新课标　新教材

导学导练

数学

必修1（配人教版）

丛书主编　金鹰

安徽大学出版社

新课标 新教材

导学导练

数 学

必修1(配人教版)

本册主编 马爱国
编写人员 张艳秋 吴昌文
喻长志 邵礼华

安徽大学出版社

新课标　新教材　导学导练

数学必修1(配人教版)　　　　　　　　丛书主编　**金鹰**

出版发行	安徽大学出版社(合肥市肥西路3号　邮编230039)
联系电话	编辑室 0551-5108438
	发行部 0551-5107784
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn
责任编辑	鲍家全　王先斌
封面设计	孟献辉
印　　刷	合肥现代印务有限公司
开　　本	787×1092　1/16
总印张	64.5
总字数	1610千
版　　次	2006年8月第1版
印　　次	2006年8月第1次印刷
书　　号	ISBN 7－81110－209－9 / G・409
总定价	87.00元(共6册)

前　言

送走炎夏，迎来清秋。新学期伊始，我们希望能给广大读者朋友送来一个惊喜：《新课标　新教材　导学导练》助你畅游学海！

“如切如磋，如琢如磨。”这套丛书是我们研讨、交流、推敲、合作的结晶。我们的作者队伍中，有课程与教学研究专家，有重点中学教学经验丰富、成绩突出的骨干教师。长期的课程改革研讨和教学经验交流，使我们形成一支思维开放、锐意进取、团结合作的编写队伍。

“鸳鸯绣出从教看，莫把金针度与人。”尽管我们付出了巨大的劳动，但是我们还不敢自诩我们的作品便是“度人金针”。我们只是本着“春蚕吐丝”的精神，将我们研究和教学的心得，拿出来与朋友们分享。在科学面前，按新课标的要求，我们永远是探索者，只是我们永远不会停下探索的脚步。我们愿意与广大朋友们共享探索、进取的喜悦。

朋友们，你们是学习的主体。在学习中，培养创新精神和实践能力，提高综合素质，主动地、生动活泼地学习，促进全面发展，这就是新课标的要求和方向。

《导学导练》突出新课标的要求与方向：在栏目的安排、材料的选择、例题的配置、习题的设计等方面努力体现这一要求和方向。

《导学导练》保持与既有教学方式的衔接：不忽视基本知识的介绍；突出知识的内在联系和重难点的讲解；注重课后练习和单元检测。

《导学导练》最大程度地方便广大师生使用。每一种都是分两次印装：“导学导练”部分，包括知识网点、重难点、能力导航、知识拓展、典型例题、课时练习或周练等，以 16 开印装。“单元检测”部分，包括单元卷和综合卷，以 8 开印装，活页形式。

“路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。”朋友们，让我们努力探索，相互交流，携手共进，迎接美好的明天。

金鹰

2006 年 8 月

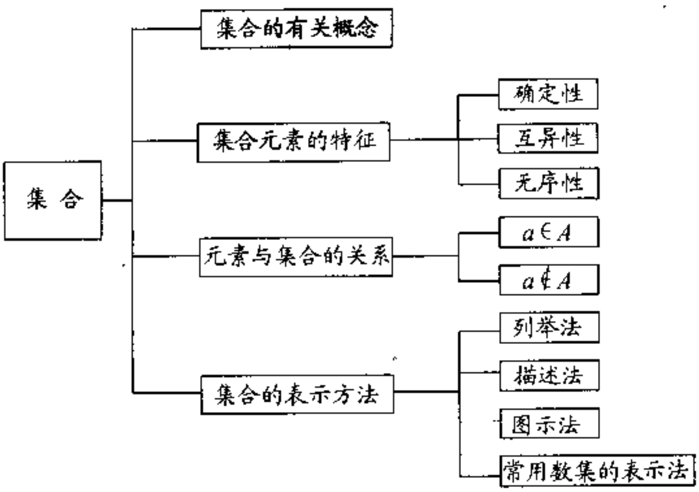
目　录

第一章　集合与函数概念

§1.1　集　合

§1.1.1　集合的含义与表示

知识点



重难点

1. 集合是一个原始概念，集合中的元素不仅仅可以是数或点，还可以是任意的事物，所以集合中的元素具有任意性，正因为如此，集合理论的应用才会如此广泛.

2. 集合中元素的三大特征：

(1) 确定性：指集合中的元素必须是确定的，即任何一个对象都能判断它是或不是某个集合的元素.

(2) 互异性：指一个集合中的元素互不相同，同一个元素不能在一个集合中出现两次.

