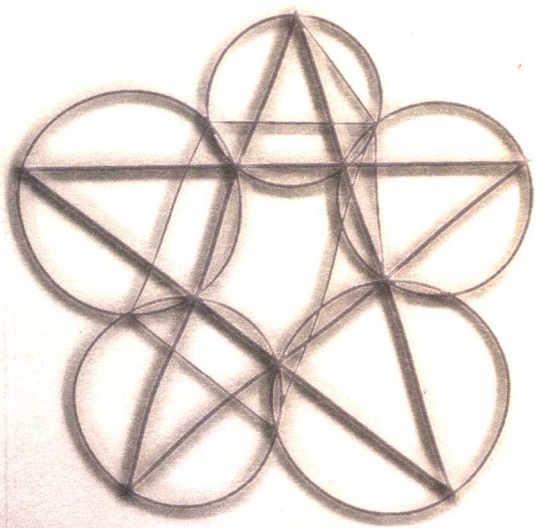


數學與數學人

潘雲鶴



主編
丘成桐
刘克峰
季理真

No.2 触觉·与数学同行

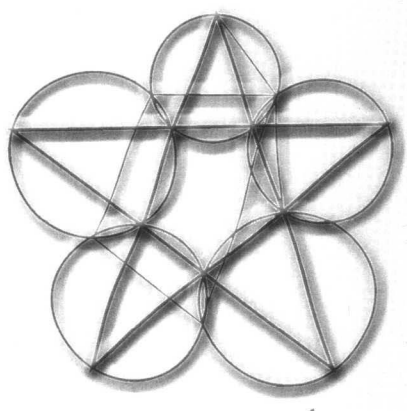
数学与生活

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

Mathematics and Mathematical People Vol. 1

01-49
58
2007

No. 2 触觉 · 与数学同行



数学与生活

数学与数学人

主 编 丘成桐 刘克峰 季理真

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

Mathematics and Mathematical People

图书在版编目 (CIP) 数据

触觉·与数学同行：数学与生活 / 丘成桐，刘克峰，
季理真主编. —杭州：浙江大学出版社，2007.3

(数学与数学人)

ISBN 978-7-308-04802-6

I. 触... II. ①丘... ②刘... ③季... III. 数学—
青少年读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 070280 号

丛书主持 陈晓嘉

责任编辑 朱宏达 徐素君

特约编辑 许洪伟 徐浩

装帧设计 氧化光阴

封面摄影 洪保平

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 杭州富春印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 12.5

字 数 222 千

印 数 0001—3000

版 印 次 2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-04802-6

定 价 25.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

《数学与数学人》丛书序言

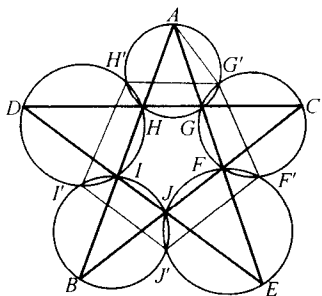
丘成桐

《数学与数学人》是一套国际化的科学普及丛书,我们将邀请当代一流的中外科学家谈他们的数学人生——研究经历和成功经验。活跃在研究前沿的数学家们将会用轻松的文笔,通俗地介绍数学各领域激动人心的最新进展、某个数学专题精彩曲折的发展历史以及数学在现代科学技术中的广泛应用。

数学是一门很有意义、很美丽,同时也很重要的科学。从实用来讲,数学的方法和应用遍及到物理、生物、化学、工程等各个领域,甚至与经济等社会科学有很密切的关系。数学为这些学科的发展提供了必不可少的工具,对于解释自然界的纷繁现象具有最基本的重要性;而与此同时,数学还兼具诗歌与散文的内在气质,既是严谨的又充满想象的张力。所以,数学是一门很特殊的学科。她既有文学性的一面,也有应用性的一面,我本人对这几方面都很感兴趣,探讨它们之间妙趣横生的关系,让我真正享受到了研究数学的乐趣。

