课程代码：4184

高等教育自学考试新版

数学教材辅导系列

线性代数（经管类）习题详解

附：线性代数（经管类）自学考试大纲

刘吉佑　徐诚浩　编著

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

课程代码：4184

高等教育自学考试新版　数学教材辅导系列

线性代数（经管类）习题详解

附：线性代数（经管类）自学考试大纲

刘吉佑　徐诚浩　编著

清华大学出版社
北京

内容提要

本书是高等教育自学考试新版数学教材《线性代数(经管类)》(刘吉佑,徐诚浩,武汉大学出版社,2006)中每章的内容提要和全部习题的详细解答,具体内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、实二次型等.本书在编写过程中充分考虑到自考生自学时的困难,解题过程比较详尽.书中还附有自学考试大纲与题型举例及解答,以方便读者自学时参考.

本书是经济管理类自考生学习线性代数课程必备的教学辅导书,也可作为普通高校经济管理类学生学习线性代数的习题辅导及参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(经管类)习题详解/刘吉佑,徐诚浩编著.—北京:清华大学出版社,2007.2
(高等教育自学考试新版数学教材辅导系列)
ISBN 978-7-302-14212-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①刘… ②徐… Ⅲ.线性代数—高等教育—自学考试—解题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 147502 号

责任编辑:佟丽霞 王海燕
责任校对:焦丽丽
责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社 **地 址:**北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编:**100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175 **邮购热线:**010-62786544
投稿咨询:010-62772015 **客户服务:**010-62776969
印 刷 者:北京四季青印刷厂
装 订 者:三河市兴旺装订有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 **印 张:**10.25 **字 数:**224 千字
版 次:2007 年 2 月第 1 版 **印 次:**2007 年 2 月第 1 次印刷
印 数:1~4000
定 价:15.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。
联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:024065-01

Word from Publisher

出版说明

根据近年来我国高等教育发展的新形势以及高等教育自学考试多年来的实践经验，2004年，全国高等教育自学考试指导委员会组织专家，经过反复讨论重新拟定了高等教育自学考试某些专业数学课程的考试大纲，同时也组织各高校的教师按照新的数学考试大纲编写了“高等教育自学考试新版数学教材”，包括《高等数学（工专）》、《高等数学（工本）》、《线性代数（经管类）》、《概率论与数理统计（经管类）》4本书.

为了使广大的自考生更好地学习上述课程，编写“高等教育自学考试新版数学教材”的作者组织起来编写了“高等教育自学考试新版数学教材辅导系列”，包括《高等数学（工专）习题详解》、《高等数学（工本）习题详解》、《线性代数（经管类）习题详解》、《概率论与数理统计（经管类）习题详解》.这套丛书包括上述新版数学教材中每章的内容提要和全部习题的详细解答，既可以和上述新版数学教材配合起来使用，也可以作为单独的辅导书来使用. 这套丛书的作者都是在各个高校从教多年的数学教师，有从事高教自考助学的丰富经验. 所以无论在新教材还是在与之配套的习题详解中，作者都能很准确地把握新大纲中对于考核知识点、难度、能力层次等项要求，并能对于广大自考生自学中的难点与困惑作出详细的注释和解答.

我们相信，这套系列丛书的推出将有利于指导广大自考生的自学，帮助他们走上自学成才的成功之路.

清华大学出版社

2006年10月

前言

2004年，全国高等教育自学考试指导委员会组织专家经过反复讨论,重新拟定了自学考试课程“线性代数(经管类)”自学考试大纲.新大纲强化了以线性方程组的基本知识和基本理论作为其主线,其主要内容为：行列式、矩阵、线性空间、线性方程组、特征值与特征向量和实二次型.它相当于普通高校经济管理类专业“线性代数”课程的内容.

2004年，我们参与了线性代数（经管类）课程考试大纲的修订工作，并根据新版考试大纲主编了新教材《线性代数（经管类）》（武汉大学出版社，2006年版），为了给自考生自学此门课程提供帮助和指导,特又编写了此书.

我们从教多年,并有从事高教自考助学的丰富经验.在本书的编写过程中,对教学的难点写得尽量详细,使得课堂教学的细微之处也能在本书中得以体现.本书是以题解的形式编写的.在每一章的第一部分都简略地叙述了本章的基本内容,供读者在解题时查阅.第二部分是习题详解，对于每一道习题,都提供了解答,部分习题还给出了较详细的说明,以便读者能准确、扎实地掌握有关的知识点.