(3) 无序性：集合中的元素无先后顺序，如$\{1,2\}$与$\{2,1\}$表示同一个集合.

3. 元素与集合的关系：一个元素与集合的关系是从属关系：元素 a 在集合 A 中，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；元素 a 不在集合 A 中，记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A.

4. 集合的表示方法：

(1) 不是所有集合都可以用列举法表示，如不等式 $2x-3>0$ 的解集是 $x>\frac{3}{2}$ 的所有实数，就不能用列举法表示. 一般地，集合元素为有限个且能一一列举出来，如 $B=\{a,b,c\}$；或者集合中的元素为无限个但有显然的规律，如自然数集，这样的数集可用列举法，如 $A=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$.

(2) 用描述法表示集合时，形式为$\{x \in A \mid P(x)\}$，其中 x 表示集合中的元素是"谁"或是"什么"．A 是特征条件，$P(x)$ 为该集合中元素特有的公共属性、特征．它可以是一个数学式子，也可以是自然语句．

典型例题

[例 1] 下列所含对象不能构成集合是 ( )

A. 直线 $y = x + 1$ 上所有的点　　B. 所有的直角三角形

C. 高一(1) 班的全体女生　　D. 我校所有的较好学生

[解析] 由集合概念中元素的确定性可知，一个元素在不在集合中必须是明确的．而本例中 D 的对象含糊不清．所谓"较好"没有明确的客观标准，所以难以判断某个对象是否属于这个范畴． **[答案]** D

[例 2] $\{x, x^2 - x, x^3 - 3x\}$ 表示一个集合吗？如果表示一个集合，则说明理由；如果不能表示，则需要添加什么条件，才能使它表示一个集合？

[思路分析] 集合中的元素必须是互异的，因此，若表示一个集合，则 x 的取值不能使集合中三个元素有相等的情况．

[解] 它不一定能表示一个集合，因为 $x, x^2 - x, x^3 - 3x$ 之间有可能相等，不能满足集合元素的互异性．

由 $x = x^2 - x$，得 $x = 0$ 或 $x = 2$，

由 $x = x^3 - 3x$，得 $x = 0$ 或 $x = \pm 2$，

由 $x^2 - x = x^3 - 3x$，得 $x = 0$ 或 $x = 2$ 或 $x = -1$．

故只需添加条件 $x \neq 0$，且 $x \neq -1$，$x \neq 2$，且 $x \neq -2$．则$\{x, x^2 - x, x^3 - 3x\}$ 能表示一个集合．

[评注] 本例体现了元素的互异性在解题中的应用．

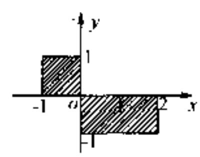
[例 3] 用适当方法表法下列集合：

(1) 方程 $\sqrt{2x-1} + |3y+3| = 0$ 的解集 A；

(2) 使函数 $y = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$ 有意义的取值集合 B；

(3) 直线 $y = 2x - 1$ 与抛物线 $y = x^2$ 的交点构成的集合 C；

(4) 右图中阴影部分的点(含边界)的坐标构成的集合 D．



[思路分析] 本例要求用适当的方法表示集合，这里没有明确的原则，越简捷越好．

[解] (1) 由方程 $\sqrt{2x-1} + |3y+3| = 0$，得$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 3y + 3 = 0 \end{cases}$

即$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$ 是原方程的一组解．

$\therefore A = \{(\dfrac{1}{2}, -1)\}$．

[评注] 原方程是二元方程，只有一个解，表示集合 A 只有一个元素，它就是有序实数对 $(\dfrac{1}{2}, -1)$(习惯上 x 值写在前，y 的值写在后)，所以用列举法表示．

(2) 由$\begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$，$\therefore B = \{x \mid x \leqslant 2 \text{ 且 } x \neq 0\}$．

[评注]由于函数自变量 x 的取值范围是不等式的解集(元素有无穷多个),所以用描述法表示.

(3) 由方程组 $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 \end{cases}$,解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

$\therefore C = \left\{(x, y) \middle| \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 \end{cases}\right\} = \{(1,1)\}$.

[评注]这个集合即可以看作点集,也可以看作方程组的解集.

(4) 由图知:$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 2$,且 $-1 \leqslant y \leqslant 1$,且 $xy \leqslant 0\}$.

[评注]此题是一个点集合,首先集合中的元素是点(x, y),其次是这些点应满足的条件要写全.

