

陈梦成 | 著

三维断裂力学 问题求解

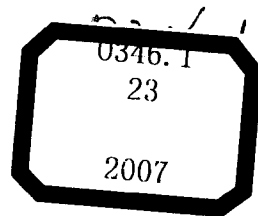
——超奇异积分方程方法

Solution of 3D Crack Problems

——the Hypersingular Integral Equation Technique



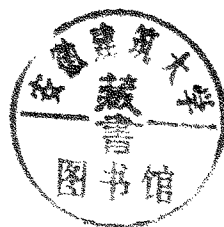
西南交通大学出版社
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)



三维断裂力学问题求解

——超奇异积分方程方法

陈梦成 著



西南交通大学出版社

·成都·

内 容 简 介

本书是在作者多年来科研成果的基础上总结而成的。作者使用超奇异积分方程方法,从断裂力学角度对三维断裂问题的求解理论和计算方法作了系统深入的介绍,其中包括均质体三维断裂、界面断裂、横观各向同性体三维断裂和压电体三维断裂等。作者不仅在理论上作了严格分析,而且还对各类断裂问题的具体求解建立了相应的解析数值方法,因而本书的理论和方法可直接用于工程实际。

本书可作为力学、应用数学、结构和机电工程等专业本科高年级学生和研究生的教材或教学参考书,亦可供从事固体力学、应用数学及工程结构强度断裂研究的大学教师和科技工作者参考。

----- 图书在版编目 (C I P) 数据

三维断裂力学问题求解: 超奇异积分方程方法 / 陈梦成著. —成都: 西南交通大学出版社, 2007.6
ISBN 978-7-81104-579-6

I . 三… II . 陈… III . 断裂力学—奇异积分方程 IV .
0346.1

---中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 073128 号---

三维断裂力学问题求解

——超奇异积分方程方法

陈梦成 著

*

责任编辑 张宝华

封面设计 本格设计

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm×260 mm 印张: 18

字数: 450 千字

2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81104-579-6

定价: 35.00 元

图书如有印装问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562



作者简介

陈梦成，男，1962年10月出生。现为华东交通大学土木建筑学院教授、科研处处长，北京交通大学兼职教授、博士生导师，中国力学学会理事，日本机械工程师协会会员。

1984年和1987年在北方(现北京)交通大学先后取得学士和硕士学位，1992年至1997年在日本岗山理科大学和上海交通大学攻读博士学位，并于1997年获得博士学位，1998年到日本九州工业大学作客座研究员，2000年到香港大学作客座副教授，2000年在华东交通大学破格晋升为教授，2001年至2003年在日本九州工业大学做博士后研究。先后主持和承担过国际合作项目3项、国家自然科学基金项目3项、江西省新世纪主要学科与技术带头人项目、江西省科技厅和教育厅重大联合招标项目和教育部重点研究项目等累计省部级项目12项，2003年获江西省自然科学二等奖1项。出版著作1部，在国内学术期刊上发表论文95篇，其中SCI、EI收录36篇，被他人SCI引用50余次。主要研究方向为计算力学、新型材料和结构、复合材料损伤和断裂力学。2000年获得国务院政府特殊津贴，2003年获“优秀中国留学回国人员”称号，2003年被确定为江西省新世纪主要学科与技术带头人，2004年入选江西省“百千万人才工程”第一、二层次人选，2006年被评为江西省“十五”期间优秀硕士生指导教师。

序

陈梦成教授撰写的《三维断裂力学问题求解——超奇异积分方程方法》一书汇集了作者近年来在国内外的研究成果。书中探索和介绍了将现代 Hadamard 有限部积分概念结合数学极限理论有效地应用于各向同性均质弹性体材料、横观各向同性材料和压电材料的三维断裂力学问题求解的可能性。他将三维裂纹问题归结为求解一组超奇异积分方程，并提出了相应的数值求解技术；严格从三维理论出发，采用超奇异积分的主部分分析方法研究了三维裂纹前沿方程解的性态指数和奇异应力场、电位移场；精确地获得了用三维裂纹前沿位移间断/电势间断表示的应力强度因子/电位移强度因子的表达式。

本人认为作者在绪论中客观地介绍了国内外最新研究成果和本书在内容方面的特点。应该指出的是，陈梦成教授所著的《三维断裂力学问题求解——超奇异积分方程方法》一书，不但在三维断裂力学方面提供了最新的理论和数值分析方法，这一方法可直接用于工程实际问题，而且在推进三维断裂力学发展方面作出了贡献，是有力的补充。

中国科学院院士
清华大学固体力学教授

黄克智

2006年10月26日

前 言

本书叙述了三维断裂问题的求解理论和计算方法. 由于在机械、土木、电子、航空航天、采矿、船舶、电子信息与航空航天等工程中, 经常遇到工程材料和结构构件的断裂问题, 那么如何对它们进行准确的断裂力学评价, 在材料优化设计和结构安全设计等方面都具有重要的学术理论和实际指导意义. 在工程实际中, 只有当构件内的裂纹沿某方向的尺寸很大时, 才能把它当作穿透性裂纹而近似地作为平面问题来处理. 但是, 实际构件中, 碰到的大都是断裂分析中的另类重要问题, 如内埋裂纹与表面裂纹等非穿透性裂纹. 而这类问题在弹性理论分析中属于空间(三维)问题, 即所研究的点的应力和应变都是三维的, 又由于三维问题在数学上很繁琐, 其理论比较复杂, 在这方面虽然有些研究, 但也只是在少数情况下得到了解决, 而且显得分散与零乱, 故三维断裂问题的求解理论和分析方法的建立就显得极为重要.