我想不只数学家能够体会到这种美,作为一种基本理论,物理学家和工程师也可以体会到这种美的意境和力量。我们在中学学习过最简单的平面几何,由几个简单的公理能够推出很复杂的定理,同时每一步的推理又是完全没有错误的,这是一个十分美妙的过程。进一步地,我们可以用现代微积分甚至更高深的数学方法来描述、演绎物质世界的各种现象,模拟和发现其中蕴涵的规律。比如,社会生活中人类的面部表情或者衣服的飘动;高科技中密码的解构、电脑各种功能的实现,都可以用数学来描述和模拟。能够用一种简洁的语言解释很繁复、很自然的现象,这是数学享有“科学皇后”地位的重要原因之一。以简驭繁,这是一种很美好的感觉,就好像我们能够从朴素的外在表现得到美的感受。这种以简洁的语言形式揭示物质世界内蕴之美的能力不单是数学才有的,而是与文化艺术共通的。比如一幅张大千或者齐白石的国画,寥寥几笔,栩栩如生的自然美景便跃然纸上。

很明显,我们国家领导人早已欣赏到数学的美和数学作为一种基础科学的重要性。一九九九年,国家主席江泽民先生在澳门濠江中学提出了一个几何命题:五角星的五角套上五个环后,环环相交的五个点必定共圆。这个意义深远、高雅的几何命题,令海内外的数学家极为欣赏。经过媒体传播,大大地激发了国



五边形 $FGHIJ$ 的边延长后得五角星 $ABCDE$ (如图), 每个“角”(三角形)的外接圆相交, 除 F, G, H, I, J 外又有五个交点 F', G', H', I', J' 。证明这五点共圆。

人对数学的热情。我希望本丛书也能够达到同样的效果。让数学成为我们国人文化的一部分, 让我们的年轻人在中学念书时就懂得欣赏大自然的真和美, 用数学的眼光体味自然、社会的和谐与简洁!

丘成桐

二零零四年十二月三十日

目 录

第一章 数学感悟	001
1.1 我的数学之路——丘成桐	001
1.2 早期研究生涯的一点体会——杨乐	015
1.3 知识、技巧与想象力——刘克峰	021
1.4 漫谈数学与数学人——季理真	033
1.5 不合时尚的追求——Freeman Dyson	037
第二章 数学史话	050
2.1 20 世纪的数学——Michael Atiyah	050
2.2 法国在数学发展中所起的作用——Elie Cartan	071
2.3 数学与诺贝尔奖——黄文璋	092
2.4 美国如何变成数学超级强国——曹亮吉	104
第三章 数学与艺术	111
3.1 数学和中国文学的比较——丘成桐	111
3.2 对称在艺术与科学中的作用——季理真	129
3.3 数学与音乐——陈秀惠	158
3.4 数学大师塞尔的文学阅读——胡作玄	166
第四章 数学与科技	171
4.1 气候与环境预测和调控中的数学问题——曾庆存	171
4.2 抽象的价值——吴家睿	180
4.3 掷骰子的数学——William Benter	186
4.4 医学成像的数学知识——Barry Cipra	191

第一章 数学感悟

1.1 我的数学之路

文/丘成桐

我在中国香港的郊区——元朗和沙田——长大。那里没有电,也没有自来水。小时候就在河中洗澡。家中有8个兄弟姐妹,食物少得可怜。5岁时参加某著名小学的入学试,结果没考上。原因是用了错误的记号,如把57反写成75,69反写成96等。

我只能上一所小小的乡村学校。那里有很多来自农村的粗野小孩。受到这些小孩的威吓,加上老师处理不善,不到一年,我便身患重病。在家中养病的半年,我思索着如何跟同学老师相处。升上小六时,我已经是一群小孩的首领,带着他们在街头乱闯。

家父是位教授。他教了我不少中国文学。可是,他并不知道我曾旷课好一段日子(或者这是因为我在家中循规蹈矩,他教授的诗词我也能背诵如流吧)。逃学的原因是老师不怎么教学,在学校闷得发慌,不久连上街也觉得无聊了。当时香港有统一的升中试。我考得并不好,但幸好分数落在分界线上。

