21世纪高等院校教材

高等代数

西北工业大学高等代数编写组 编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

高等代数

西北工业大学高等代数编写组　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

"高等代数"是高等院校数学类各专业本科生的一门重要数学基础课.在高等教育已由精英化转为大众化教育的形势下,编写一本内容丰富、结构合理、易教易学、注重应用的高等代数教材是非常必要的.

本书共分14章,几乎包含了高等代数的全部内容,研究对象从比较具体的行列式、矩阵、向量、线性方程组、多项式、相似变换、二次型、λ-矩阵到比较抽象的线性空间、线性变换、欧氏空间、酉空间、双线性函数,进而介绍近世代数的有关内容.这一过程符合代数学的发展,也符合人类认识事物的规律,即从具体到抽象再到具体(思维中的具体)的过程.为了分散难点、易教易学,书中对各章内容的许多细节处理颇具特色,并引入许多实例介绍了高等代数的应用.各章后均配有适量的习题,书后附有参考答案.讲完全书约需128学时.

本书便于教学与自学,可作为高等院校数学类各专业相关课程使用的教材,也可供工程技术人员和高校教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/西北工业大学高等代数编写组 编. —北京:科学出版社,2008
21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-020950-4

Ⅰ.高… Ⅱ.西… Ⅲ.高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第009926号

责任编辑:姚莉丽 / 责任校对:李奕萱
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京智力达印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年2月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2008年2月第一次印刷 印张:22 1/2
印数:1—4 000 字数:426 000

定价: 32.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新伟〉)

前　言

从数学发展史意义上来说，代数学的本意是“用符号代替数”并参加运算得出解答，后来发展到“用符号代替一般表达式”，现在可以说，代数学是研究各种代数系统的一个数学分支，是“用符号代替各种事物并研究其间关系”的学科. 这些代数系统是现实世界中无数真实对象的高度抽象概括. 代数运算是有限次的，而且缺乏连续性的概念，也就是说，代数学主要研究的是离散变化的量. 尽管在现实中连续性和不连续性是辩证统一的，但是为了认识现实，有时候需要把它分成几个部分，然后分别地研究认识，再综合起来，就得到对现实的总认识. 这是我们认识事物的简单而科学的重要手段，也是代数学的基本思想和方法. 代数学中发生的许多新的思想和概念，大大地丰富了数学的许多分支，成为众多学科的共同基础.

高等代数是代数学发展到高级阶段的总称，主要包括线性代数和多项式两部分内容. 线性代数主要讨论行列式、矩阵、向量、线性方程组、线性空间、线性变换、欧氏空间、二次型等；而多项式理论主要是利用代数方法和解析方法来研究多项式的性质，如整除性、最大公因式、因式分解、重因式等，借助于多项式的性质来讨论代数方程的根的性质、根的分布、根的近似计算、多元高次方程组的公共根等. 高等代数不仅在内容上、更重要的是在观点和方法上比初等代数有很大提高.

高等代数是高等学校数学类本科生一门重要的基础课程，这门课程对于培养和提高学生的抽象思维、逻辑推理以及代数运算能力起着非常重要的作用. 高等代数不仅是其他数学课程的基础，也是物理、力学、电路等课程的基础. 实际上，任何与数学有关的课程都涉及高等代数知识. 尤其是近年来，由于计算机的飞速发展和广泛应用，使得许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为处理离散问题工具的高等代数，也是从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础.

本书是在《高等代数》讲义的基础上几经修改、使用、编写而成的，主要特点是：

1. 层次分明，循序渐进. 全书由 14 章内容组成，研究对象从比较具体的行列式、矩阵、向量、线性方程组、多项式到比较抽象的线性空间、线性变换、欧氏空间、酉空间、双线性函数等，这一过程符合代数学的发展，也符合人类认识事物总是要经过从具体到抽象再到具体(思维中的具体)的过程. 讲完全书约需 128 学时.

2. 分散难点，提高素质. 高等代数所使用的各种推证方法、公理化定义、抽象化思维、计算与运算技巧及应用能力等都很具有特色，是其他课程所无法替代的，是提高学生数学素质不可缺少的一环. 为了既能够有适当的理论深度，又能便于理

解，我们对于一般高等代数中教学难度较大的内容作了适当处理. 例如，对于线性相关性这个线性代数中重要的概念和难点，采取了先介绍矩阵的初等变换及求线性方程组的消元法，从而将向量组线性相关与否的问题转化为某个齐次方程组有无非零解的问题，使它较为具体；对各章内容的许多细节处理，也是颇具特色的.