对于这样一个重大问题, 目前尚缺乏一本系统而又较详尽地阐述三维断裂问题的专著, 使读者能在较短的时间内对之有一个概括的了解, 以便在此基础上做出新的努力. 然而, 要写这样一本书也是极其困难的, 主要是由于存在数学与力学上的困难. 本书作者冒昧地进行这方面的尝试性工作, 一是想抛砖引玉, 给整个断裂力学学科发展添砖加瓦, 尽绵薄之力; 二是鉴于作者长期从事断裂力学解析数值方法的研究, 及在参与完成国家教委博士点基金项目(断裂力学的强奇异积分方程方法)、国家自然科学基金项目(三维界面断裂力学中几个基本问题, 编号: 19672036)、日本学术振兴学会博士后基金项目(压电材料中三维裂纹问题的超奇异积分方法, 编号: P01205)、两个江西省自然科学基金项目(横观各向同性材料中三维断裂力学分析, 编号: 0502000; 压电材料中三维裂纹问题的超奇异积分方法, 编号: 0112001)中, 对三维断裂力学问题所作的较系统的研究. 此书就是在这些研究中所获得的成果的总结.

本书所论述的方法最初源自于1923年Hadamard首先提出的有限部积分概念. 正如书中所述的, 后经过Kutt、Ioakimidis、高田、小泉、汤任基、秦太验、乐金朝和本书作者等学者的不断发展, 此方法在断裂力学领域显示出强大的应用潜力. 它的基本思想是利用没有裂纹情况下体中应力场与由未知裂纹表面位移间断诱发的应力场叠加后使裂纹表面应力自由的原理. 因此, 本书的方法有效而且可以用来模拟裂纹扩展, 特别适用于短裂纹问题和应力梯度陡变区域内裂纹扩展问题. 它只需要对问题的物体几何形状进行近似描述, 即可得到准确解. 这与有限元方法相反. 在有限元法中, 虽然对问题的物体几何形状的描述是准确的, 但得到的结果是近似的, 而且费时费力. 书中所阐述的方法, 其求解过程比较细致, 既严密又易懂, 适用于广大工程师和研究人员.

本书是围绕作者多年的研究成果而撰写的一本专著. 至于其他作者的一些工作, 在后面涉及时再加以提及. 但由于篇幅有限, 国内外有关重要著作可能有所遗漏, 在此请予谅解. 本

书的重点是使用超奇异积分方程,从数学弹性力学边值问题的角度,系统地阐述三维断裂问题的求解原理.其中包括断裂问题的数学提法,问题的奇异积分方程的建立,裂纹前沿的性态分析,以及在此基础上的解析数值法的建立和典型算例的介绍.此外,作为基础,书中对近代断裂力学文献中的主要数学方法,如解析函数、积分变换、奇异积分方程、对偶级数和对偶积分方程等均作了扼要介绍,并对它们的具体应用都以例子的形式作了说明.因此,本书对学习和掌握断裂力学的解析数值方法,并由此进一步开展二维和三维断裂力学的应力奇异性研究有一定的参考价值.

这里特别需要指出的是:本书在阐述第二章和第三章时,承蒙作者恩师上海交通大学教授、博士生导师汤任基先生的许可,引用和转载了其著作《裂纹柱的扭转理论》中基础部分的内容.在此,对先生的厚意致以崇高的敬意.另外,我的研究生余会琴,在她的研究生阶段所作的有些算例也收进了本书,在此,也表示感谢.

本书出版之际,衷心地感谢国家自然科学基金委员会、日本学术振兴学会、教育部博士点基金委员会、江西省自然科学基金委员会、华东交通大学和西南交通大学出版社等单位曾经给予的大力支持与帮助.

我的妻子姜羔在我完成本书的过程中,协助做了许多具体的工作,并提出了一些宝贵的意见,在此表示谢意.

由于三维断裂力学内容体系还很不成熟,限于作者水平,书中叙述的内容可能存在一些不恰当甚至错误的地方,敬请同行专家和读者批评指正.