政府允许这些落在分界线上的学生申请私立中学,并提供学费。我进入了培正中学。培正是一所很好的中学。中学生涯的第一年乏善可陈。我的成绩不大好,老师常常对我很生气。大概刚从乡村出来,“野性”未改吧。我热衷于养蚕、养小鱼,到山上去捉各种小动物。沙田的风景美丽清新,在大自然的怀抱里,倒是自得其趣,到如今还不能忘怀。

当时武侠小说盛行,我很喜欢读这些小说,没有钱去买,



丘成桐

当代数学大师,现任哈佛大学讲座教授。1971年师从陈省身先生在加州大学伯克利分校获得博士学位。美国科学院院士,中国科学院和俄罗斯科学院的外籍院士。筹资成立浙江大学数学科学研究中心,中国香港中文大学数学研究所和北京晨兴数学研究所三大学术机构,担任主任,不取分文报酬。培养的50余位博士中多数是中国人,其中许多已经成为国际上杰出的数学家。由于对中国数学发展的突出贡献,获得2003年度中华人民共和国科学技术合作奖。

就向邻居借。父亲不赞成我读这些小说,认为肤浅,但我还是偷偷去看,也看了各种不同的章回小说,如《七侠五义》、《说岳全传》、《东周列国志》等杂书。

父亲从我小学五年级开始教我诗词、古文和古典小说,如《三国演义》、《水浒传》、《红楼梦》、《西厢记》等。父亲坚持我在看这些古文时,要背诵其中的诗词。当时虽以为苦,但顺口吟诵,慢慢也习惯了。但总觉得没有看武侠小说来得刺激。

但是真正对我有影响的却不是武侠小说。中国古典文学深深影响了我做学问的气质和修养。近代的作品,如鲁迅的作品也在阅读之列。记忆深刻的有:路是人行出来的,自己的路更要自己去走。

我们家中常有父亲的学生来访,往往兴高采烈地谈学问。他们讨论时常常谈及希腊哲学,虽然我对希腊哲学不大了解,但却对它留下了深刻的印象。希腊学者对真理和美无条件的追求,成了我一生治学的座右铭。他们对康德的哲学、对自然辩证法的讨论常常使我莫名其妙。但是久而久之,竟然引起了我对自然科学的兴奋。西方的名著如《浮士德》、《战争与和平》等,虽有接触,但远不如中国文学对我的印象深刻。

我开始研读史学名著《史记》和《左传》,对《史记》尤其着迷。这不仅是由于其文字优美、音调铿锵,而且还因为它叙事求真、史观独特。直到现在,我还不时披阅。史学大师驻足高涯,俯视整个历史,与大科学家的思索风云、探索宇宙之奥秘遥相呼应。

在当时读这些文章,大部分不能够领会,尤其困难的是读冯友兰写的《新原道》和《新原人》,但是反复地去读,总有点收获。晋陶渊明:

好读书,不求甚解,每有会意,便欣然忘食。

其实在做科学时,也往往有同样的经验,读书只要有兴趣,不一定要全懂,慢慢地自然领会其中心思想;但同时须做到:不戚戚于贫贱,不汲汲于富贵。

这是古人的经验,陶渊明的古文和诗有他的独特气质,深得自然之趣;我们从事科学研究的学者也需要得到自然界的气息,需要具备同样的精神。

在以后的日子里,我都以此作为原则,以研读学问为乐事,不以为苦。在父亲的循循善诱下,我开始建立起对人生的看法。到如今,我读《史记》至以下一段时,仍然使我心志清新。司马迁《孔子世家赞》:

天下君王至于贤人,众矣!当时则荣,没则已焉,孔子布衣,传十余世,学者宗之。

假如我们追求的是永恒的真理,即使一时受挫折,也不觉灰心。韩愈:

苟余行之不迷,虽颠沛其何伤。

我读《左传》,始知有不朽的事情。据《左传·襄公二十四年》:

叔孙豹闻之,太上有立德,其次有立功,其次有立言,虽久不废,此之谓不朽。

以前我以为立德跟立言没有关系,但是经数十年的观察才知道立德的重要性。立德、立功、立言之道,必以谦让质朴为主。

我有一个学生在南京大学接受电视台采访时曾自炫称:“会当凌绝顶,一览众山小。”真乃轻妄浮夸之言。其实远山微小,越近越觉其宏大。往往众人合作才能跨过困难的地方,在没有尝试做创造性的学问时,才会有这种肤浅的说话。

在培正的第二年,我多言多动,老师要记我小过。她是我的班主任,责任心强,诚然是为我好。当她知道家父是位教授,却拿着微薄的薪酬后,大为震动。此后,在她悉心栽培下,我在课堂上规矩多了。就在这年,我们开始学习平面几何。

同学对抽象思维都不习惯。由于在家中时常听父亲谈论哲学,对利用公理进行推导的做法,我一点也不觉得见外。学习几何后,我对父亲的讲话,又多明白了几分。利用简单的公理,却能推出美妙的定理,实在令人神往。

对几何的狂热,提高了对数学(包括代数)的鉴赏能力。当你喜欢某科目时,所有有关的东西都会变得浅易。我对历史也甚有兴趣。它培养我对事物要整体观看事件是如何发生的?到底是甚么原故?将来会如何?

就在这时,父亲完成了他的西方哲学史。他跟学生谈话,总是说应整体地去看历史。这种观念深深地影响了我。这种想法,在往后的日子中,指引我去寻找研究项目。父亲的书对我有很深的影响。书中第一页的引言《文心雕龙·诸子篇》:

身与时舛,志共道申。标心于万古之上,而送怀与千载之下。

这是何等的胸襟,与古人神交,而能送怀与后世,确是一个学者应有的态度。

哲学史的目的有三:一曰求因,哲学思潮其源甚多,必先上溯以求之;二曰明变,往昔哲学思想交缠纠结,故重理其脉络,是为要务;三曰评论,所有思潮及其流派,皆一一评论,作警策精辟之言。这三点和自然科学的研究有密切的关系,再加上创新,便可以概括研究的方法了。

14岁时,父亲便去世了。这或许是我一生中最大的打击。在一段颇长的日子里,对父亲离开了我和家人的事实,我都无法置信。家中经济顿入困境,我们面临辍学。幸得母亲苦心操持,先父旧交弟子的援手,我们才幸免沦落。

家中剧变,令我更加成熟坚强。困境中人情冷暖,父亲生前的教导,竟变得真实起来。以前诵读的诗词古文,有了进一步的体会。我花了整整半年,研习古典文学和中国历史,藉此抚平绷紧的心弦。典丽的诗词教人欣赏自然之美,排除了世俗功利的思想。

我阅读了大量数学书籍,并考虑书中的难题。当这些难题都解决以后,我开始创造自己认为有挑战性的题目。由个人去创造问题此后变成我研究事业中最关键的环节。学校的课本已经不能满足我的需求了。我跑到图书馆、书店去看书。我花了许多时间打书钉,阅读那些买不起的书本。我读了华罗庚先生写的很多参考书,无论在分析或数论上的讨论,都漂亮极了。也看了很多帮助课堂解题的书,例如陈明哲写的一些小册子。一般来说,我会比课程早一个学期做完所有的习题,所以听数学课是一种享受。

从15岁起,我开始给低年级学生当家教,以帮补家计。我找到一些巧妙的方法,使成绩低劣的孩子摇身变成优等生,为此我觉得有点飘飘然。我积累了教导年轻人的经验,同时也体会到教学相长的道理。

我们的数学老师十分好。他教授的内容,比课程要求更加艰深,但我觉得丝毫不费气力。其实我的同学们虽然叫苦,但是总的来说,数学都不错,这叫作“取法乎其上,得乎其中”。近代数学的教学方法,恐怕适得其反,取法乎其中,得乎其下。