3. 易教易学，注重应用. 注意揭示数学理论的相关背景，多处安排了不同领域的一些典型范例，如多项式插值、矩阵编码和译码、Fibonacci 数列、多元函数极值等. 在编写过程中，我们力求做到叙述清晰、推证严谨、深入浅出、通俗易懂，使之便于教学与自学.

参加本书编写的有徐仲、吕全义、张凯院、彭国华、安晓虹. 全书由徐仲统稿并负责修改定稿. 本书在编写过程中，得到了西北工业大学应用数学系领导及同事的关心和支持；西北工业大学出版社、教务处也对本书的出版给予了很大的支持和帮助；西北工业大学的叶正麟教授和长安大学的封建湖教授详细审阅了书稿，提出了中肯的修改意见，并给予了很高的评价，作者在此一并表示衷心的感谢.

由于水平所限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请同行、读者指正.

编　者

2006 年 12 月于西北工业大学

目　　录

第1章　行　列　式

行列式的概念是人们从解线性方程组的需要中建立起来的，它是处理各类代数问题的不可缺少的工具，在数学、物理、力学和工程技术等许多领域中都有广泛的应用. 本章主要介绍行列式的概念与性质，行列式的展开定理以及用行列式解线性方程组的 Cramer 法则.

1.1　数　　域

在讨论数学问题时，常常需要明确规定所考虑的数的范围，因为同一问题在不同的数的范围来考虑时，可能具有不同的性质. 例如，在求解一元二次方程时，如果在实数范围内来考虑，则该方程可能无解，而在复数范围内该方程总是有解的. 我们经常遇到的数的范围有全体整数 **Z**、全体有理数 **Q**、全体实数 **R** 及全体复数 **C** 等，当我们把这些数当作整体来考虑时，常称之为**数集**. 不同的数集显然具有一些不同的性质，但某些数集也有很多共同的性质. 为了在讨论中能够把它们统一起来，引入一个一般的概念.

定义 1.1　设 **K** 是至少含一个非零数的数集. 如果 **K** 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍是 **K** 中的数，则称 **K** 为一个**数域**.

显然，全体有理数集、全体实数集、全体复数集都构成数域，分别称为**有理数域**、**实数域**、**复数域**. 全体整数集不是数域，因为不是任意两个整数的商都是整数. 可以证明，介于有理数域与实数域之间的如下数集

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$$

构成数域. 这是因为，对任意 $a+b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 和 $c+d\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$，有

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2},$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

因为 a,b,c,d 都是有理数，所以 $a\pm c$、$b\pm d$、$ac+2bd$，$ad+bc$ 也是有理数，从而 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 中任意两个数的和、差、积仍是 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 中的数. 又设 $a+b\sqrt{2}\neq0$，则 $a-b\sqrt{2}\neq0$ (否则，若 $a-b\sqrt{2}=0$，则必有 $a=b=0$，从而 $a+b\sqrt{2}=0$，矛盾)，从而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$$

其中$\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}$，$\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}$也是有理数，即任意两个数的商也是 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 中的数，故 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 构成数域.

数域具有如下的重要性质.

定理 1.1　所有数域都包含有理数域作为它的一部分，即有理数域是最小的数域.

证　设 $\mathbf{K}$ 是一个数域，$0\neq a\in\mathbf{K}$，则 $0=a-a\in\mathbf{K}$，$1=\frac{a}{a}\in\mathbf{K}$，从而 $1+1=2$，$2+1=3$，…，$(n-1)+1=n$，…，全在 $\mathbf{K}$ 中，即 $\mathbf{K}$ 包含了全体自然数. 又因为 $-n=0-n\in\mathbf{K}$，所以 $\mathbf{K}$ 包含全体整数. 对任意有理数 b，存在整数 p,q 且 $q\neq0$，使 $b=\frac{p}{q}\in\mathbf{K}$，故 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{K}$. ▍

在后面的章节中，如无特别声明，我们所讨论的问题都是在任何一个数域里进行的.