陈梦成

2006年秋于华东交通大学

目 录

1 绪 论	1
参考文献 1	5
2 断裂力学中的几个基本概念	12
2.1 宏观断裂力学发展史	12
2.2 楔形体顶端附近的弹性力学解	14
2.3 J 积分	31
2.4 裂纹静态扩展的断裂准则	34
参考文献 2	41
3 断裂力学中的数学基础	43
3.1 Airy 应力函数	43
3.2 平面问题的复变函数方法	45
3.3 积分变换方法	49
3.4 解析函数方法	59
3.5 Fredholm, Volterra 和 Abel 积分方程	74
3.6 Cauchy 型奇异积分方程及其数值法	77
3.7 多节积分方程与多节级数方程	94
3.8 有限部积分与超奇异积分方程	102
参考文献 3	123
4 各向同性材料的三维断裂力学问题	126
4.1 单片片状裂纹问题的位移场和应力场	126
4.2 片状裂纹问题的超奇异积分方程	128
4.3 片状裂纹前沿的未知解的性态分析	129
4.4 片状裂纹前沿的奇异应力场分析	131
4.5 片状裂纹前沿封闭解	133
4.6 超奇异积分方程的数值计算方法	137
4.7 数值应用算例与结果讨论	142
附录 4.A	156
附录 4.B	157
参考文献 4	158

5 双相材料界面三维断裂力学问题	161
5.1 片状裂纹的应力场	161
5.2 平行于结合界面的片状裂纹问题的超奇异积分方程	163
5.3 垂直于结合界面的片状裂纹问题的超奇异积分方程	165
5.4 结合界面附近片状裂纹问题的若干算例	167
5.5 两相材料结合界面三维断裂力学	175
5.6 轴对称环形界面片状裂纹问题分析	185
5.7 与两相材料结合界面垂直相触的片状裂纹分析	192
附录 5.A	202
附录 5.B	204
参考文献 5	209
6 横观各向同性材料的三维断裂力学问题	212
6.1 单片片状裂纹问题的位移场和应力场	212
6.2 片状裂纹问题的超奇异积分方程	214
6.3 片状裂纹前沿的未知解的性态分析	215
6.4 片状裂纹前沿的奇异应力场和断裂参数分析	217
6.5 片状裂纹前沿封闭解	218
6.6 超奇异积分方程的数值计算方法	224
6.7 数值应用算例与结果讨论	228
附录 6	230
参考文献 6	234
7 压电材料的三维断裂力学问题	236
7.1 裂纹面电学边界条件	237
7.2 基本方程	238
7.3 点力和点电荷基本解	240
7.4 混合边界积分方程	245
7.5 片状裂纹超奇异积分方程组	250
7.6 裂纹前沿应力和电位移奇异指数	252
7.7 裂纹前沿奇异应力和电位移场	253
7.8 应力和电位移强度因子以及能量释放率	256
7.9 受轴对称载荷作用的圆形平片裂纹	257
7.10 均布载荷作用下的椭圆形片状裂纹	260
7.11 超奇异积分方程的数值解法	264
7.12 常见若干典型形状平片裂纹数值算例	269
附录 7	276
参考文献 7	277

1 绪 论

断裂力学是 20 世纪后半叶固体力学领域的重要成就。它起源于 Irwin 的一篇文章, 或者还可更早地追溯到 Griffith 的工作。断裂力学作为一门研究固体材料实际强度的学科, 已经在机械、化工、土木、采矿、船舶、电子元件和航空航天等工程结构的强度设计、安全可靠分析和缺陷评定的规范与标准中得到广泛应用, 大大提高了工程部门的设计与制造水平, 提高了控制灾难性事故的能力。

在这门学科中, 平面断裂力学的原理和分析方法都已系统而完整地建立起来, 是最成熟的部分。它的研究成果也较为详尽地载入应力强度因子手册。然而, 裂纹问题严格来讲都是三维断裂问题。至今为止, 虽然在三维断裂理论与分析方面已取得一些成果, 但研究进展十分缓慢, 而且仅诸见于分散的文献中。作为专门的学术书籍仅有 Kassir 和 Sih 合著的《Three-dimensional crack problems》一本。这本专著是 20 世纪 70 年代完成的, 限于解析的工作。从科研和工程的角度, 都非常需要一本系统阐述三维断裂理论及其实用分析方法的专著。

在三维断裂力学问题的研究中, 大多数的都是从解析开始的, 具有代表性的是 Sneddon 以及 Sih 和 Kassir 等人的工作。这些工作是利用积分变换方法, 获得了无限体或半空间体中圆形或椭圆形片状裂纹的解析解。Hartranft 等使用 Williams 特征函数展开方法, 对裂纹前沿光滑点处的奇异应力场进行了分析。Smith 和 Alaui 利用 Schwarz-Neuman 交替法求得了半空间体圆形片状裂纹的半解析解数值解。以上工作大都是在 1970 年前后完成的, 而且是有关均质各向同性弹性体的。这一时期, 还有一些学者也做了有关的解析工作, 这里不再一一介绍了。

20 世纪 80 年代始, Dahan 用积分变换方法考察了横观各向同性弹性体中圆形片状裂纹前沿的应力强度因子及奇异应力场。Sih 和 Chen、Fabrikant 应用势函数理论研究了横观各向同性弹性体中椭圆形接触与片状裂纹问题。

关于压电材料中三维断裂力学问题, Sosa 和 Pak 利用特征函数分析方法, 分析了压电裂纹前沿光滑点处的奇异应力场。王彪采用积分变换的方法研究了椭圆形片状裂纹问题。王子昆等人利用势函数方法讨论了圆形和椭圆形片状裂纹前沿电弹性强度因子及奇异电弹性场问题。Kokan 等人运用 Radon 积分变换方法考察了横观各向同性压电材料中椭圆夹杂或圆形片状裂纹引起的应力和电位移场问题。陈伟球和盐屋以及 Karapetian 等人使用 Fabrikant 的函数理论, 获得了横观各向同性压电弹性体中圆形片状裂纹的解析解。

