



北京大学数学教学系列丛书

本科生  
数学基础课教材

# 非寿险 精算学

杨静平 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列丛书

# 非寿险精算学

杨静平 编著



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目 (CIP) 数据

非寿险精算学 / 杨静平编著. — 北京: 北京大学出版社,  
2006.12

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 978-7-301-10795-9

I. 非… II. 杨… III. 保险—精算学—高等学校—教材  
IV. F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 062031 号

书 名: 非寿险精算学

著作责任者: 杨静平 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 978-7-301-10795-9/O · 0701

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

出版部 62754962

电子信箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

印 刷 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

890 mm × 1240 mm A5 9.75 印张 288 千字

2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 18.00 元

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

名誉主编: 姜伯驹

主 编: 张继平

副 主 编: 李 忠

编 委: (按姓氏笔画为序)

王长平 刘张炬 陈大岳 何书元

张平文 郑志明

编委会秘书: 方新贵

责任编辑: 刘 勇

## 内 容 简 介

本书介绍非寿险中刻画险种损失的风险模型、风险模型的统计估计理论、费率厘定方法及准备金提取方法。通过建立随机模型对险种的损失进行描述；利用统计理论对损失模型进行统计分析；介绍费率厘定和准备金提取方面的基础理论及应用。本书力求精算理论与实务相结合，运用概率论和数理统计等对风险模型、经验费率和费率厘定等方面进行严谨的论述，并对风险保费、费率厘定及准备金提取等方面给出了一些实例分析。

全书共分为四部分：第一部分讨论保单损失的风险模型；第二部分介绍相关的统计理论，主要包括风险模型中的损失分布和索赔频率的统计估计理论、理赔模型的统计估计及风险保费的计算等；第三部分介绍经验费率，其中包括完全信度、部分信度、最精确信度及机动车辆保险中的 NCD (No-Claim Discount) 系统；第四部分介绍费率厘定方法和准备金提取方法。

本书采用风险模型 — 统计分析 — 实务理论这样的结构，使得读者对非寿险精算中的数理基础与实务方法之间的内在联系有较系统的了解。作者通过一些例题及实例分析帮助读者加深理解相关的知识，并对书中部分习题给出了参考解答。

本书可以作为金融数学专业、应用数学专业、保险及金融等专业的教学用书，也可以作为保险从业者的参考用书。

## 作 者 简 介

杨静平 北京大学数学学院金融数学系副教授，博士生导师。研究方向为精算学与风险管理、信用风险模型及应用、极限定理和极值理论在保险和金融中的应用。作者 1993 年开始从事精算方向的教学和科研工作，编写的教材有《寿险精算基础》(北京大学出版社，2002)，并在国内外发表多篇精算学和信用风险方面的论文。

## 序 言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部“加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养”的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效. 2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时. 并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合,我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的

时间修订、编写和出版 40 余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过 20 世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张继平

2002 年 5 月 18 日

于北京大学蓝旗营

## 前 言

精算学是综合运用概率论、数理统计等数学工具,并结合金融及经济学原理,对保险、金融、投资与财务等领域的风险进行预测、分析、评估和管理的一门学科。在精算学的主要应用领域——保险业中,着重讨论保费的确定、准备金的提取、财务风险的评估以及偿付能力的监管等方面。

作为精算学的一个重要应用领域——保险业,其业务可分为人身保险和非人身保险两大类。非人身保险简称为非寿险,是指除人身保险以外的保险业务,主要包括财产保险、责任保险、信用保险、保证保险等。具体细分,可分为企业财产保险、家庭财产保险、工程保险、责任保险、信用保险、保证保险、机动车辆法定第三者责任保险、机动车辆商业第三者责任保险、机动车辆车体损失保险、机动车辆其他保险、船舶保险、货物运输保险、农业保险、短期健康保险、意外伤害保险、投资型非寿险等。

非寿险精算学主要是以非寿险中的不确定性为研究对象。通过建立随机模型对险种的损失进行刻画,研究未来的理赔规律,在此基础上建立费率厘定和准备金提取等方面的理论基础;通过对险种的赔付数据进行收集与分析,确定未来的费率结构,根据历史数据利用合理方法确定准备金提取的额度及安排合理的再保方式等。在险种的开发设计、费率厘定到准备金的提取以及再保险等方面,精算理论都起到核心作用。

