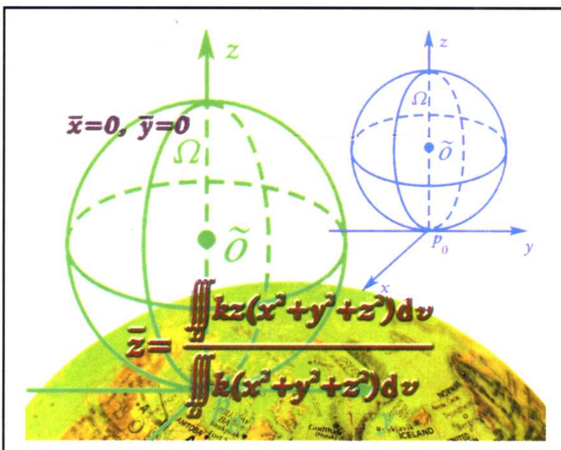
高等数学学习辅导

——配合同济高等数学(五版·下册)

6



王金金 李广民 于 力 编

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等数学学习辅导

——配合同济高等数学(五版·下册)

王金金　李广民　于力　编

西安电子科技大学出版社
2008

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导/王金金，李广民，于力编.

配合同济高等数学(五版·下册)

一西安：西安电子科技大学出版社，2008.1

ISBN 978 - 7 - 5606 - 1889 - 0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①王…　②李…　③于…

Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 107654 号

策　　划　杨宗周

责任编辑　杨宗周

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071

http://www.xduph.com　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷

开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 14

字　　数　343 千字

印　　数　1～5000 册

总 定 价　42.00 元

本册定价　22.00 元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 1889 - 0/O·0084

XDUP　2181A01－1

前　言

本书是编者在1999年编写的《新编高等数学学习辅导》的基础上，经过近几年"高等数学"精品课程建设，不断进行教学研究和教学改革，并广泛听取了使用该辅导书的师生的意见后修编而成的. 本书既可作为工科大学生学习"高等数学"的辅导教材，也可作为报考硕士研究生同学的复习资料.

本书每章内容由五部分组成，其中"解惑答疑"收集了编者多年来在教学中发现的疑难问题，有针对性地进行剖析，以加深学生对基本概念、基本理论的理解，指出学生解题过程中容易出现的错误. "典型例题"选择若干有代表性的例题，着重对解题思路、解题方法进行了分析，启发、诱导学生举一反三，掌握解题方法和技巧，达到事半功倍的效果. "习题选解"对同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第五版)中部分习题做了较详细的解答，有的题在解答后，以注释的形式对同类题的解法做了归纳小结或给出了解该类题应特别注意之处. "自测练习"可以让学生自己检查对各章基本内容掌握的情况. "考研题选"选取了部分考研试题并给出解答，使学生在本科学习阶段就能了解考研要求，提前进入角色，激发学习兴趣，打好数学基础.

本书分上、下两册出版，与同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第五版)配套. 上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数. 下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数与微分方程. 本书由三位编者分工编写，其中第一、四、九章由于力教授执笔，第

二、三、八、十章由王金金教授执笔，第五、六、七、十一、十二章由李广民教授执笔，各章都经过反复讨论、修改后定稿.

本书在编写过程中得到了西安电子科技大学应用数学系领导及广大教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵的修改意见，编者在此致以深深的谢意. 本书的出版得到西安电子科技大学出版社领导及编辑部的大力支持，责任编辑杨宗周同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，编者在此一并表示感谢.

由于作者水平有限，经验不足，书中存在的问题恳请读者批评指正.

编　者

2007 年 6 月

内容简介

本书是编者在1999年编写的《新编高等数学学习辅导》(西安电子科技大学出版社出版)的基础上，通过近几年“高等数学”精品课程建设，深入进行教学研究和教学改革，并广泛听取了使用这一辅导教材的师生的意见后修编而成的.