[例 4]已知　集合 $A = \{x \mid ax^2 - 3x + 2 = 0\}$,

集合 $B = \{a \mid ax^2 - 3x + 2 = 0\}$.

(1) 集合 A 与集合 B 的元素分别是什么?你能用自然语言说明吗?

(2) 若 A 只有一个元素,你能推出什么结论?

(3) 集合 B 可能有两个元素吗?

[思路分析]本题的关键是抓住集合中的代表元进行分析.

[解](1) 由于 A 的代表元是 x,所以 A 的元素是关于 x 的方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解;B 的代表元是 a,所以 B 的元素是关于 a 的方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解.

(2) 若 A 只有一个元素,即关于 x 的方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 只有一个解.

当 $a = 0$ 时,方程为一元一次方程 $-3x + 2 = 0$,$x = \frac{2}{3}$,此时 $A = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

$\therefore a = 0$ 适合题意.

当 $a \neq 0$ 时,方程为一元二次方程,所以有 $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times a = 0$,　$a = \frac{9}{8}$.

因此 A 只有一个元素时,可推出 $a = 0$ 或 $a = \frac{9}{8}$.

(3) 由于集合 B 是关于 a 的方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解集,而此方程是关于 a 的一次方程,所以集合 B 不可能有两个元素,最多有一个元素.

当 $x = 0$ 时,方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无解.集合 B 中没有元素.

当 $x \neq 0$ 时,方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解为 $a = \frac{3x - 2}{x^2}$.

此时,集合 B 有一个元素为 $\frac{3x - 2}{x^2}$.

[评注]解决这类集合问题,关键是抓住集合的代表元是什么?认清之后,再综合分析,从而顺利解决问题.用自然语言叙述该集合的含义(即互译过程).

[例 5]已知 $S = \{x \mid x = m + n\sqrt{2}, m, n \in \mathbf{Z}\}$.

(1) 若 $a \in \mathbf{Z}$,则 $a \in S$ 对吗?

(2) 若 $a_1, a_2 \in S$,则 $a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_1a_2$ 还属于 S 吗?

[思路探究]从题意知:S 中元素是整数加整数与$\sqrt{2}$ 的积的形成的数构成的,因此判断一个元素是否属于 S,就是看它能否写成 S 中元素要求的形式.

[解]① 若 $a \in \mathbf{Z}$,则 $a = a + 0 \times \sqrt{2}$,由 $a \in \mathbf{Z}, 0 \in \mathbf{Z}$,$\therefore a \in S$.

② 若 $a_2,a_2 \in S$,则 $a_1 = m_1 + n_1\sqrt{2}$,$a_2 = m_2 + n_2\sqrt{2}$,其中 $m_1,m_2,n_1,n_2 \in \mathbf{Z}$.

于是:$a_1 + a_2 = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2}$,

$a_1 - a_2 = (m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)\sqrt{2}$.

$a_1a_2 = (m_1m_2 + 2n_1n_2) + (m_1n_2 + m_2n_1)\sqrt{2}$.

由于 $m_1,m_2,n_1,n_2 \in \mathbf{Z}$,

所以 $m_1 + m_2$,$n_1 \pm n_2$,$m_1m_2 + 2n_1n_2$,$m_1n_2 + m_2n_1$ 均属于 $\mathbf{Z}$.

故:$a_1 + a_2 \in S$,$a_1 - a_2 \in S$,$a_1a_2 \in S$.

实践与探究

1. 下列说明中,能表示集合的是 (　　)

A. 一切很大的数　　B. 我们班的好同学

C. 大于 -3 的实数　　D. 充分接近 -3 的数

2. 若 $x \in \{1,3,x^2\}$,则有 (　　)

A. $x = 0$ 或 1　　B. $x = 1$ 或 3

C. $x = 0$ 或 $x = 1$ 或 $x = 3$　　D. $x = 0$ 或 $x = 3$

3. 给出下列五个关系:$\sqrt{3} \in \mathbf{R}$,$0.7 \notin \mathbf{Q}$,$0 \in \{0\}$,$0 \in \mathbf{N}$,$3 \in \{(1,3)\}$,其中正确的个数有 (　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 1

4. 方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ 的解集是 (　)

A. $\{x = 0, y = -1\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{(0,1)\}$　　D. $\{(x,y) \mid x = 0$ 或 $y = 1\}$

5. 已知集合 $A = \{y \mid y = x^2 + 1\}$,$B = \{x \mid y = \sqrt{1-2x}\}$,若 $a \in A$,则 a 与 B 的关系是________.