本书着重介绍非寿险中的一些基本的风险模型、统计估计理论、费率厘定方法及准备金提取方法。全书共分为四部分:第一部分讨论保单损失的风险模型;在此基础上,第二部分介绍相关的统计理论,主要包括风险模型中的损失分布和索赔频率的统计估计理论、理赔模型的统计估计及风险保费的计算等;第三部分介绍在非寿险精算历史上占有极其重要地位的经验费率,其中包括完全信度、部分信度、最精确信度及机动车辆保险中的 NCD(No-Claim



Discount) 系统; 第四部分介绍费率厘定方法和准备金提取方法. 本书采用风险模型 — 统计分析 — 实务理论这样的结构, 使得读者对非寿险精算中的数理基础与实务方法之间的内在联系有较系统的了解. 作者通过一些例题及实例分析帮助读者加深理解相关的知识, 并对书中部分习题给出了参考答案.

作者自 1997 年开始在北京大学数学学院金融数学系讲授“非寿险精算”课程. 本书是根据作者多年在精算方面的教学及科研积累编写而成, 在编写过程中得到了国家自然科学基金“相关风险理论及模型研究”(10471080) 和“2004 年北京大学教材建设立项”的资助.

本书可以作为金融数学专业、应用数学专业、保险及金融等专业的教学用书, 也可以作为保险从业者的参考用书. 本书内容涉及北美精算师考试的精算模型、精算模型的建立及精算实务方面的部分考试内容, 可用做相关课程考试的参考资料, 也可作为中国精算师考试的参考用书. 有需要相关课件的同志可与作者联系: 通讯地址为北京大学数学学院(100871), 电子邮件为 yangjp@math.pku.edu.cn.

感谢我的同事吴岚老师、中央财经大学的高洪忠老师、山东工商学院的罗文联老师和中国平安财险有限公司精算部的张振勇, 他们在本书的编写过程中提出了许多中肯、宝贵的建议. 感谢我的学生王耀君、黄洋、曾辉、易琛、池义春、黄晓亮、赵慧子、李娜以及数学学院金融数学系的 1997—2003 级学生. 感谢责任编辑刘勇同志对本书出版所做的辛勤工作.

《北京大学数学教学系列丛书》编委会同意将本书列入丛书, 在此表示深深的感谢.

由于水平有限, 书中难免存在错误或不妥之处, 希望诸同仁及读者不吝指正!

杨 静 平

2006 年 10 月于北京大学

# 北京大学出版社数学重点教材书目

## 1. 北京大学数学教学系列丛书

书 名	编著者	定价 (元)
高等代数简明教程(上、下)(北京市精品教材) (教育部“十五”规划教材)	蓝以中	32.00
实变函数与泛函分析(北京市精品教材)	郭懋正	20.00
数值分析(北京市精品教材)	张平文 李铁军	18.00
复变函数简明教程(“十一五”国家级规划教材)	谭小江 伍胜健	13.50
复分析导引(北京市精品教材)	李 忠	20.00
同调论(“十一五”国家级规划教材)	姜伯驹	18.00
黎曼几何引论(上下册)	陈维桓 李兴校	42.00
概率与统计	陈家鼎 郑忠国	30.00
金融数学引论	吴 岚	19.50
寿险精算基础	杨静平	17.00
非寿险精算学	杨静平	18.00
偏微分方程	周蜀林	13.50
二阶抛物型偏微分方程	陈亚浙	16.00
概率论(“十一五”国家级规划教材)	何书元	16.00
生存分析与可靠性	陈家鼎	22.00
普通统计学(北京市精品教材)	谢衷洁	25.00
数字信号处理(北京市精品教材)	程乾生	20.00
抽样调查(“十五”国家级规划、北京市精品教材)	孙山泽	13.50
测度论与概率论基础(北京市精品教材)	程士宏	15.00
应用时间序列分析(北京市精品教材)	何书元	16.00
应用多元统计分析(“十一五”国家级规划教材)	高惠璇	21.00
抽象代数Ⅰ(“十一五”国家级规划教材)	徐明曜 赵春来	18.00