当时我们的物理老师不太行,对此不无失望。中学时养成不了物理上的基本直观,至今于心还有戚戚焉。国文老师却是无懈可击。他是我的父执辈。他教导我们思想要不落俗套。

国文教师说思维要自出机杼,读好书之余,烂书也无妨一读,以资比较。因此我甚么书都啃。他这种观点,就是放诸我日后的科学生涯中,也有其可取之处。作文堂的一个典型题目——《猪的哲学观》。于是大伙儿兴高采烈,自由发挥。在班里我并非名列前茅,数学科的等级也不见得最高。但我比同班诸子想得更深,书也读得更多。

中学读书,除数学外,真正对我前途有影响的是国文和历史。现在来谈谈中学国文和历史对我的影响。下面一段文章使我觉得做学问是我一辈子的志愿。曹不《典论·论文》:

盖文章，经国之大业，不朽之盛事。年寿有时而尽。荣乐止乎其身。二者必至之常期，未若文章之无穷。是以古之作者，寄身于翰墨，见意于篇籍，不假良史之辞，不托飞驰之势，而声名自传于后。

有了做学问的志愿后，我尽量培养自己做学问的兴趣，这要从做大量的习题和思考开始。《论语》：

学而时习之，不亦乐乎。学而不思则罔，思而不学则殆。

追求学问的道路曲折有致，必须要有毅力，才能持久。《楚辞》所描述的浓厚的感情使我感受良深。《离骚》：

亦余心之所善兮，虽九死其犹未悔。

《抽思》：

惟郢路之辽远兮，魂一夕而九逝。

《离骚》：

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。

我在中学和大学时就注重培养气质，有好的气质，才能够有志趣去做大学问。孟子：

我知言，我善养吾浩然之气。

有很多人以为自己不是天才，没有办法做大学问。请看曹丕所论：

譬诸音乐，曲度虽均，节奏同检，至于引气不齐，巧拙有素，虽在父兄，不能以移子弟。

但我认为这是错误的看法，气质是可以改变的，下面的故事可以说明这个看法。《琴苑要录》：

伯牙学琴于成连，三年而成；至于精神寂寞，情之专一，未能得也，成连曰：吾学不能移人之情，吾师有方子春，在东海中，乃赍粮从之，至蓬莱山，留。伯牙曰：“吾将迎吾师。”刺船而去，旬时不返，伯牙心悲，延颈四望，但闻海水汨没，山林谷冥，群鸟悲号，仰天长叹曰：“先生将移我情。”乃援琴作歌。

可见师友和读书的环境足以转变人的情怀雅志。我在中学、大学和研究院都深受良师益友的影响，以后才慢慢成长。

其实做学问，无论是自然科学或文学都有气质的问题，从文章中，往往可以看出作者的修养。古代注重音乐，从乐声中可以看见国家的盛衰，也是同样的道理。《左传》季札观乐：

吴公子札来聘，请观于同乐，使工为之歌《周南》《召南》。曰：“美哉，始基之矣。犹未也，然勤而不怨矣。”

为之歌《郑》，曰：“美哉，其细已甚。民不堪也，是其先亡乎。”

为之歌《齐》，曰：“美哉，泱泱乎，大风也哉。表东海者，其太公乎！”

为之歌《大雅》，曰：“广哉，熙熙乎，曲而有直体，其文王之德乎！”



韩愈



孟子

在培养我自己的气质时，我尽量观摩别人的长处。韩愈：

师者，所以传道、授业、解惑也。

《论语》：

三人行，必有我师焉。

我觉得在与师友相交之际，需要言必及义，而最重要的乃是善于发问。善问者如叩钟，问之大者则大鸣，问之小者则小鸣。中国科学家最欠缺的就是发问的精神。历史上最著名的发问乃是屈原的《天问篇》：

遂古之初，谁传道之，上下未形，何由考之……。日月安属，列星安陈。

以后的学者很少有这种精神，这可能是中国科学不发达的一个原因。善于发问后，才能寻找到自己的志趣所在，才能够择善而固执之。

很多同学开始时读书读得很好，以后就灰心了，不求上进，一方面是基础没有打好，又不敢重新再学，一方面是跟师友之间的关系没有搞好，言不及义，得不到精神上的支持。有些则是名利熏心，不求上进。我有些学生毕业时很踏实，受到表扬，就以为自己了不起，事实上学问还没有成熟就凋谢了。这都是因为气质和志趣没有培养好的缘故。《离骚》：