必须指出: 三维断裂力学问题十分复杂, 除了应考虑裂纹端部三维效应外, 还应考虑材料的性质和载荷工况等, 解析方法只限于几何构形和材料、载荷比较特殊的简单问题, 并且需要高超的数学才能, 因此, 与工程问题一样, 多数三维断裂力学问题有赖于数值分析。

近 20 年来,随着计算机的高速发展与普及,数值计算分析已成为三维断裂力学问题研究领域中的一个重要方法,其中使用较多的数值分析方法有有限元方法和边界元方法。尽管有限元方法由于具有计算简单和通用性强等特点,目前应用广泛,而且其技术也已基本成熟,但有限元解析性相对较弱,在区域内需要划分网格,特别是在高梯度应力区域内(如裂尖端部)需要加密网格,才能获得较高精度的数值解。因此,用有限元方法计算三维断裂力学问题时,计算工作量很大,费时费力,这是它的主要缺陷。为了克服这一缺陷,许多学者考虑在裂纹前沿引入奇异单元,使得裂尖端部附近应力获得 $r^{-1/2}$ 阶奇异性,但由于这些单元比较特殊,需要特殊处理,因此显得非常麻烦。1976 年,Barsoum 采用等参奇异单元求解三维断裂力学问题,他将等参元边上的中间点移到 $1/4$ 边长的位置上。这种畸变等参元使得裂尖端部附近应力获得 $r^{-1/2}$ 阶奇异性,相当于取得了应力首项,不过单元内部角分布规律不完全符合真实情况,影响了精度。另外,该方法需要根据位移场用最小二乘法推求应力强度因子,增加了计算工作量,并且计算结果与计算选择点有关。尽管如此,这种方法仍然得到了进一步的应用和发展。柳春图等人采用局部-整体分析法,即将裂尖区域严格的“局部解”与结构整体分析中的各种常规的解析或数值方法相结合,对含三维裂纹构件进行断裂分析。Shang 等人采用有限元方法对三维压电断裂力学问题进行了分析。总之,有限元方法是一种纯数值解法,需要对整个裂纹体进行离散,大型三维断裂分析成本非常昂贵,同时它的精度也尚待进一步论证。

边界元是近 30 年发展起来的一种数值方法。由于边界元方法能将所研究的问题的控制微分方程转换成边界上的一组积分方程,使得问题的单元离散只需要在边界上进行,因而问题的维数比原来少一维,计算工作量为减少。另外,由于边界元法中区域内部的物理量仍由解析表达式给出,因此,数值结果精度高。它特别适用于求解断裂力学问题。最早使用该方法求解三维断裂力学问题的是 Cruse 和 Buren,他们采用子域方法,将裂纹问题化为一般的边值问题处理。此后,有不少研究者采用这种方法来求解三维断裂力学问题。Tan 和 Fenner 采用八节点四边形单元法计算了几个片状三维裂纹的应力强度因子,同时也从数值上研究了裂纹前沿的奇性指数。Luchi 等人在裂纹前沿使用奇异单元,进一步提高了数值结果的精度。以上几位学者仅仅讨论了 I 型片状裂纹问题,而且也比较简单。Shippy 和 Rizzo 采用边界元法中的子域法结合奇异单元研究了三维裂纹问题,获得了圆形片状裂纹的数值结果,但这种方法用于求解 II 和 III 型问题时,计算精度相对要低一些。结城和许金泉用边界元法研究了三维界面断裂力学问题。在我国,边界元用于断裂力学问题研究也受到广泛重视。在杜庆华和嵇醒等人的倡导下,已开展了 20 多年,并取得了许多重要成果。张永元对等参奇异单元在求解三维裂纹问题中的应用进行了详细地讨论,提出了一种新的等参奇异单元,并且发现若在奇异单元与一般等参单元之间引入过渡单元会进一步提高数值结果精度。柴国钟等人用混合边界元方法分析了多裂纹的相互作用以及容器表面椭圆形片状裂纹问题。用边界元法研究断裂力学问题,通常需要采用分域技术,增加了不必要的未知节点量,加大了对内存的需求,降低了计算机计算效率。

体积力法是一种间接边界元法,是以叠加原理为基础,先把一个有裂纹问题转换成一个无裂纹问题,然后假定在裂纹边界地方存在二重虚拟边界,并在其上面作用着满足边界条件的体积力密度对或体积力密度。在体积力法中,为提高数值计算精度,通常将体积力密度对或体积力密度分解为基本密度函数与权函数之积,而基本密度函数反映了裂纹前沿奇异现象

并与裂纹形状有关,权函数通常在数值计算中是未知待求的。**Murakami** 详细讨论了以单元节点未知量作为权函数的边界积分数值求解方法,并且给出了几类不规则形状的三维裂纹前沿应力强度因子。后来,**Murakami** 采用该法进一步研究了任意形状的三维表面倾斜裂纹问题。用体积力法求解三维裂纹问题的还有石田、野口等人。**Noda** 和 **Miyoshi** 以及王清和本书作者在讨论三维表面裂纹和矩形裂纹问题时,将未知待求的权函数近似为多项式,大大提高了数值计算结果精度。体积力法的一个明显的缺点是缺乏明确的物理意义,因而,在日本以外并没有得到广泛的推广应用。