在使用此书时希望读者注意以下几个方面：

(1) 教材中的习题应先由读者自行独立解答，然后再对照此书中的解答，找出其中的差异.

(2) 此书对教材中的练习题提供了简易而准确的解法，对部分稍有难度的练习题给出了一题多解,尤其是给出了证明题的证明思路和方法,这些证明思路和方法读者必须仔细思考,适当记忆并熟练掌握.

(3) 不能把此书仅仅当做阅读材料.把题解在步骤或逻辑上看懂,并不等于真懂.对练习题的解答,应注意找出其关键步骤和知识点,并加以领会和记忆.这样才能举一反三,触类旁通.

(4) 书中的“注”，有的是讲述概念的;有的是解释计算步骤的;有的是举出反例的;有的是提出常见的各种解法.仔细研究题后的“注”，对于全面掌握本题内容是很有益的.

解题的正确思路主要来源于对基本概念的透彻理解.学习线性代数,要善于对基本概念举出正例和反例,弄清定义的含义和条件.只有在透彻理解的基础上，对照比较各种相关结论或公式之间的区别和联系，并通过分析例题和自做习题去加

深理解，帮助记忆，才会熟能生巧，举一反三，而掌握基本方法的主要途径是动手做习题.

本书的第 1，2，3 章由刘吉佑编写，第 4，5，6 章由徐诚浩编写．我们希望，基于我们对广大自考生状况的深刻了解以及多年的教学经验而编写的本书能使读者学业有成．由于水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请读者和同行教师不吝赐教，我们将不胜感激.

作　者

2006 年 10 月

CONTENTS

目录

行　列　式

内容提要

一、行列式的概念

1. 二阶行列式和三阶行列式

（1）二阶行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式等于它的左上角到右下角的两个元素的乘积减去从右上角到左下角的两个元素的乘积.

（2）三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2. n 阶行列式的定义

n 阶行列式表示一个数，记为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它由 n 行、n 列元素（共 n^2 个元素）组成. 其中，每一个数 a_{ij} 称为行列式的一个**元素**，它的前一个下标 i 称为**行标**，表示这个数 a_{ij} 在第 i 行上；后一个下标 j 称为**列标**，表示这个数 a_{ij} 在第 j 列上. 所以 a_{ij} 在行列式的第 i 行和第 j 列的交叉位置上. 有时也把 D_n 记为 $D_n=|a_{ij}|_n$.

3. 余子式和代数余子式

在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后剩下的 $n-1$ 行和 $n-1$ 列元素，按原来的相对顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式，记为 M_{ij}，称为元素 a_{ij} 的**余子式**.

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

4. n 阶行列式的递归定义

设 D_n 是一个 n 阶行列式，则将 D_n 按其第一列展开为

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41}+\cdots+a_{n1}A_{n1}.$$

行列式 D_n 可以按其任意一列展开，也可以按其任意一行展开.

由余子式和代数余子式的关系有

$$D_n=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}-a_{41}M_{41}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

5. 行列式的展开定理

定理 1.1(行列式展开定理)　n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

其中，A_{ij} 是元素 a_{ij} 在 D 中的代数余子式.

上述展开定理也可以表示成

$$D=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$D=(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

6. 特殊行列式的计算

(1) 对角行列式

n 阶行列式 D_n 中，从左上角到右下角的这条对角线称为主对角线，位于主对角线上 (i,i) 位置的元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 D_n 的主对角线上元素. 如果在行列式 D_n 中，除了主对角线上元素以外，其他位置的元素都等于零，则这样的行列式称为对角行列式. 对角行列式的值等于它的主对角线上元素的乘积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 上(下)三角行列式

若行列式 D_n 中主对角线以下的元素都等于零，则称 D_n 为上三角行列式；类似地，若行列式 D_n 中主对角线以上的元素都等于零，则称 D_n 为下三角行列式. 上三角行列式与下三角行列式的值都等于它的主对角线上元素的乘积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

例如,三阶范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

二、行列式的性质

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1.2 用数 k 乘行列式 D 中某一行(或列)的所有元素所得到的行列式等于 kD,即行列式可以按行和按列提出公因数.