6. 已知 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{8}{3-x} \in \mathbf{N}^*\}$,则用列举法表示集合 $A =$ ____________.

7. 已知集合 $A = \{x, xy, xy+1\}$,其中 $x \in \mathbf{Z}$,$y \in \mathbf{Z}$,$y \neq 0$,若 $0 \in A$,求 A 及 A 中元素之和.

8. 若 $A = \{x \mid mx^2 + 2x + 1 = 0\}$,且 A 中至少有一个元素,求 m 的取值范围.

9. 设 A 是数集,且满足条件:若 $a \in A$,$a \neq 1$,则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

求证:(1) 若 $2 \in A$,则 A 中必还有另外两个元素;

(2) 集合 A 不可能是单元素集合;

(3) 集合中至少有三个不同的元素.

10. 已知集合 $A=\{x \mid y=2x^2+1\}$，$B=\{y \mid y=2x^2+1\}$，$C=\{(x,y) \mid y=2x^2+1\}$，$D=\{y=2x^2+1\}$.

(1) 试用自然语言说明每个集合的元素各是什么.

(2) 请谈一谈你学习本节的收获和体会.

知识拓展

康托尔的生平

1845 年 3 月 3 日，乔治·康托尔(Cantor)生于俄国的一个丹麦一犹太血统的家庭，1856 年康托尔和他的父母一起迁到德国的法兰克福. 像许多优秀的数学家一样，他在中学阶段就表现出一种对数学的特殊敏感，并不时得出令人惊奇的结论，他的父亲督促他学工，因而康托尔在 1863 年带着这个目的进入了柏林大学. 这时柏林大学正在形成一个数学教学与研究的中心. 康托尔很早就向往这所由魏尔斯特拉斯占据着的世界数学中心之一. 所以在柏林大学，康托尔受了魏尔斯特拉斯的影响而转到纯粹的数学. 他在 1869 年取得在哈勒大学任教的资格，不久后就升为副教授，并在 1879 年升为正教授. 1874 年康托尔在克列勒的《数学杂志》上发表了关于无穷集合理论的第一篇革命性文章. 数学史上一般认为这篇文章的发表标志着集合论的诞生. 这篇文章的创造性引起了人们的注意，在以后的研究中，集合论和超限数成为康托尔研究的主流，他一直在这方面发展论文直到 1897 年，过度的思维劳累以及强烈的外界刺激一直影响着康托尔的健康. 1918 年 1 月 6 日，康托尔在哈勒大学去世.

康托尔是 19 世纪末 20 世纪初德国伟大的数学家、集合论的创立者，是数学史上最富有想像力、最有争议的人物之一. 他所创立的集合论被誉为 20 世纪最伟大的数学创造，集合概念大大扩充了数学的研究领域，给数学结构提供了一个基础. 集合论不仅影响了现代数学，而且也深深影响了现代哲学和逻辑学.

§1.1.2 集合间的基本关系

知识点

- 集合关系
  - 子 集 $A \subseteq B$
  - 真子集 $A \subsetneqq B$
  - 空 集 $\varnothing \subseteq B$
  - 相等集合 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A = B$

重难点

1. 两个集合之间的关系是包含和不包含的关系.

[例如]$A = \{1,2,3\}$， $B = \{1,2,3,4\}$， $C = \{2,3,5\}$.

这里 $A \subsetneqq B$，即 A 真包含于 B，但 A 与 C 就不存在包含关系.

若 $A \subsetneqq B$，则 A 的元素是 B 的元素，但 B 中存在不属于 A 的元素.

即 $A \subseteq B \Rightarrow A = B$ 或 $A \subsetneqq B$，两种情况不能遗漏(A 是 B 的全部或 A 是 B 的部分).

2. 要证明两个集合相等，必须证明两个方面，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，才能说明 A 与 B 的元素完全相同.

3. 正确理解空集的概念.

(1) 空集的记号为 $\varnothing$，不能写成$\{0\}$，或$\{\varnothing\}$.

(2) 空集是任何集合的于集，因此在解题要防止漏掉空集的情况.

(3) 空集是任何非空集合的真子集，在具体问题中的作用是若 $\varnothing \subsetneqq A$，则推出 $A \neq \varnothing$.

4. 正确区分一些容易混淆的符号.

(1) $\in$ 与 $\notin$， (2)a 与$\{a\}$， (3)$\{0\}$ 与 $\varnothing$， (4)$\{\varnothing\}$ 与 $\varnothing$.