近年来,在三维断裂力学中还发展了一种由边界积分方程演化过来的奇异积分方程方法。其中最常用的有两种类型的奇异积分方程:一种是主值型奇异积分方程,又称强奇异积分方程,这种方程在 **Cauchy** 主值意义下收敛;另一种是超奇异积分方程,这种方程在普遍意义和主值意义下均是发散的,此时其计算必须依据 **Hadnard** 有限部积分概念。

Guidera 和 **Lardner** 是最早用主值型奇异积分方程方法分析任意形状片状三维裂纹问题的人。他们首次建立了一组以裂纹表面位移间断的切向导数为未知函数的二维奇异积分方程。该组方程只能在 **Cauchy** 主值意义下收敛,故称二维主值型奇异积分方程。随后,**Cruse**, **Weaver** 以及 **Balas** 和 **Sladek** 也先后分别得到了与此类似的奇异积分方程,并提出了各自的方程数值求解方法。**Bui** 使用 **Kupradze** 单层势函数和双层势函数独立导出了任意形状片状三维裂纹问题的主值型奇异积分方程,方程中的未知函数为势函数的切向导数,与 **Weaver** 的位移间断的切向导数相当。二维主值型奇异积分方程方法存在以下缺陷:① 没有可供实际应用的解析理论;② 缺乏很好的求积公式;③ 未知函数在裂纹面上存在奇异性;④ 耦联度大。基于上述原因,二维主值型奇异积分方程方法在理论分析和数值求解方面都存在极大困难,故该方法在以后的研究中并没有得到进一步的推广应用。

超奇异积分方程方法最初是在 1982 年由希腊学者 **Ioakimidis** 引入三维断裂力学问题时使用的。他使用 **Hadamard** 的有限部积分概念和方法,从理论上严格地导出了裂纹面上受法向载荷的片状三维 I 型裂纹问题的超奇异积分方程。随后,他又在本章文献[71]中进一步证明了该方程在裂纹前沿的点上也是成立的,从而为超奇异积分方程方法在三维断裂力学中的应用奠定了理论基础。**Takakuda** 和 **Koizumi** 以及 **Linkov** 和 **Mogilevshaya** 分别获得了受一般任意载荷作用下的任意形状片状三维裂纹问题的超奇异积分方程组。超奇异积分方程中的未知函数为位移间断,它在裂纹前沿有界,函数性质比较好,能够从积分方程中直接获得数值解,因此,有利于改善断裂力学问题的分析计算精度。该方法亦称位移间断法。1990 年,汤任基首次将这一方法介绍给国内同行学者,尔后,超奇异积分方程方法在我国三维断裂力学问题研究领域得到了蓬勃发展。秦太验利用超奇异积分方程方法讨论了均质各向同性体中的三维断裂力学问题,并建立了超奇异积分方程的边界元数值解法。汤任基和秦太验使用超奇异积分方程方法研究了均质各向同性体中的片状裂纹前沿的奇异应力场。赵明喈和刘元杰也用此方法分析了均质各向同性体中的三维断裂力学问题。乐金朝将超奇异积分方程方法拓展到两相材料三维断裂力学问题研究领域。

本书作者陈梦成于 20 世纪 90 年代中期承蒙恩师汤任基先生点拨,开始涉猎三维断裂力学问题研究领域。通过长期的研究及结合指导研究生工作,在三维断裂力学问题研究方面作了系统的工作,这些成果总结将在本书的第四章至第七章给出。

对于均质、各向同性体中三维断裂力学问题,陈梦成和汤任基采用复变函数法首次给出

了圆形片状裂纹问题的超奇异积分方程的解析解,随后又通过将积分方程中的未知位移间断近似为反映裂纹前沿应力奇异现象和裂纹形状的基本密度函数与幂级数形状的权函数之积,巧妙地引入椭圆坐标系,获得了椭圆片状裂纹问题的超奇异积分方程的精确解。幸筱流、陈梦成和汤任基研究了椭圆形片状裂纹问题的超奇异积分方程的数值解法。数值计算结果表明:将积分方程中的未知位移间断近似表示为基本密度函数与正交多项式之积,这样大大提高了问题的计算精度。以后陈梦成、余荷根和汤任基又进一步将该做法延伸到分析一般任意片状三维裂纹问题。余会琴和陈梦成将超奇异积分方程方法与普通边界元结合,为任意形状的片状裂纹问题建立了解析数值法。