性质 1.3 互换行列式的任意两行(列),行列式改变符号.

推论 如果行列式中有两行(列)相同,则此行列式等于零.

性质 1.4 如果行列式中某两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 1.5 行列式可以按行(列)拆开,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.6 把行列式的某一行(列)的所有元素都乘以同一个数后加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

三、行列式的计算

行列式的计算有两种基本方法:

(1) 利用行列式的性质,把原行列式化为简单的行列式.常用的方法是把原行列式化为

上三角(或下三角)行列式.

(2) 利用行列式的性质,把行列式的某一行(列)的元素尽可能多地化成零,然后按该行(列)展开,把行列式的阶数降低,再计算.

四、克拉默法则

定理 1.2 如果 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则线性方程组必有惟一解:

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

其中,

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

是将系数行列式 D 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换为方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 得到的行列式.

定理 1.3 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式不等于零,即 $D=|a_{ij}|_n\neq 0$,则它只有零解.

习题详解

习题 1-1 行列式的定义

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}=(x+1)(x^2-x+1)-x^3=(x^3+1)-x^3=1.$

(2) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} & \dfrac{2x}{1+x^2} \\ \dfrac{-2x}{1+x^2} & \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{vmatrix}$.

解 原式$=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-\dfrac{-2x}{1+x^2}\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}=1.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}=1-\log_b a\ \log_a b=1-\dfrac{\lg a}{\lg b}\cdot\dfrac{\lg b}{\lg a}=1-1=0.$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$.

解 直接用三阶行列式的对角线法则来求该行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}=0\cdot c\cdot 0+a\cdot d\cdot 0+0\cdot b\cdot e-0\cdot c\cdot 0-a\cdot b\cdot 0-0\cdot d\cdot e$$
$$=0.$$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 3 & * & * \\ 0 & 4 & * & * & * \\ 5 & * & * & * & * \end{vmatrix}$.

分析 这是一个 5 阶行列式. 对于 4 阶以上的行列式没有类似于三阶行列式那样的对角线法则. 我们用行列式按其第 1 列展开的方法来计算该行列式. 注意到该行列式第 1 列中除了第 5 行上的元素为 5 外,其余元素均为零,所以行列式的值就等于这个数 5 与其代数余

子式的乘积,这样做下去就可以计算出行列式的值.

解

$$\text{原式}=5\times(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&*\\0&3&*&*\\4&*&*&*\end{vmatrix}=5\times4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&0&1\\0&2&*\\3&*&*\end{vmatrix}$$

$$=-20\times(-6)=120.$$

(6) $\begin{vmatrix}*&*&*&*&*&1\\*&*&*&*&2&0\\*&*&*&3&0&0\\*&*&4&0&0&0\\*&5&0&0&0&0\\6&0&0&0&0&0\end{vmatrix}$.

分析 该行列式的特点是:在它的第 1 列中,从第 1 到第 5 行的各元素的余子式,它们的第 5 行都是元素全为零的行,因而这些余子式都为零,从而相应的代数余子式也为零. 于是原行列式的值等于其第 1 列中第 6 行元素 6 与其代数余子式的乘积. 类似地做下去即可计算出行列式的值.

解

$$\text{原式}=6\times(-1)^{6+1}\begin{vmatrix}*&*&*&*&1\\*&*&*&2&0\\*&*&3&0&0\\*&4&0&0&0\\5&0&0&0&0\end{vmatrix}=-6\times5\times(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}*&*&*&1\\*&*&2&0\\*&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-30\times4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}*&*&1\\*&2&0\\3&0&0\end{vmatrix}=120\begin{vmatrix}*&*&1\\*&2&0\\3&0&0\end{vmatrix}$$

$$=120\times(-6)=-720.$$

注 (1) 因为行列式可以按其任一行展开,所以也可以将本题的行列式先按其第 6 行展开,降低一阶后,再按第 5 行展开,再按第 4 行展开,……,再按第 1 行展开,计算出值.

(2) 根据定理 1.1 可知,如果行列式的某一行(列)是元素全为零的行(列),则此行列式的值为零.