本书既是深入学习工科“高等数学”的辅导教材，同时还能作为报考研究生的复习资料. 考虑到本书的双重作用，故每章内容包括了解惑答疑、典型例题、习题选解、自测练习、考研题选. 其目的是针对学生在学习过程中产生的疑难问题，采用问答的形式予以解答；通过对典型例题的分析和求解，引导学生产生联想，从中领悟预示的途径，提高学生解题的能力；对教材中有代表性的习题进行解答，以供学生在学习过程中参考；自测练习则是为学生自我测试提供的；考研题选则是选取有代表性的考研试题并给出解答，旨在让读者在大学本科学习中，首先了解考研要求，提前进入角色，提高学习兴趣，打好数学基础.

本书分上、下两册出版，内容与同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第五版)教材上、下册(高等教育出版社出版)配套.

本书对学习工科“高等数学”的同学是一本很好的辅导教材，同时也可作为报考研究生的理想复习资料及“高等数学”任课教师的教学参考书.

目　　录

第八章

多元函数微分法及其应用

一、解 惑 答 疑

问题 1　当动点(x, y)沿着任一直线趋向于点$(0, 0)$时，函数$f(x, y)$的极限存在且都等于A，能否说函数$f(x, y)$当$(x, y)\to(0, 0)$时的二重极限也等于A?

答　不能. 如函数

$$f(x, y)=\frac{x^2 y}{x^4+y^2}, \quad x^2+y^2\neq 0$$

当动点(x, y)沿着y轴$(x=0)$趋向于点$(0, 0)$时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x, y)=0$$

且当动点(x, y)沿着任意一条直线$y=kx$(k为任意实数)趋向于点$(0, 0)$时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$$

但当动点(x, y)沿抛物线$y=x^2$趋向于点$(0, 0)$时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq 0$$

所以，函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

当$(x, y) \to (0, 0)$时的极限不存在.

注 根据二重极限的定义，在点$P(x_0, y_0)$的邻域内，动点(x, y)趋向于(x_0, y_0)的方式是任意的. 尽管动点(x, y)沿着任一直线趋向于(x_0, y_0)时，$f(x, y)$的极限存在且都等于A，但不能保证(x, y)以任意方式趋向于(x_0, y_0)时，$f(x, y)$的极限都是A，因此无法肯定$f(x, y)$当$(x, y) \to (x_0, y_0)$时的极限是否存在，更不能保证二重极限就是A.

问题 2 判定二重极限不存在，有哪些常用方法?

答 根据二重极限的定义，

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

存在，要求点$P(x, y)$以任意方式趋向于$P_0(x_0, y_0)$时，$f(x, y)$的极限存在且相等. 因此判别二重极限不存在的常用方法有以下两种：

(1) 选取一种$P \to P_0$的方式，记为$P \in C$，其中C为在函数定义域内以P_0为聚点的一个点集. 例如通过P_0的一条曲线，按此方式，极限$\lim\limits_{P\to P_0} f(x, y)$不存在.

(2) 找出两种方式：$P \in C_1$与$P \in C_2$，使

$$\lim_{P\to P_0} f(x, y) = A_1, \quad P \in C_1$$

$$\lim_{P\to P_0} f(x, y) = A_2, \quad P \in C_2$$

且$A_1 \neq A_2$，则二重极限$\lim\limits_{P\to P_0} f(x, y)$不存在.

如对二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2 y^2}$$

由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x^2}{2x^6}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x^2)^2}{2x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$$

不存在，因此，原二重极限不存在. 又如，对二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\cdot\frac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2}$$

由于 $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}(x+y)\frac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2}=\lim_{x\to 0}2x\cdot\frac{1+4x}{1-4x}=0$$

而 $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}(x+y)\cdot\frac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1+x)(2+2x+x^2)}{2+x}=-1$$

所以，原二重极限不存在.

问题 3　求函数 $f(x,\ y)$ 的二重极限有哪些常用的方法?

答　由于二重极限定义中动点 $P(x,\ y)$ 趋向于 $P_0(x_0,\ y_0)$ 的方式是任意的，而一元函数的极限中只有左、右两个单侧极限，故求二重极限比求一元函数的极限要复杂得多.

求函数 $f(x,\ y)$ 的二重极限常用方法有 5 种.