典型例题

[例 1] 写出集合$\{1,2,3\}$ 的所有子集及真于集.

[分析] 集合$\{1,2,3\}$ 的子集应该由空集、单元素集合、双元素集合和三元素集合组成，所以我们可以按这样的顺序写出所有的子集.

[解] 由子集的定义可知：集合$\{1,2,3\}$ 的于集为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$，有 8 个. 其中真于集为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，共 7 个.

[评注](1) 虽然问题简单，但解题要注意不能漏掉空集和集合本身；(2) 若集合中含有 n 个元素，由其子集的个数为 2^n 个.

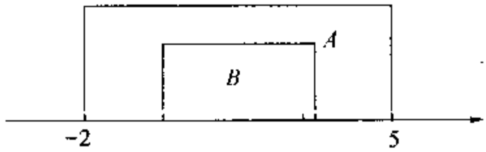
[例 2] 求满足条件$\{1,2\} \subsetneqq M \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ 的集合 M 的个数.

[解] 由题设知 M 是$\{1,2,3,4,5\}$ 的子集，与此同时又真包含集合$\{1,2\}$，所以 M 中必至少含有元素 1，2，而 3，4，5 三个元素可以含一个或含两个或含三个，所以问题的实质就转化为求$\{3,4,5\}$ 的非空于集的个数，故答案是 7 个.

[评注] 解这类题，首先要弄清是包含还是真包含，其次要学会将问题等价转化.

[例 3] 若集合 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$，$B = \{x \mid m+1 \leqslant x \leqslant 2m-1\}$，且 $B \subseteq A$，求由 m 的取值范围组成的集合.

[思路分析] 由子集的定义知，B 的元素必属于 A，也就是 B 的 x 取值范围包含于 A 的 x 取值范围中，所以用数轴表示可很直观地反映问题的实质.



[解] (1) 当 $m+1>2m-1$，即 $m<2$ 时，$B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$

(2) 当 $m+1\leqslant 2m-1$，即 $m\geqslant 2$ 时，$B\neq\varnothing$，要使 $B\subseteq A$，必须且只须：

$$\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1 \\ m+1\geqslant -2 \\ 2m-1\leqslant 5 \end{cases}，\quad 解得\ 2\leqslant m\leqslant 3.$$

故 $m<2$ 或 $2\leqslant m\leqslant 3$. 即所求 m 的取值集合为 $\{m\mid m\leqslant 3\}$.

[评注] (1) 有关子集的问题，要特别注意空集的情况；(2) 有关不等式的集合，充分利用数轴表示，可使问题直观易解，体会数形结合的作用；(3) 注意考查区间端点处是否可取等号.

[例 4] 判断下列三个集合之间的包含关系或相等关系.

$A=\{x\mid x=m+\dfrac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\}$，　$B=\{x\mid x=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\}$，

$C=\{x\mid x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\}$.

[分析] 三个集合的元素 x 的表示形成统一后，分析相同点和不同点，认清它们的属性，才能判断集合之间的关系.

[解] 在 A 中　$x=m+\dfrac{1}{6}=\dfrac{6m+1}{6}=\dfrac{3(2m)+1}{6},m\in\mathbf{Z}$.

在 B 中　$x=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3n-2}{6}=\dfrac{3(n-1)+1}{6},n\in\mathbf{Z}$.

在 C 中　$x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}$.

显然它们的分母分别相同，分子都是 3 的倍数加 1.

但 $p,n-1$ 都是整数，而 $2m$ 都是偶数，所以 $A\subsetneqq B=C$.

[评注] (1) 在探究集合的包含关系时，首先可将它们元素形成统一，再分析实质，找出异同点，从而使问题获解；(2) 注意培养自己的观察能力和分析问题能力.

[例 5] $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，其中 $a\in\mathbf{R}$，如果 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

[思路分析] 集合 A 和 B 都是方程的解集，$B\subseteq A$. 首先应用分类讨论的数学思想分 $B\neq\varnothing$ 与 $B=\varnothing$ 两种情况，然后根据一元二次方程的理论来解决问题.

[解] $\because x^2+4x=0$，　$\therefore x_1=0$ 或 $x_2=-4$，　$\therefore A=\{0,-4\}$，集合 B 是一元二次方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的解集.

(1) 当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得 $a<-1$.

(2) 当 $B=\{0\}$ 或 $\{4\}$ 时，$B\subsetneqq A$，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$，解得 $a=-1$，此时 $B=\{0\}$，满足 $B\subseteq A$.