1.2　二、三阶行列式

对于二元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{cases}\tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，由消元法求得的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\tag{1.2}$$

为便于记忆，引入记号$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$，称之为**二阶行列式**，用来表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.\tag{1.3}$$

如果把 a_{11}，a_{22}的连线称为主对角线，把 a_{12}，a_{21}的连线称为次对角线，则二阶行列式的值就等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积. 这种算法称为**对角线法则**. 按此法则，二元一次方程组(1.1)的解(1.2)可用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}.$$

像这样用行列式来表示解，形状简单，容易记忆，称为二元一次方程组的**行列式**

解法.

对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

假如用数 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ 乘方程组(1.4)的第一式,用数 $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$ 去乘第二式,用数 $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ 去乘第三式,然后把这三个新的方程加起来,就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

当 x_1 的系数

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时,得出

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).$$

同样可求得 x_2 和 x_3 的表达式. 为了便于记忆,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.5}$$

上式左端的记号称为**三阶行列式**,它代表右端 6 项的代数和. 三阶行列式的值也可采用**对角线法则**来计算,见图 1.1. 实线上三个元素的乘积组成的三项都取正号,虚线上三个元素的乘积组成的三项都取负号.

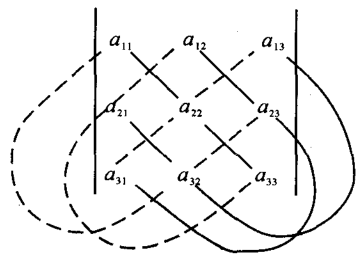

图 1.1

按此法则,方程组(1.4)的解可用三阶行列式表示为

$$x_1=\frac{D^{(1)}}{D},\quad x_2=\frac{D^{(2)}}{D},\quad x_3=\frac{D^{(3)}}{D}.$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D^{(1)}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D^{(3)}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

称 D 为方程组(1.4)的**系数行列式**,而 $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}$ 是将 D 中第 1,2,3 列分别换成常数项 b_1, b_2, b_3 得到的三阶行列式. 这就是三元一次方程组的**行列式解法**.

例 1.1 用行列式法解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times3\times(-1) + (-2)\times2\times3 + (-1)\times0\times1$$

$$-(-1)\times3\times3 - (-2)\times0\times(-1) - 1\times2\times1 = -8.$$

由于 $D\neq0$,方程组有唯一解,又可求得

$$D^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8, \qquad D^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D^{(1)}}{D} = 1, \qquad x_2 = \frac{D^{(2)}}{D} = -1, \qquad x_3 = \frac{D^{(3)}}{D} = 2.$$

1.3 n 阶行列式的定义

自然会想到怎样把二阶、三阶行列式的定义推广到一般的 n 阶行列式. 在前面,由二个未知量中消去一个非常容易,但由三个未知量中消去二个就已经很麻烦,至于一般由 n 个未知量中消去 $n-1$ 个几乎是不可能的了. 因此,不能用前面类似的方法来定义 n 阶行列式. 为了定义一般的 n 阶行列式,需要介绍排列的有关概念.

定义 1.2 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $q_1q_2\cdots q_n$ 称为一个 n **阶排列**. 在排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 中,如果一个大数排在一个小数之前,就称这两个数组成一个**逆序**;该排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**,记为 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$. 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

求排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数时,可以从第一个元素开始,依次统计 $q_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 与其后面的数构成的逆序的个数 τ_i(即后面有 τ_i 个数比 q_i 小),则排列

$q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数为

$$\tau(q_1q_2\cdots q_n)=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{n-1}.$$

例如，45321 是一个 5 阶排列，其中 43，42，41，53，52，51，32，31，21 是逆序，逆序数是 9，该排列是奇排列. $12\cdots n$ 是一个 n 阶排列，逆序数是 0，它是偶排列，这一排列称为**自然排列**. $n(n-1)\cdots 21$是一个 n 阶排列，其逆序数为 $n(n-1)/2$.

容易知道，不同的 n 阶排列的总数有 $n!$ 个.

从二阶和三阶行列式的定义(1.3)和(1.5)可以看出，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同行和不同列的元素构成的，并且代数和恰由所有这种可能的乘积组成. 对于二阶行列式，这种乘积项有 $2!=2$ 项，而对于三阶行列式，这种乘积项有 $3!=6$ 项. 另一方面，每一乘积项都带有符号. 在三阶行列式的表达式(1.5)中，项的一般形式可以写成

$$a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3},$$

其中 $q_1q_2q_3$ 是 1，2，3 的一个排列. 可以看出，当 $q_1q_2q_3$ 是偶排列时，对应的项在式(1.5)带有正号，当 $q_1q_2q_3$ 是奇排列时带有负号. 二阶行列式显然也符合这个原则.