(1) 利用连续的定义及初等函数的连续性. 如果 $P_0(x_0,\ y_0)$ 是函数 $f(x,\ y)$ 的连续点，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0)$$

(2) 利用极限的性质(如四则运算，夹逼定理等).

(3) 利用二重极限的定义验证.

(4) 消去分子分母中极限为零的因子.

(5) 转化为一元函数的极限问题.

举例如下：

例 1 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 因 $\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$是初等函数，(1, 0)是连续点，故

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left.\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(1,0)} = \ln 2$$

例 2 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}}$.

解 当$(x,y)\to(0,0)$时，分子分母同趋于 0，故应先通过变形消去零因子，再求极限，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2-\sqrt{xy+4}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(2+\sqrt{xy+4})}{4-xy-4}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -(2+\sqrt{xy+4}) = -4$$

例 3 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

解 令$\sqrt{x^2+y^2}=\rho$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho-\sin\rho}{\rho^3}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{1-\cos\rho}{3\rho^2} \quad \text{(用一元函数求极限的方法)}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho}{6\rho} = \frac{1}{6}$$

问题 4 如果一元函数 $f(x_0, y)$在 y_0 处连续，$f(x, y_0)$在 x_0 处连续，那么二元函数 $f(x, y)$在点(x_0, y_0)处是否必连续？

答 不一定连续. 这是因为二元函数连续的定义是建立在二重极限的基础之上的，当二元函数的一个变量固定时对另一个变

量连续，相当于一种特定方式的极限存在，并不能保证(x, y)以任意方式趋向于(x_0, y_0)时的极限等于$f(x_0, y_0)$，也就不能保证$f(x, y)$在(x_0, y_0)处连续.

如函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$f(0, y)=0$ 在 $y=0$ 处连续，$f(x, 0)=0$ 在 $x=0$ 处连续，但$f(x, y)$在$(0, 0)$处不连续（见教材第 9 页）.

问题 5　计算偏导数 $f_x(x_0, y_0)$时，能否将 $y=y_0$ 先代入 $f(x, y)$中，再对 x 求导？

答　可以. 事实上，偏导数就是这样定义的，若记$\varphi(x)=f(x, y_0)$，则

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}\\&=f_x(x_0, y_0)\end{aligned}$$

例如，设 $z=f(x, y)=e^{xy}\sin\pi y+(x-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，$f(1, y)=e^y\sin\pi y$，对 y 求导，$f_y(1, y)=e^y(\sin\pi y+\pi\cos\pi y)$，$f_y(1, 1)=-\pi e$；同理，$f(x, 1)=(x-1)\arctan\sqrt{x}$，对 x 求导，有$f_x(x, 1)=\arctan\sqrt{x}+\dfrac{x-1}{1+x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，故 $f_x(1, 1)=\dfrac{\pi}{4}$.

本题若先求 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$，再代入 $x=1$，$y=1$ 的值，运算就复杂多了.

问题 6　二元函数的连续性与两个偏导数的存在性之间有何关系？它与一元函数的情形有何不同？

答 对一元函数来说，可导必连续. 但对多元函数，这一重要关系不再保持，连续与偏导数的存在性之间没有必然的联系，即使二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$ 都存在，也不能保证 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续.

例如函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0，0)处，

$$f_x(0, 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=0$$

$$f_y(0, 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0, y)-f(0, 0)}{y}=0$$

都存在，但 $f(x, y)$在(0，0)处不连续(见教材第 9 页).

为什么偏导数存在而函数不连续呢？这是由于 $f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$处关于 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$存在，只能保证一元函数$z=f(x, y_0)$在点 $x=x_0$ 处连续；同样，$f_y(x_0, y_0)$存在，只能保证一元函数 $z=f(x_0, y)$在 $y=y_0$ 处连续，也即只能保证(x, y)沿平行于坐标轴的直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 趋向于(x_0, y_0)时，函数$f(x, y)$的极限值为$f(x_0, y_0)$，但不能保证(x, y)以任意方式趋向于(x_0, y_0)时，$f(x, y)$的极限为 $f(x_0, y_0)$，故两个偏导数存在，不能保证函数连续.