(3) 当 $B=\{0,-4\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)>0 \\ -2(a+1)=-4 \\ a^2-1=0\end{cases}$，解得 $a=1$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $a=1$ 或 $a\leqslant -1$.

[评注] 对 B 分类讨论是解题的关键.

实践与探究

1. 在 $2\in\{0,1,2\}$；$\{0\}\in\{0,1,2\}\subseteq\{0,1,2\}$；$\varnothing\subseteq\{0,1,2\}$；$\{0,1,2\}=\{2,0,1\}$ 五个写法中，错误的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 若 $A=\{x\mid x>1\}$，$B=\{x\mid x\geqslant a\}$，且 $A\supseteq B$，则 ( )

A. $a>1$　　B. $a\geqslant 1$　　C. $a<1$　　D. $a\leqslant 1$

3. 下面四个命题：① 空集没有子集；② 空集是任何一个集合的真子集；③ $\varnothing=\{0\}$；④ 任何一个集合必有两个或两个以上的子集，其中正确的有 ( )

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

4. 集合 $M=\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则 ( )

A. $M=N$　　B. $M\supseteq N$　　C. $M\subseteq N$　　D. $N\cap M$

5. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x+4=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid (x+1)(x^2+3x-4)=0\}$，若 $A\subsetneqq P\subseteq B$，则满足条件的 P 有：__________.

6. 若 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=0\}$，$B=\{(x,y)\mid (x-y)^2=0\}$，则 A 与 B 的关系是__________.

7. 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid x\leqslant m+1$ 或 $x>m+3\}$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 m 的取值范围.

8. 已知非空集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且 S 还满足条件：若 $a\in S$，则 $6-a\in S$，求符合上述条件的集合 S 共有多少个？写出这些集合.

9. 设两个集合 $S=\{x\mid x=12m+8n,m,n\in\mathbf{Z}\}$，$M=\{x\mid x=20p+16q,p,q\in\mathbf{Z}\}$，试证明：$S=M$.

10. 设 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$，对 $B\subseteq A$，设 B 中各元素之和为 N_B.

(1) 若 $A=\{1,2,3\}$，问 B 有几个？你能求出 N_B 的总和吗？

(2) 若 $A=\{1,2,3,4\}$ 呢？

(3) 若 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 呢？你能得出什么结论？

知识拓展

罗素悖论

英国数学家、逻辑学家、哲学家罗素(Russell,1872～1970)于 1903 年提出:集合可以分为两类,一类是集合 A 是它本身的元素(这种集合称为本身分子集),如"一切概念的集合",它本身也是一个概念,它也属于这个集合,"一切集合的集合"也是一个本身分子集;第二类是非本身分子集,这就是我们平常所见的集合,比如有理数集 $\mathbf{Q}$,它不是有理数,所以 $\mathbf{Q}\notin\mathbf{Q}$.

那么一切非本身分子集的全体构成的集合 $W=\{x\mid x\notin x\}$ 是哪一种集合呢?

如果 W 是非本身分子集,从概念看,应有 $W\notin W$,但从 W 的元素构成看,$W\in W$;如果 W 是本身分子集,从概念看,$W\in W$,再从 W 的元素构成看,$W\notin W$,这样就得了一个悖论,称为罗素悖论. 1919 年,罗素还把上述悖论改写为更通俗的理发师悖论:某村只有一人理发,且该村的人都需理发,理发师约定,给且只给村中自己不给自己理发的人理发. 试问:理发师给不给自己理发?如果理发师给自己理发,那么违背了他的约定;如果理发师不给自己理发,那么按照他的约定,应给自己理发. 原因是理发师的约定中,虽然没有明说该村的一切人(或者所有的人),实际上,是指村里的一切人,当然包括他自己.

19 世纪中叶以后,数学界的气氛是自庆自慰的. 罗素悖论出现后,引起一片哗然,使人们对数学理论的正确性产生了怀疑,形成了数学史上非常严重的一次危机. 德国数学家、逻辑学家弗雷格正要出版《算术基础》第三卷,他称:"一个科学家所遇到的最不称心的事,莫过于在他的工作即将结束时,其基础崩溃了,罗素先生的一封信(提出了罗素悖论)正把我置于这个境地."德国数学家戴德金也收回了正欲出版的著作《什么是数和数是什么》.

以罗素悖论为起点,连续出现了一系列悖论,强烈地冲击了当时沉醉于丰硕成果中的过分乐观的人们. 当然,在惊异之余,人们还是获得了重大进展,取得了人类实践上的重大突破.