陈梦成首次使用超奇异积分方程方法对两相材料三维界面断裂力学问题的理论及其数值求解方法进行了全面和系统的讨论,取得了许多有用的理论和数值结果。陈梦成和汤任基以及陈梦成和野田尚昭使用 Neuber-Papkovich 位移势函数方法,先后分别导出了两相材料空间问题基本解的显示张量表达式和一般普通表达式,随后引进了裂纹两侧表面位移的间断,求得了单片裂纹问题基本解。陈梦成和汤任基利用单片裂纹解、Taylor 级数展开以及求极限的方法,将两相材料的界面裂纹问题归结为求解一组超奇异积分-微分方程,并严格地从三维弹性理论出发,进一步运用超奇异积分的主部分分析方法,分别求得了三维界面裂纹前沿应力奇性指数、奇异应力场,这些结果都是过去的文献里没有的。在文献[85, 96]中,陈梦成和汤任基等人推导了三维界面裂纹前沿应力强度因子的计算公式及其扩展时能量释放率的计算表达式,并为三维界面裂纹问题的超奇异积分-微分方程组建立了 Chebyshev 数值求解方法。在三维界面裂纹问题分析中,为进一步提高数值计算的精度,陈梦成和野田尚昭提出了一种新的求解超奇异积分-微分方程组方法,在该方法中所采用的基本密度函数真实地反映了三维界面裂纹前沿应力奇异现象。对于与界面垂直接触的裂纹,本书作者也做了一些有益的研究。汤任基和陈梦成采用超奇异积分方程方法研究了片状三维裂纹与材料界面垂直时的端点性态,分别求得了应力奇性指数和奇异应力场。在此基础上,本文作者对这类问题的求解建立了相应的解析数值法,并给出了许多有用的数值解。另外,陈梦成和野田尚昭等人还分析了与两相材料界面平行的片状三维裂纹问题,讨论了片状裂纹与界面的距离、裂纹形状比和不同材料组合对应力强度因子的影响,以图表形状给出,得出了一些有工程指导意义的结论。

关于横观各向同性材料中的三维裂纹问题,本书作者陈梦成开展了比较系统的严格求解方法的研究。这类问题的求解都是基于超奇异积分方程方法。在文献[106, 107]中,陈梦成首次使用 Hadamard 型有限部积分概念,导出了任意形状的片状裂纹的超奇异积分方程。对于裂纹前沿应力奇异指数和奇异应力,使用超奇异积分的主部分分析方法,精确地求得了这些应力奇异指数和奇异应力的分布规律,并对裂纹前沿的奇异应力定义了应力强度因子以及裂纹局部扩展所需的能量释放率。在以上成果的基础上,陈梦成在文献[108]中,进一步根据裂纹前沿的应力奇异现象,巧妙引入椭圆坐标系,获得了圆形和椭圆形片状裂纹前沿应力强度因子的精确表达式。最近,陈梦成及其学生又将这类问题的超奇异积分方程与普通边界元方法结合,系统地研究了任意形状的片状裂纹问题的解析数值求解方法,得到了若干典型片状裂纹的数值结果。这些理论和数值结果,对推动三维断裂力学的发展将发挥积极的作用。

最后关于三维压电断裂力学问题,虽然已有了一些解析方面的研究工作,但仅限于圆形

片状裂纹。赵明喈等人曾经用奇异积分方程方法研究了三维压电陶瓷断裂问题,但所得结果也仅限于圆形片状裂纹。对于一般情形的片状裂纹问题,大概是由于数学和力学上的困难,目前还未发现国内外的其他研究工作。

本书作者陈梦成对三维压电断裂力学中几个基本问题做了全面而系统的理论与数值分析。在文献[113]中,陈梦成依据丁皓江和梁剑所建立的压电弹性体中的势函数方法,求得了压电材料空间问题的点载荷和点电荷作用下的基本解。在此基础上,陈梦成使用 Hadamard 的有限部积分原理,将压电三维断裂力学问题归结为求解一组超奇异积分方程,并获得了轴对称均布载荷作用下圆形片状裂纹的精确解,使用二维超奇异积分方程的主部分析方法,求得了任意片状裂纹光滑边界前沿电弹性场的奇异指数以及相应的奇异电弹性场。在文献[116]中,陈梦成还对文献[115]中所建立的一组超奇异积分方程建立了相应的数值求解法,得到了若干典型片状裂纹的数值结果。类似地,陈梦成等人讨论了 I 型和剪切型载荷作用下几个基本的三维压电断裂力学问题,并给出了相应的数值算例。关于矩形片状裂纹问题,陈梦成和张安哥使用上面取得的成果对其进行了数值分析。徐健和陈梦成根据三维裂纹前沿电弹性场的奇异现象,巧妙地通过引入椭球坐标系,获得了有关椭圆类片状裂纹问题的超奇异积分方程的解析解,并将其代入电弹性场因子的定义式,求得了电弹性场因子的精确表达式。

本书作者陈梦成的关于三维压电断裂力学方面的许多研究成果具有重要的理论学术价值和工程指导意义,丰富了压电断裂力学的内容。

参 考 文 献 1

- [1] Irwin GR. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J Appl Mech*, 1957, 24: 361~364
- [2] Griffith AA. The phenomena of flow and rupture in solids. *Phil Trans Roy Soc*, 1920, A221: 163
- [3] Tada H, Paris PC, Irwin GR. The stress analysis of cracks handbook. Hellertown, Pa: Del Research Corp, 1973
- [4] 中国航空研究院. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社, 1981
- [5] Murakami Y. Stress intensity factors handbook. Beijing: World Publishing Corporation, 1989
- [6] 中国航空研究院. 应力强度因子手册(增订版). 北京: 科学出版社, 1993
- [7] Kassir MK and Sih GC. Three-dimensional crack problems, in *Mechanics of Fracture 2*. Leyden: Noordhooff International Publishing, 1975
- [8] Sneddon IN and Lowengrub M. Crack problems in the classical theory of elasticity. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969
- [9] Sneddon IN and Tweed J. The stress intensity factor for a penny-shaped crack in an elastic body under the action of symmetric body forces. *Int J FractM*, 1989, 3: 291~299
- [10] Kassir MK and Sih GC. Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loading. *Trans ASME J Appl Mech, Series E*, 1966, 33: 601~611
- [11] Sih GC. A review of the three-dimensional stress problem for a crack plate. *Int J Fract*, 1971, 7: 39~61