## 2. 大学生基础课教材

书 名	编著者	定价 (元)
数学分析新讲(第一册)(第二册)(第三册)	张筑生	44.50
数学分析解题指南	林源渠 方企勤	20.00

书 名	编著者	定价 (元)
高等数学(上下册)(教育部“十五”国家级规划教材,教育部 2002 优秀教材一等奖)	李 忠 周建莹	52.00
高等数学(物理类)(修订版)(第一、二、三册)	文 丽等	57.00
高等数学(生化医农类)上下册(修订版)	周建莹 张锦炎	27.00
高等数学解题指南	周建莹 李正元	25.00
大学文科基础数学(第一册)(第二册)	姚孟臣	27.50
大学文科数学简明教程(上下册)	姚孟臣	30.00
数学的思想、方法和应用(修订版) (北京市精品教材)(教育部“九五”重点教材)	张顺燕	24.00
数学的美与理(教育部“十五”国家级规划教材)	张顺燕	26.00
简明线性代数(北京市精品教材)	丘维声	22.00
线性代数解题指南	丘维声	15.00
解析几何(第二版)	丘维声	15.00
解析几何(教育部“九五”重点教材)	尤承业	15.00
微分几何初步(95 教育部优秀教材一等奖)	陈维桓	12.00
微分几何(普通高等教育“十五”国家级规划教材)	陈维桓	22.00
黎曼-芬斯勒几何基础(“十一五”国家级规划教材)	莫小欢	17.00
基础拓扑学讲义	尤承业	13.50
初等数论(第二版)(95 教育部优秀教材二等奖)	潘承洞 潘承彪	25.00
实变函数论(教育部“九五”重点教材)	周民强	18.00
复变函数教程	方企勤	13.50
泛函分析讲义(上下册)(91 国优教材)	张恭庆 林源渠	28.50
数值线性代数(教育部 2002 优秀教材二等奖)	徐树方等	13.00
数学模型讲义(教育部“九五”重点教材,获二等奖)	雷功炎	15.00
新编概率论与数理统计(获省部级优秀教材奖)	肖筱南等	19.00

**邮购说明** 读者如购买北京大学出版社出版的数学重点教材,请将书款(另加 15%邮挂费)汇至:北京大学出版社北大书店邢丽华同志收,邮政编码:100871,联系电话:(010)62752015,(010)62757515。款到立即用挂号邮书。

北京大学出版社  
2004 年 10 月

# 目 录

## 第一部分 风险模型

<b>第一章 风险模型基础</b> .....	(1)
§1.1 基本概念 .....	(1)
§1.2 复合风险模型 .....	(8)
§1.3 个体风险模型 .....	(16)
习题 .....	(18)
<b>第二章 损失分布</b> .....	(22)
§2.1 正态分布 .....	(22)
§2.2 对数正态分布 .....	(24)
§2.3 $\Gamma$ 分布 .....	(27)
§2.4 B 分布及帕累托分布 .....	(28)
§2.5 构造新的分布族 .....	(30)
习题 .....	(32)
<b>第三章 索赔次数分布</b> .....	(34)
§3.1 泊松分布 .....	(34)
§3.2 二项分布 .....	(35)
§3.3 负二项分布 .....	(38)
§3.4 Logarithmic 分布 .....	(40)
§3.5 $(a, b, 0)$ 类分布 .....	(40)
§3.6 零点截断和零点修正方法 .....	(44)
习题 .....	(48)
<b>第四章 复合风险模型的进一步讨论</b> .....	(51)
§4.1 损失分布为指数分布的情况 .....	(51)

---

§4.2 复合泊松模型 .....	(55)
§4.3 Panjer 递推算法 .....	(61)
§4.4 离散化方法 .....	(65)
§4.5 考虑自留额的影响 .....	(68)
习题 .....	(70)

## 第二部分 赔付数据的统计分析

<b>第五章 索赔频率及个体赔付额的估计 .....</b>	<b>(76)</b>
§5.1 风险量 .....	(77)
§5.2 统计估计 .....	(82)
§5.3 假设检验 .....	(85)
§5.4 拟合不同分布 .....	(87)
习题 .....	(90)
<b>第六章 理赔模型的估计与风险保费的计算 .....</b>	<b>(92)</b>
§6.1 理赔数据 .....	(92)
§6.2 完全数据下的理赔模型 .....	(95)
§6.3 总体数据下的理赔模型 .....	(104)
§6.4 分离方法 .....	(115)
§6.5 IBNR 赔案数目的估计 .....	(120)
§6.6 风险保费的计算 .....	(123)
习题 .....	(131)

## 第三部分 经验费率

<b>第七章 完全信度和部分信度 .....</b>	<b>(133)</b>
§7.1 问题的提出 .....	(133)
§7.2 完全信度 .....	(134)
§7.3 部分信度 .....	(139)

习题 .....	(142)
<b>第八章 最精确信度 .....</b>	<b>(145)</b>
§8.1 条件概率的应用 .....	(145)
§8.2 贝叶斯保费 .....	(148)
§8.3 信度保费 .....	(154)
§8.4 参数估计方法 .....	(161)
习题 .....	(176)
<b>第九章 NCD 系统 .....</b>	<b>(181)</b>
§9.1 NCD 系统简介 .....	(181)
§9.2 索赔临界值 .....	(183)
§9.3 NCD 系统的转移概率 .....	(185)
§9.4 NCD 系统的稳定性 .....	(186)
§9.5 NCD 系统的稳定速度 .....	(191)
习题 .....	(193)