上面关于二阶和三阶行列式的分析对于理解一般的 n 阶行列式的定义是有帮助的.

定义 1.3 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$，把它们写成一个有 n 行和 n 列的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

称之为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$$

的代数和，这里 $q_1q_2\cdots q_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $q_1q_2\cdots q_n$ 是偶排列时，该项取正号. 而当 $q_1q_2\cdots q_n$ 是奇排列时，该项取负号. 用式子表示即为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}, \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. n 阶行列式(1.6)常用 D 或 D_n 来表示，简记为$D=\det(a_{ij})$. 称式(1.7)为 n 阶行列式的**展开式**，称 a_{ij} 为行列式的 **i 行 j 列的元素**.

当 $n=2,3$ 时,按此定义的二阶、三阶行列式与用对角线法则求得的结果一致.当 $n=1$ 时,$|a_{11}|=a_{11}$.注意不要与绝对值记号相混淆.

例 1.2　计算 n 阶行列式(其中未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　根据定义,n 阶行列式中项的一般形式为

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}.$$

由于在这个行列式的第 n 行中,除 a_{nn} 外,其余元素都是 0,所以只要考虑 $q_n=n$ 的项即可;再看第 $n-1$ 行:这一行中除 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 外,其余元素都是 0,因此 q_{n-1} 只有 $n-1$ 和 n 这两种可能.但因 $q_n=n$,且 $q_{n-1}\neq q_n$,所以 $q_{n-1}=n-1$.这样逐步推上去,可知在展开式中,除去

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这一项外,其他的项都等于 0.于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的行列式称为**上三角行列式**(类似地有**下三角行列式**).这个例子说明:上三角行列式等于**主对角线**(从左上角到右下角这条对角线)上元素的乘积.作为这种行列式的特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的行列式称为**对角行列式**,它也等于主对角线上元素的乘积.

例 1.3　计算 n 阶行列式(称为次上三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}.$$

解　依行列式定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

这一例子表明，行列式中**次对角线**（从右上角到左下角这条对角线）上元素的乘积不一定取负号，从而二、三阶行列式的对角线法则不能用于四阶及四阶以上的行列式.

以上这些例子都可以作为公式来应用.

利用行列式的定义计算一个 n 阶行列式时，需要计算 $n!$ 个项，而每个项又是 n 个元素的乘积，需要作 $n-1$ 次乘法，所以一共需作 $n!(n-1)$ 次乘法. 当 n 比较大时，$n!(n-1)$ 就是一个惊人的数目，即使用电子计算机来进行计算也是难以实现的. 因此，必须对行列式作进一步的研究，找出其他可行的计算方法.

1.4 行列式的性质

本节介绍行列式的性质，它们不仅可用来简化行列式的计算，而且对于行列式的一些理论研究也是极为重要的.

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负，把 n 个元素按所在行的先后顺序排列起来，即各元素的第一个下标按自然顺序排列，然后根据第二个下标组成排列的奇偶性来决定这一项的正负. 由于数的相乘可交换，因而这 n 个元素的次序是可以任意写的. 那么，是否可将 n 个元素按所在列的先后顺序排列起来，再根据各元素第一个下标组成排列的奇偶性确定这一项的符号呢？回答是肯定的. 这就牵涉到对换及其性质.

定义 1.4 把一个排列中的某两个数互换位置，而其余的数保持不动，就得到另一个排列，这一过程称为**对换**.

定理 1.2 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变为奇排列.

证 先证排列中相邻两个数对换的情形.

设逆序数为 t_1 的排列

$$q_1\cdots q_k q_{k+1}\cdots q_n$$

经过 q_k 与 q_{k+1} 对换变成逆序数为 t_2 的排列

$$q_1\cdots q_{k+1} q_k\cdots q_n.$$

当 $q_k>q_{k+1}$ 时，$t_2=t_1-1$，而当 $q_k<q_{k+1}$ 时，$t_2=t_1+1$，可见排列的奇偶性改变了. 再