- [12] Kassir MK. The distribution of stress around a flat parabolic crack in an elastic solid. *Engng Fract Mech*, 1971, 2: 373~385
- [13] Shah RC and Kobayashi. Stress intensity factor for an elliptical crack under normal loading. *Engng Fract Mech*, 1971, 3: 71~96
- [14] Hartranf RJ and Sih GC. The use of eigenfunction expansions in the general solution of three-dimensional crack problems. *J Math Mech*, 1969, 19: 123~138
- [15] Williams ML. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Trans ASME J Appl Mech, Series E*, 1952, 19: 526~528
- [16] Smith FW and Alavi MJ. Stress intensity factors for a penny-shaped crack in a half space. *Engng Fract Mech*, 1971, 3: 241~254
- [17] Kantorovich LV and Krylov VI. Approximate methods of higher analysis. New York: Interscience Publishers, Inc, 1964
- [18] Dahan M. Stress intensity factor for an infinite transversely isotropic solid containing a penny-shaped crack. *J Phys*, 1980, 41: 213~215
- [19] Dahan M. Stress distribution in a transversely isotropic solid containing a penny-shaped crack. *Arch Mech*, 1981, 33: 415~428
- [20] Sih GC and Chen EP. Cracks in composite materials. In: Sih GC, ed. *Mechanics of Fracture 6*. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers bv, 1981
- [21] Fabrikant VI. Applications of potential theory in mechanics. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publ., 1989
- [22] Fabrikant VI. Mixed boundary mixed value problems of potential theory and their applications in engineering. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publ., 1991
- [23] Sosa HA and Pak YE. Three-dimensional eigenfunction analysis in a piezoelectric material. *Int J Solids Struct*, 1990, 26: 1~15
- [24] Wang B. Three-dimensional analysis of a flat elliptical crack in a piezoelectric material. *Int J Engng Sci*, 1992, 30: 781~791
- [25] 王子昆. 横观各向同性压电材料中币形裂纹. *力学学报*, 1994, 26: 49~60
- [26] Wang ZK, Huang SH. Stress intensification near an elliptical border. *Theor Appl Fract Mech*, 1995, 22: 229~237
- [27] Kokan I, Hui CY, Molkov V. Stress and induction field of a spheroidal inclusion or a penny-shaped crack in a transversely isotropic piezoelectric material. *Int J Solids Struct*, 1996, 33: 2 719~2 737
- [28] Chen WQ and Shioya T. Fundamental solution for a penny-shaped crack in a piezoelectric medium. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47: 1 459~1 475
- [29] Chen WQ and Shioya T. Complete and exact solutions of a penny-shaped crack in a piezoelectric solid: antisymmetric shear loadings. *Int J Solids Struct*, 2000, 37: 2 603~2 619
- [30] Karapetian E, Sevostianov I and Kachanov M. Penny-shaped and half-plane cracks in a transversely isotropic piezoelectric solid under arbitrary loading. *Arch Appl Mech*, 2000, 70: 201~229
- [31] Newman JC and Raju IS. Analysis of surface crack in finite plates under tension or bending loadings. NASA TP, 1979, 1 578

