。

约束反力:铰链的约束反力是指销钉对各构件的作用力,这些约束反力通过销钉