民生各有所乐兮，余独好修以为常。虽体解吾犹未变兮，岂余心之可惩。

《涉江》：

苟余心其端直兮，虽僻远其何伤。

《离骚》：

何昔日之芳草兮，今直为此萧艾也。岂其有他故兮，莫好修之害也。

韩愈作文的态度一直影响了我做学问的方法，韩愈《答李翊书》：

始者非三代、两汉之书不敢观，非圣人之志不敢存。处若忘，行若遗，俨乎其若思，茫乎其若迷。当其取于心而注于手也，惟陈言之务去，戛戛乎其难哉！

其观于人也，笑之则以为喜，誉之则以为忧，以其犹有人之说者存也。如是者亦有年，然后浩乎其沛然矣。吾又惧其杂也，迎而距之，平心而察之。其皆醇也，然后肆焉。虽然，不可以不养也。行之乎仁义之途，游之乎《诗》、《书》之源。无迷其途，无绝其源，终吾身而已矣。

1966年我进了中文大学。虽然对历史抱着浓厚的兴趣，但我还是选择了数学作为我的事业。

就在这时，中学时念的高等数学渐渐消化，开始时还不大懂，但后来一下子全都懂了。我比班中同辈高明不少。

大学的数学使我大开眼界。连最基本的实数系统都可以严格地建立起来，着实令人兴奋万分。当我了解数学是如此建构后，就写信给教授，表达我的喜悦之情。这是本人赏析数学之始。

一位刚从伯克利毕业的博士来了香港，他名叫 Stephen Salaff。他对我大为赞赏，我们合写了一本有关常微分方程的书。

另外一位老师 Brody 来自普林斯顿，他有一套独特的教学法。他找来一本

高深的数学著作,然后要求学生书中找寻错误,并提出改正的方法。这是让我们不要盲目依赖书本的良方。同时也训练了我对书本上定理采取存疑的态度。我有时将某些定理推广了,在课堂上说出来,他听了很高兴。

这些教导的重要性在于:培养独立思考的习惯;在人前表达数学的时候,找出自己的弱点,与同学和老师一同切磋。这不论对自己或对自己日后的教学都十分要紧。

虽然我只读了三年大学,但已经完成了大学的课程。在 Salaff 教授的帮助下,我进入了伯克利的研究院。伯克利的数学系当时在世界上是数一数二的。我 8 月入校,便认识了陈省身教授。他后来成为我的论文导师。

在香港时我醉心于极度抽象的数学(当然我的分析功夫也很扎实),觉得数学愈广泛愈好。我打算念泛函分析,已经学了不少这方面的东西,包括 N. Dunford 和 J. T. Schwartz 有关的巨册(三卷本的 Linear Operators),还有不少有关算子代数的书。到 Berkeley 后,认识了不少卓越的学者,我的看法改变了。

我如饥似渴地从他们那里学习不同的科目。每天从早上 8 时到下午 5 时我都在上课(有时在班上吃午饭)。这些学科包括拓扑、几何、微分方程、李群、数论、组合学、概率及动力系统。我并非科科都精通,但对某几门学问格外留神。学拓扑时,发现跟以前学的完全不同。班上 50 人,每个人看来都醒目在行,比我好多了。他们表现出色,说话条理分明。

于是我埋首做好功课,不久之后,我发现自己毕竟也不赖。关键是要做好所有棘手的题目,并把这些题目想通想透。

我读了 John Milnor 的一本书,对里面讲到的曲率的概念深深着迷。Milnor 是位卓越的拓扑学者。我开始思考与这书有关的问题,并大部分时间呆在图书馆。当时的研究生并没有办公室。伯克利名牌教授不少,然而不久之后,我对他们竟有英雄所见略同的感觉。在图书馆里我读了不少书籍和期刊。