问题 7 二元函数的可微性与两个偏导数的存在性之间有何关系？

答 对一元函数来说，可微与可导两者是等价的，但对二元函数，情况就不一样了，具体表现为如下关系：

(1) 若 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$处可微，则 $f_x(x_0, y_0)$，

$f_y(x_0, y_0)$必存在，且有 $\mathrm{d}f(x, y)=f_x(x, y)\mathrm{d}x+f_y(x, y)\mathrm{d}y$，但反之，若 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$存在，$f(x, y)$在点 $P(x, y)$不一定可微.

(2) 若 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$在点 $P(x, y)$处连续，则$f(x, y)$在点$P(x, y)$处必可微(教材第 21 页，定理 2)，反之，函数虽可微但推不出偏导连续，如对函数

$$z = f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

有

$$f_x(0, 0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}}{x} = 0$$

同理，$f_y(0, 0)=0$. 又

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0, 0)\Delta x-f_y(0, 0)\Delta y]}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0$$

于是，$f(x, y)$在点$(0, 0)$处可微. 但 $f_x(x, y)$与 $f_y(x, y)$在点$(0, 0)$处不连续. 事实上，当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x, y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，$f_x(0, 0)=0$，而极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x, y)$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

因 $\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的极限不存在而不存在，故 $f_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续. 同理，$f_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处也不连续.

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极限、连续、偏导存在、可微及偏导连续这些特性之间的关系可用箭头（表示可以推出）表示如下：

$$\begin{tikzcd}
\text{偏导连续} \arrow[r] & \text{可微} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{连续} \arrow[r] & \text{有极限} \\
 & & \text{偏导存在} &
\end{tikzcd}$$

问题 8　怎样验证函数在一点的可微性？

答　检验一个函数是否可微，先看它是否连续，若不连续，则不可微；若连续，再看 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ 是否存在. 若偏导不存在，则必不可微；若偏导存在，再看偏导是否连续. 若偏导连续，则可微；若偏导不连续，则检验

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - f_x(x, y)\Delta x - f_y(x, y)\Delta y}{\rho}$$

是否为 0 来直接判定可微性，通常对偏导存在的函数用这种方法来判定其可微性. 如函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处有 $f_x(0, 0)=f_y(0, 0)=0$，但

$$\frac{\Delta z - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

当 $\rho\to 0$ 时的极限不为 0，故这个函数在点 $(0, 0)$ 处不可微（见教材第 20 页）.

问题 9　偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 及 $f_y(x_0, y_0)$ 与函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿 Ox 轴方向（$l=i$）及沿 Oy 方向（$l=j$）的方向导数是否相同，为什么？

答 不相同. 因为根据方向导数的定义，当 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}$ 时，在 P_0 处的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{|\Delta x|\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{|\Delta x|}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$$

而
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}$$

由此可见，前者是单侧极限，后者是双侧极限，两者并非完全相同，如果$\frac{\partial f}{\partial x}$存在，则沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}$ 方向的方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$也存在，且两者相等；反之，若方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$存在，则$\frac{\partial f}{\partial x}$可能不存在. 例如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0, 0)处沿$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}$ 方向的方向导数$\frac{\partial z}{\partial l}=1$，而$\frac{\partial z}{\partial x}$不存在. 特别需要指出的是：沿 $\boldsymbol{l}_1=-\boldsymbol{i}$ 的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l_1}=\lim_{|\Delta x|\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{|\Delta x|}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{-\Delta x}$$
$$=-\frac{\partial f}{\partial x}$$

类似地，沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{j}$ 的方向导数与$\frac{\partial f}{\partial y}$也不完全相同.

问题 10　什么是全微分形式的不变性？它在多元函数的微分学中有什么作用？

答 设函数 $z=f(u,\ v)$具有连续偏导数，则有

$$\mathrm{d}z=f_u(u,\ v)\mathrm{d}u+f_v(u,\ v)\mathrm{d}v$$

如果 u, v 又是 x, y 的函数 $u=\varphi(x,\ y)$, $v=\psi(x,\ y)$，且这两个