§1.1.3 集合的基本运算(一) 集合的并集与交集

知识点

交集：$A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$.

并集：$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 \in B\}$.

性质：$A \cup B \supseteq A$，$A \cup B \supseteq B$，$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$.

若 $A \cup B = A$，则 $B \subseteq A$.

若 $A \cap B = A$，则 $A \subseteq B$.

重难点

1. 关于并集：(1) 理解其中的"或"字的含义，它与自然语言中的"或"字的含义不同，"$x \in A$ 或 $x \in B$"包括三种情况：$x \in A$ 且 $x \in B$；$x \in B$ 且 $x \notin A$；$x \in A$ 且 $x \in B$.

(2) 对于 $A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$ 中，对于 A 与 B 的公共元素只写一次，不能认为是由 A 所有元素和 B 的所有元素组成的集合.

2. 关于交集：(1)$A \cap B$ 中任一元素都是 A 与 B 的公共元素.

(2)$A \cap B$ 是由所有 A 与 B 的公共元素组成.

(3) 当 A 与 B 没有公共元素时，$A \cap B = \varnothing$，不能说 A 与 B 没有交集.

典型例题

[例 1] 已知集合 $M = \{x \mid y^2 = x + 1\}$，$N = \{x \mid y^2 = -2(x-3)\}$，求 $M \cap N$.

[解] $M = \{x \mid y^2 = x+1\} = \{x \mid x = y^2 - 1\} = \{x \mid x \geqslant -1\}$.

$N = \{x \mid y^2 = -2(x-3)\} = \{x \mid -2(x-3) \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 3\}$.

$\therefore M \cap N = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

[评注](1) 认清 M 和 N 中元素是求 $M \cap N$ 的关键；(2) 用数轴表示 M 与 N 比较直观，不易出错.

[例 2] 已知 $A = \{2,4,a^2-a-1\}$，$B = \{1,3,a-1,a+2\}$，若 $A \cap B = \{2,5\}$，求 $A \cup B$.

[分析] 由 $A \cap B = \{2,5\}$，知 $2,5 \in A$，且 $2,5 \in B$，从而可求 a，进而求 $A \cup B$.

[解] 由于 $A = \{2,4,a^2-a-1\}$ 及 $A \cap B = \{2,5\}$，知 $a^2 - a - 1 = 5$，解得 $a = -2$ 或 $a = 3$.

当 $a = 3$ 时，$A = \{2,4,5\}$，$B = \{1,3,2,5\}$，满足题意.

当 $a = -2$ 时，$A = \{2,4,5\}$，$B = \{1,3,-3,0\}$，不满足题意.

$\therefore a = 3$ 且 $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$.

[评注](1) 本题确定 A、B 是求 $A \cup B$ 的关键，为此由条件先求出 a，由于 A 只有一个元素不确定，所以由 A 来求 a 比较方便；(2) 体会本题的解题策略.

[例 3] 集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - ax + (a-1) = 0\}$，$C = \{x \mid x^2 - mx + 2 = 0\}$，若 $A \cup B = A$，$A \cap C = C$，求 a，m.

[分析] 两集合之间的最基本运算是交集、并集及补集运算. 由于 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$，$A \cap C = C \Leftrightarrow C \subseteq A$，结合数轴进行解答.

[解] 依题设知 $A = \{1,2\}$，因 $A \cup B = A$，得 $B \subseteq A$，故集合 B 至多有元素 1,2.

方程 $x^2 - ax + (a-1) = 0$ 的二根为 $1, a-1$，从而

(1)$a - 1 = 2$，即 $a = 3$，此时 $B = \{1,2\}$；

(2)$a-1=1$，即 $a=2$，此时 $B=\{1\}$.

$\therefore a=2,3$.

$A\cap C=C$，则 $C\subseteq A$. 显然 C 含有元素 1,2 时，$m=3$，此时 $A=C$. 另一种情形是 $C=\varnothing$，此时方程 $x^2-mx+2=0$ 无实根，判别式 $\Delta=m^2-8<0$，即 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

$\therefore m$ 的值为 3，或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

[例 4] 集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，求 a 取何值时，$\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立.

[分析] $\varnothing\subsetneqq A\cap B$，说明 $A\cap B\neq\varnothing$.

又由题设可知 $B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$.

$\therefore 2$ 或 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解.

又由 $A\cap C=\varnothing$ 可知 2 和 -4 都不是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解.

$\therefore 3$ 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解.

[解] $B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}=\{2,-4\}$.

由 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立可知 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解.