在伯克利的第二个学期,我渐渐能证出一些不简单的定理。这些定理与群论有关。在崇基,跟老师聊天时曾谈及有关的内容,我现在把它用到几何上去了。教授都为我的进展而惊讶不已,欣慰异常。其中一位教授开始与我合作,写了两篇论文。陈省身教授其时正在放年假。当他回来时,对我的表现甚为嘉许。

纵然如此,对这些工作我倒不觉得怎样。摩里教授(Charles B. Morrey)有关非线性偏微分方程的课,令人难忘。他教授的非线性技巧,当时并不流行。他的书也佶屈聱牙,但我隐隐感觉到他发展的技巧十分深奥,对未来几何学的

发展举足轻重。我用心地学习这些技巧。虽在盛名之下,但听他课的学生同事都不多。到学期终结时,我竟成为他班上唯一的学生。他索性就在自己的办公室里授课了。这一艰深的科目后来成为我数学生涯的基石。

完成几篇文章后,陈教授到处说我是何等出色,虽然他对我的工作认识不深,他的话实在过分夸奖了我。我也开始全盘地思考数学,尤其是几何,也试图去研究几何学的其他问题,可是进度缓慢。这年夏天,老友郑绍远从香港过来了,我们在校园旁租了一所公寓,心情更加开朗了。

就在这个夏天,我请求陈教授当我的论文导师,他答应了。约一个月后,他告诉我,我在一年级时的文章,已够格作毕业论文。我有点纳闷,心想这些工作还不够好,而且我还希望多学点东西。就这样,在第二个学年中我学了不少复几何及拓扑的知识。陈师对我期望甚殷,他提议我考虑 Riemann 猜想。十分遗憾的是,到目前为止,我还没有想过它。

代之者,我尝试去了解空间的曲率。我确认 Calabi 在 20 世纪 50 年代作出的某建议,会是理解这概念的关键。当时我不认为 Calabi 是对的,开始对此深思苦想。这并不是个当代几何学者研究的标准课题,明显地,这是分析学上的一道难题,没有人愿意跟它沾上边。

我渐渐地养成把分析作为工具引进几何中去的志趣。在此之前,曾有人把非线性理论用于三维空间的曲面上。但我考虑的却是任意维数的抽象空间。由于 Morrey 教授及陈师对极小曲面的兴趣,我亦对此项目深深着迷。对调和映射尤其情有独钟,并因此钻研了变分法。

我对几何中的所有分析内容都感兴趣。简而言之,就是要把非线性微分方程和几何融汇成一体。要了解非线性方程,就必须先了解线性方程。因此我建立了在流形上调和函数的主要定理。在我的影响下,郑绍远研究了有关的特征值及特征函数等问题。我们合作写了几篇重要文章,到而今还是该项目的基

础。

毕业时我得到几份聘书。陈师提议我去高等研究所(IAS),那儿的薪水不及 Harvard 提供的一半,但我还是到那儿去了。在高等研究所我认识了其他科目出色的数学家,同时提升了对拓扑,尤其是空间对称理论的鉴赏力。事实上,我利用分析的想法应用到流形上的群作用的课题,得到了这科目的一些重要结果。

由于签证的问题,我到了纽约 Stony Brook 分校。当时 Stony Brook 是尺度几何的重镇,事实上那儿真的不错,聚集了一批朝气蓬勃的几何学家。我学

习他们的技巧,但并不认为那是几何的正确方向。一年后我到了 Stanford,当时那里并没有几何学者。Stanford 环境安宁,在非线性和偏微分方程领域很出色。在那里我碰见好友 Leon Simon 及共同的弟子 Richard Schoen。我们一起拓展了在几何上的非线性分析。有如陶渊明所云:“久在樊笼里,复得返自然。”

我刚到 Stanford 时,一个几何大会正在举行。有位物理学家应邀就广义相对论发言。当时我对物理还不算在行。但对他提及有关相对论的一个几何问题却一见倾心。赋予空间的数学解释,与空间物理导出数学问题,两者皆令人神往。