#### 第四部分 实用精算理论

<b>第十章 费率厘定 .....</b>	<b>(197)</b>
§10.1 费率厘定简介 .....	(197)
§10.2 费率结构的实例解释 .....	(212)
§10.3 赔付率法 .....	(217)
§10.4 损失成本法 .....	(225)
§10.5 两种方法的等价性 .....	(229)
§10.6 几个例子 .....	(231)
习题 .....	(238)
<b>第十一章 准备金的评估方法 .....</b>	<b>(241)</b>
§11.1 准备金简介 .....	(241)
§11.2 赔付率法 .....	(242)
§11.3 链梯法 .....	(242)

§11.4	Bornhuetter-Ferguson 方法 .....	(246)
§11.5	索赔频率与案均赔款分开考虑 .....	(247)
§11.6	分离方法 .....	(249)
§11.7	IBNR 准备金的计算 .....	(252)
§11.8	准备金的贴现 .....	(253)
§11.9	理赔费用准备金的评估方法 .....	(255)
§11.10	未到期责任准备金的评估方法 .....	(259)
	习题 .....	(261)
<b>附录</b>	<b>正态分布表 .....</b>	<b>(266)</b>
	<b>部分习题解答与提示 .....</b>	<b>(268)</b>
	<b>参考文献 .....</b>	<b>(293)</b>
	<b>名词索引 .....</b>	<b>(295)</b>

# 第一部分 风险模型

在本部分我们介绍非寿险中刻画保单损失的风险模型，这部分内容是本书的理论基础。

## 第一章 风险模型基础

本章针对非寿险中保单(或保单组)损失的随机模型进行深入讨论；通过建立刻画保单在保险期限内总损失额的随机模型，讨论保单总损失额的性质。其中，保单的总损失额模型涉及保险期限内损失发生的次数以及每笔损失的额度。

为了便于读者掌握本书内容，本章先介绍一些描述随机变量的基本数字特征，如期望、方差、偏度、峰度及中位数等。然后对矩母函数及概率生成函数与随机变量分布之间的关系进行讨论。最后，讨论刻画保单总损失额的复合风险模型和个体风险模型。关于分布函数的更详细介绍，读者可参考本书参考文献中所列的有关概率方面的书籍。另外，如无特别说明，本书假定所考虑随机变量的各阶矩都存在。

### §1.1 基本概念

#### 1.1.1 随机变量的基本数字特征

已知随机变量的分布函数，就可以掌握随机变量的概率特性。有些情况下，不太容易得到随机变量的精确概率分布，并且在实际问题中也并不总是需要已知其概率分布；在某些情况下只需要把握它的某些数字特征就可以了。随机变量的数字特征是指使用数字来描述随机变量分布的某些特点。下面对刻画随机变量的一些数字特征做一简要



介绍.

随机变量  $X$  的数学期望  $E(X)$ , 又称为均值, 它刻画了随机变量  $X$  的平均取值. 当  $X$  的概率分布已知时, 可以根据它的分布来计算期望. 离散型随机变量  $X$  的期望可以采用下面公式来计算:

$$E(X) = \sum_x xP(X = x).$$

密度存在的连续型随机变量的期望可以采用下面公式来计算:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

其中  $f(x)$  为  $X$  的密度函数.

随机变量的期望用来度量随机变量的平均取值, 而随机变量的方差则是用来刻画随机变量取值的波动程度. 随机变量  $X$  的方差  $\text{var}(X)$  定义为

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2,$$

它用来刻画随机变量  $X$  取值的分散程度. 在金融和保险中常使用方差来刻画风险的大小. 注意, 方差满足

$$\text{var}(X) = EX^2 - (E(X))^2.$$

刻画一个随机变量的分布形状的两个重要指标为偏度和峰度. 随机变量  $X(\text{var}(X) \neq 0)$  的偏度定义为

$$\frac{E(X - E(X))^3}{\{\text{var}(X)\}^{3/2}}.$$

它刻画了  $X$  的偏斜程度, 可用来度量分布的对称性.

随机变量  $X(\text{var}(X) \neq 0)$  的峰度定义为

$$\frac{E(X - E(X))^4}{\{\text{var}(X)\}^2},$$

它度量了分布尾部的厚度.