将 3 代入方程，得 $a^2-3a-10=0$，解得 $a=5$，或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，此时，$A\cap C=\{2\}$ 与题设 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾.

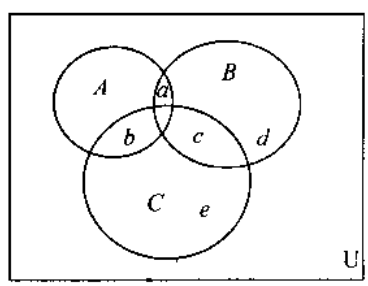
当 $a=-2$ 时，$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$，此时满足 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 与 $A\cap C=\varnothing$.

故 $a=-2$ 为所求.

[例 5] 某班有 50 人，学校开了甲、乙、丙三门选修课. 选修甲这门课的有 38 人，选修乙这门课的有 35 人，选丙这门课的有 31 人，兼选甲、乙两门的有 29 人，兼选甲、丙的有 28 人，兼选乙、丙两门的有 26 人，甲、乙、丙三门均选的有 24 人. 问此班三门均未选的有多少人?

[分析] 这是一道实际应用题，我们可以用集合的运算及 Venn 图来解决.

[解] 设选修甲、乙、丙三门课的同学分别组成集合 A、B、C，全班同学组成的集合为 U. 由题意画出示意图，则



选甲、乙而不选丙的有 $a=29-24=5$ 人；

选甲、丙而不选乙的有 $b=28-24=4$ 人；

选乙、丙而不选甲的有 $c=26-24=2$ 人；

仅选乙的有 $d=35-24-a-c=4$ 人；

仅选丙的有 $e=31-24-b-c=1$ 人；

由以上可知，至少选了一科的人数为

甲 $+c+d+e=38+2+4+1=45$ 人；

故三门课均未选的人数为 $50-45=5$ 人.

[评注] 利用集合的运算（交集、并集）及 Venn 图解决这类实际问题，思路清楚，叙述方便.

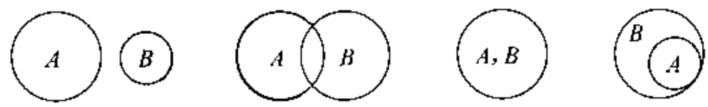
实践与探究

1. 已知集合 $P=\{x \mid x<3\}$，$Q=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$，那么 $P \cup Q$ 等于 （　　）

A. $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$　　B. $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$

C. $\{x \mid x \leqslant 4\}$　　D. $\{x \mid x \geqslant -1\}$

2. 若集合 $A-\{$矩形$\}$，$B=\{$菱形$\}$，则下列图中能正确表示两个集合关系的是（　　）



A　　B　　C　　D

3. 设 $M=\{1,2,m^2-3m-1\}$，$P=\{-1,3\}$，$M \cap P=\{3\}$，则 m 的值为 （　　）

A. 4　　B. -1　　C. 4 或 -1　　D. 1 或 -4

4. 若 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{3,a^2\}$，且 $A \cup B=\{1,3,a\}$，则满足条件的 a 的个数为

（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 已知集合 $A=\{x \mid -5<x<5\}$，集合 $B=\{x \mid -7<x<a\}$，集合 $C=\{x \mid b<x<2\}$，且 $A \cap B=C$，则 a,b 的值为 （　　）

A. $a=5, b=-7$　　B. $a=5, b=-5$

C. $a=2, b=-7$　　D. $a=2, b=-5$

6. 设集合 $A=\{|a+1|,3,5\}$，集合 $B=\{2a+1,a^2+2a,a^2+2a-1\}$，若 $A \cap B=\{2,3\}$，则 $a=$ ______.

7. 已知集 $A=\{y \mid y=x^2-2x-3\}$，$B=\{y \mid y=-x^2+2x+1\}$.
求 (1) $A \cap B$；　(2) $A \cup B$.

8. 已知集合 $A=\{x \mid x>2$ 或 $x<-3\}$，$B=\{x \mid 4x+p<0\}$，且 $A \cup B=A$，求实数 p 的取值范围.

9. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$，$B=\{x \mid x^2-ax+a-1=0\}$，$C=\{x \mid x^2-mx+1=0\}$，且 $A \cup B=A$，$A \cap C=C$，求 a,m 的值或取值范围.

10. 50 名学生做物理、化学两种实验，已知物理实验做得正确的有 40 人，化学实验做得正确的有 31 人，两种实验都做错的有 4 人，问这两种实验都做对的有几人？