这问题当时对我而言,还是遥远不可及的。但我对它念念不忘。在会议期间,我找到了一个办法,去反证 Calabi 的提议。我提出了我的想法,反应似乎不错,没人提出异议。人们都松了口气,毕竟大家都猜对了,Calabi 猜想是不对的。

两个月后,Calabi 教授写信给我,厘清了我的一些想法。我在推理中找到一个严重的决口。在我的研究生涯中,这可说是最痛苦的经历了。我辗转反侧,不能成眠。

差不多两个星期都失眠,眼见名誉因犯错(虽然我没把想法整理成文发表)而毁于一旦。经过反复仔细审阅每个步骤后,我相信问题反过来才对。为 Calabi 猜想举出反例,其论据是先假设它是对的,然后考虑其后果。数年后,当我解答了这个猜想,很多有关的自然推论就水到渠成了。

意识到 Calabi 猜想是对的,我便朝着正确的方向迈进。在准备最后的证明前,需要大量的准备工作。我和郑绍远合作研究 Monge-Ampère 方程、仿射几何、极大曲面等相关问题。与 Richard Schoen 合作研究调和映射,与 Richard Schoen 和 L. Simon 合作研究极小曲面。在短短两年时间里,我们在与几何有关的非线性分析上,硕果累累。这是几何学的黄金时代。

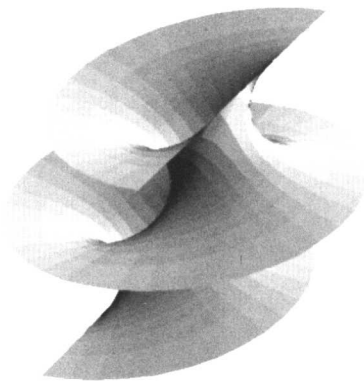
新婚伊始,我找到完成 Calabi 猜想的正确想法。我终于掌握了 Kähler 几何中的曲率的概念了。一些老大难的代数几何问题,都因 Calabi 猜想的证明而解决掉。当时我认为我是首先了解 Kähler 几何的曲率结构后,颇有物我相融的感觉:

落花人独立,微雨燕双飞。

这个工作影响至今,可以看《纽约时报》(2003 年 9 月 2 日)的一个报道《宇宙一悬案,众人答案殊》:

弦理论中的一个困难在于它要用十维的时空来描述,而我们生存的空间只有四维而已。Strominger 博士回忆起他在找到数学家丘成桐博士的一篇论文时的万分喜悦之情。丘博士现任教于哈佛大学及香港中文大学。在这篇文章里他证明了 Eugenio Calabi 博士提出的猜想。Calabi 博士现已从宾夕法尼亚大学退休。猜想指出这些额外的维数虽然不可捉摸,但在微观下可以想象它们卷曲起来,就像地毯的小毛圈。

完成 Calabi 猜想的证明后,我看出自己建立了融合两门重要科目——非线性偏微分方程和几何的架构。1976 年我在 UCLA 碰见老友 Meeks,他是我在研究院时的同学。他的景况不大好。Meeks 是位具有原创性的数学家,我向他提议合作,试图把极小曲面和三维流形的拓扑联系起来。



极小曲面

结果成绩斐然。我们解决了这两门科目中的两个经典难题:

1. 当一块肥皂膜的边界是凸时,膜面不能自相交。
2. Smith 猜想的证明。这是与 Thurston 工作结合的成果。

一旦把方向校正了,很多古典问题便能迎刃而解。

次年,我回到伯克利访问,并组织了“几何上非线性问题”的研讨班。R. Schoen 和郑绍远都在那儿。和 R. Schoen 一起,我们终于解决了那个使我念念不忘的有关广义相对论的难题。这道难题叫做正质量猜想,它在广义相对论中占基本的地位(只有当质量为正时,时空才能稳定)。

1978 年我又回到斯坦福。和萧荫棠一起,我们利用极小曲面作为工具,解决了复几何上有名的 Frenkel 猜想。我也利用了调和映射作为工具去研究复