- [32] Cruse TA and Buren Van. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen and edge crack. *Int J Fract*, 1971, 7: 1~15
- [33] Atkinson C. Fracture mechanics stress analysis. In: Brebbia CA ed. *Progress in Boundary Element Methods 2*. Pentech Press, 1983
- [34] Tracey DM. 3D elastic singularity element for evaluation of K along an arbitrary crack front. *Int J Fract*, 1973, 9: 340~343
- [35] Barsoum RS. On the use of isoparametric finite elements in linear elastic mechanics. *Int J Numer Methods Engng*, 1976, 10: 25~37
- [36] Banks-sills L. Application of the finite element method to linear elastic fracture mechanics. *Appl Mech Rev*, 1991, 44: 447~461
- [37] Newman JC, Raju IS. Analyses of surface crack in finite plates under tension and bending loads. 1979, NASA-TP-1 578
- [38] Ingraffea AR, Manu C. Stress intensity factor computation in three-dimensional with quarter-point elements. *Int J Numer Methods Engng*, 1980, 15: 1 427~1 445
- [39] 柳春图, 李英治. 含裂纹板壳及三维裂纹体断裂问题研究进展. *力学进展*, 1986, 16: 185~193
- [40] 李英治, 李敏华, 柳春图. 含表面裂纹三维体裂纹尖端应力应变场及应力强度因子计算. *中国科学 (A 辑)*, 1988, 828~842
- [41] 张端重, 柳春图. 含椭圆形表面裂纹板的复合型三维应力强度因子计算与分析. *力学学报*, 1989, 21: 359~363
- [42] Shang FL, Kuna M, Abendroth M. Finite element analyses of three-dimensional crack problems in piezoelectric structures. *Engng Fract Mech*, 2003, 70: 143~160
- [43] Cruse TA, Buren WV. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with a edge crack. *Int J Fracture*, 1971, 7: 1~15
- [44] Tan CL, Fenner RT. Elastic fracture mechanics analysis by the boundary integral equation method. *Proc R Soc Lond*, 1979, A369: 248~260
- [45] Luchi ML, Poggialini. Computation of three-dimensional stress intensity fracture using special boundary element. In: Brebbia CA Ed. *Boundary Element, Proc Fifth Int Conf on BEM*. Berlin: Springer-Verlay, 1983, 461~470
- [46] Luchi ML, Rizzuti, S. Boundary elements for three-dimensional elastic crack analysis. *Int J Numer Methods Engng*, 1987, 24: 2 253~2 271
- [47] Jia ZH, Shippy DJ, Rizzo FJ. Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements. *Int J Numer Methods Engng*, 1989, 25: 2 257~2 273
- [48] 結城良治, 許金泉. 三次元異材介面き裂の BEM 解析. *機論*, 1992, A58 (545): 19~46
- [49] 杜庆华, 姚振汉. 边界积分方程——边界元法的基本理论及其在弹性力学方面的若干应用. *固体力学学报*, 1982, 3 (1): 1~22
- [50] 杜庆华, 嵇醒. 弹性与弹塑性边界元应力分析若干新成果. *应用力学学报*, 1985, 2 (2)
- [51] 罗钢明, 张永元. 等参边界元及其奇异元在管状结构三维裂纹问题中的应用. *应用力学学报*, 1986, 3 (1): 21~32

- [52] Zhang YY, Wei F. Investigation in W.F. and optimization of isoparametric singular boundary element size in 3D crack problem. *Engng Fract Mech*, 1987, 26: 611~617
- [53] 柴国钟, 张康达, 吴东棣. 断裂力学统一的第二类边界积分方程. *浙江工学院学报*, 1994, (1): 13~21
- [54] Chai GZ, Zhang KD. Stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks in plates and cylindrical pressure vessels using the hybrid boundary element method. *Engng Fract Mech*, 1995, 52 (6): 1 035~1 054
- [55] Chai GZ, Zhang KD. Interactions of two coplanar elliptical cracks embedded in finite thickness plates under uniform tension. *Engng Fract Mech*, 1996, 53: 179~191
- [56] Murakami Y, Nemat-Nasser S. Growth and stability of interacting surface flaws of arbitrary shape. *Engng Fract Mech*, 1983, 17: 193~210
- [57] Murakami Y. Analysis of stress intensity factors of modes I, II and III for inclined surface cracks of arbitrary shape. *Engng Fract Mech*, 1985, 22: 101~114
- [58] 石田城, 鹤秀登, 野口博司. 三次元き裂の問題高精度新解析法 (第1報, 解析基礎理論と無限体問題への応用). *機論*, 1993, A59 (561): 1 270~1 278
- [59] 野口博司, 石田城, 鹤秀登. 三次元き裂の問題高精度新解析法 (第2報, 任意形状の, 表面・内部き裂を持つ半無限體問題への応用). *機論*, 1993, A59 (561): 1 279~1 286
- [60] Noda N-A, Miyoshi S. Variation of stress intensity factor and crack opening displacement of semi-elliptical surface crack. *Int J Fract* 1996, 75: 19~48
- [61] Wang Q, Chen Mengcheng (陈梦成), et al. Variation of stress intensity factor along the front of a 3D rectangular crack by using a singular integral equation method. *Int J Fract*, 2001, 108: 19~39
- [62] Hadamard J. *Lectures on cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover, New York, 1923
- [63] Guidera JT, Lardner RW. Penny-shaped cracks. *J Elasticity*, 1975, 5: 59~73
- [64] Cruse TA. Boundary integral equation method for three-dimensional elastic fracture mechanics analysis. ASOSR-TR-75-0813. 1975
- [65] Weaver J. Three-dimensional crack analysis. *Int J Solids Struct*, 1977, 13: 321~330
- [66] Balas J, Sladek J. Method of boundary integral equation for analysis of three-dimensional crack problems. In: Brebbia CA ed. *Boundar Element Methods*. Berlin: Springer-Verlag, 1981, 183~205
- [67] Bui HD. An integral equation method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape. *J Mech Phys Solids*, 1977, 25: 29~39
- [68] Kupradze VD. *Progress in Solid Mechanics*. Nort-Holland Pub, 1963
- [69] Ioakimidis NI. A natural approach to introduction of finite-part integral into crack problems of three-dimensional elasticity. *Engng Fract Mech*, 1982, 16: 660~673
- [70] Ioakimidis, NI. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity. *Acta Mech*, 1982, 45: 31~47
- [71] Ioakimidis, NI. Validity of the hypersingular integral of crack problems in three-dimensional elasticity along the crack boundary. *Engng Fract Mech*, 1987, 26: 783~788