2. 证明:当 $b\neq0$ 时,

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}b^{-1}&a_{13}b^{-2}\\a_{21}b&a_{22}&a_{23}b^{-1}\\a_{31}b^2&a_{32}b&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

证明 对等式左边的三阶行列式用对角线法则直接计算即可证明所需要证明的等式.

$$
\begin{aligned}
\text{原式左边} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}b^{-1}a_{23}b^{-1}a_{31}b^{2} + a_{13}b^{-2}a_{21}ba_{32}b \\
&\quad - a_{13}b^{-2}a_{22}a_{31}b^{2} - a_{12}b^{-1}a_{21}ba_{33} - a_{11}a_{23}b^{-1}a_{32}b \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&= \text{右边}.
\end{aligned}
$$

3. 在以下各题中,a 是参数.

(1) 求出 $\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件.

解 由于

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 3 = (a-1)(a-3),$$

所以

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

的充分必要条件是$(a-1)(a-3)\neq 0$,即 $a\neq 1$ 且 $a\neq 3$.

(2) 求出 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} < 0$ 的充分必要条件.

解 由于

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = -a^2 + 4,$$

所以

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} < 0$$

的充分必要条件是$-a^2+4<0 \Leftrightarrow a^2>4 \Leftrightarrow a<-2$ 或 $a>2$.

习题 1-2 行列式按行(列)展开

1. 求出 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 中所有元素的余子式和代数余子式的值,并求出 D

的值.

解 D 中所有元素的余子式为

$$M_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}=-3,\quad M_{12}=\begin{vmatrix}4&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-2,\quad M_{13}=\begin{vmatrix}4&1\\-1&1\end{vmatrix}=5,$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&-1\end{vmatrix}=1,\quad M_{22}=\begin{vmatrix}2&0\\-1&-1\end{vmatrix}=-2,\quad M_{23}=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}=1,$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&2\end{vmatrix}=-2,\quad M_{32}=\begin{vmatrix}2&0\\4&2\end{vmatrix}=4,\quad M_{33}=\begin{vmatrix}2&-1\\4&1\end{vmatrix}=6.$$

D 中所有元素的代数余子式为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-3,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)\times(-2)=2,$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=5,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-1,$$
$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-2,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-1,$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-2,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-4,$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=6.$$

行列式 D 的值为

$$D=2A_{11}+4A_{21}+(-1)A_{31}=2\times(-3)+4\times(-1)+(-1)\times(-2)=-8.$$

2. 已知 4 阶行列式 D 中第 3 列元素依次为 $-1,2,0,1$,它们在 D 中的余子式依次为 $5,3,-7,4$,求出 D 的值.

解 依题意知

$$a_{13}=-1,\quad a_{23}=2,\quad a_{33}=0,\quad a_{43}=1,$$
$$M_{13}=5,\quad M_{23}=3,\quad M_{33}=-7,\quad M_{43}=4.$$

根据行列式的展开定理,得

$$\begin{aligned}D&=a_{13}\cdot(-1)^{1+3}M_{13}+a_{23}\cdot(-1)^{2+3}M_{23}+a_{33}\cdot(-1)^{3+3}M_{33}+a_{43}\cdot(-1)^{4+3}M_{43}\\&=(-1)\times5+2\times(-1)\times3+0\times1\times(-7)+1\times(-1)\times4\\&=-15.\end{aligned}$$

3. 求出以下行列式的值:

$$\begin{vmatrix}-1&2&5&4\\0&3&2&0\\0&4&1&-1\\0&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解 行列式第 1 列只有一个非零元 -1,于是按第 1 列展开,得

$$\text{原行列式}=-1\times\begin{vmatrix}3&2&0\\4&1&-1\\1&1&3\end{vmatrix}=-\left(3\times\begin{vmatrix}1&-1\\1&3\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}4&-1\\1&3\end{vmatrix}\right)\quad(\text{按第 1 行展开})$$

$$=-(3\times4-2\times13)=14.$$

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 将行列式按第 4 行展开,得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = d \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

上式中右边的三阶行列式的第 3 行是全零行,故其值为零.

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix}$.

解 先将行列式按第 1 列展开,得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix} + c_1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} - b_1 c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 d_1 (a_2 d_2 - b_2 c_2) - b_1 c_1 (a_2 d_2 - b_2 c_2) \\ &= (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2). \end{aligned}$$

4. 计算:

(1) $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ x & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 将行列式按第 1 列展开,得

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ x & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-1-1-1-1-1) - x(1+1+1-1+1+1)$$