王式助尔自学丛书

高等数学自学教程

第三卷　上册

（积分学及其应用）

北京王式助尔高等数学研究院

王振力　编讲

助 尔
自学 成才

中国科学技术出版社

王式助尔自学丛书

高等数学自学教程

第三卷　上册

（积分学及其应用）

北京王式助尔高等数学研究院

王振力　编讲

中国科学技术出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学教程. 第3卷,积分学及其应用/王振力编讲.
—北京:中国科学技术出版社,2006.10
(王式助尔自学丛书)
ISBN 7-5046-1796-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. 王… Ⅲ. ①高等数学—教材②积分学—教材
Ⅳ. ①O13②O172.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第125720号

自2006年4月起本社图书封面均贴有防伪标志,未贴防伪标志的为盗版图书。

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街16号　邮政编码:100081
电话:62103204　62103201
http://www.kjpbooks.com.cn
北京王式助尔高等数学研究院常年销售并设售后服务
北京长宁印刷有限公司印刷
*
开本:850毫米×1168毫米　1/32　印张:45.625　字数:1130千字
2006年10月第1版　2006年10月第1次印刷
定价:150.00元

(凡购买本社的图书,如有缺页、倒页、
脱页者,本社发行部负责调换)

作者简介

王振力，曾用名王振离，河南省漯河市人，幼年家贫，1949年前，断断续续仅上过三年小学。1950年靠自学考上了初中，1955年6月毕业于河南省开封中学高中部，但因病没有参加高考，治病期间，仍坚持自学，1958年7月考入北京航空学院夜大学航空发动机工艺专业；1962年又考入北京广播电视大学数学系，文革初期，因编讲《高等数学自学教程》被“造反派”诬为“走白专道路”，遭抄家、关押、批斗、书稿当成“黑材料”被没收、销毁。“四人帮”跨台后，在北京一成人高校教《高等数学》。2005年初，卖掉仅有的住房，在北京市海淀区工商局独资注册了一家科教型企业：北京王式助尔高等数学研究院，通过与中国科学技术出版社合作，出版《高等数学自学教程》，向全社会传播和普及《高等数学》知识，帮助国家在大学校园之外培养科技人才，为夯实我国创新型国家的基础出力，并使已踏上自学之路的朋友早日成才！

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

我们在本书第二卷中向自学者详细、系统、全面地讲解了微分学及其应用情况，现在来讲积分学及其应用情况.

在本卷中依次将要讲解的内容有：不定积分、定积分、广义积分、重积分、曲线积分、曲面积分及其应用情况.

第十六章　不定积分

在这一章里，我们主要讲不定积分的概念、性质及各种积分方法.

§16.1　原函数与不定积分的概念

I. 问题的提出

如果作直线运动的质点其运动规律由函数：

$$S = S(t)$$

给出（其中 t 表示时间，S 表示质点在时刻 t 的路程）. 则路程函数 $S(t)$ 的一阶导数 $S'(t)$ 就表示该质点在时刻 t 的速度 v，即

$$v(t) = S'(t).$$

这是我们在第二卷上册中已经讲过的问题（见第二卷上册 274 页）. 但是在力学中有时也会遇到相反的问题：即已知作变速运动的质点在任一时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，而要求质点的运动规律，即要求质点经过的路程 S 与时间 t 的依赖关系 $S = S(t)$.

从数学上来说，这个与求导数相反的问题的实质是：要找一个

函数 $S(t)$，使这个函数的导数 $S'(t)$ 等于已知的函数 $v(t)$，即使

$$S'(t) = v(t).$$

因为这个问题具有普遍的意义，所以需要给出它的一般形式，同时引进一些必要的术语，并寻找解决这个问题的基本方法.

Ⅱ. 原函数的概念

定义 16.1　设函数 $f(x)$ 在某区间上连续，如果存在这样一个函数 $F(x)$，使得在该区间上的一切点处都有：

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad dF(x) = f(x)dx$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间上的"原函数".

例如：正弦函数 $\sin x$ 是余弦函数 $\cos x$ 在其定义域内的原函数，因为

$$(\sin x)' = \cos x \quad 或 \quad d\sin x = \cos x dx;$$

又如　x 是 1 的原函数，因为

$x' = 1$　或　$dx = dx$；

再如　$\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的原函数，因为

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad 或 \quad d\ln x = \frac{1}{x}dx. \ (x > 0)$$

有了原函数这一概念后，前面的问题就可简单地叙述为：

已知函数 $v(t) = S'(t)$，求它的原函数 $S(t)$.

求给定函数的原函数是一元函数积分学中的首要问题，也是本章讨论的中心问题.

Ⅲ. 原函数存在的条件

如果函数 $f(x)$ 在某区间上连续，则在这区间上函数 $f(x)$ 的原函数一定存在.

在第二卷上册第 269 页结论 12.5 中，我们曾经指出：一切初

等函数在其定义域内都是连续的，因此，如果$f(x)$是初等函数，则可以肯定，在它的定义域内其原函数一定存在.

又因为任何一个常量C的导数都等于零（见第二卷上册第299页[13,22]式），所以，若$F(x)$是$f(x)$的原函数，则$F(x)+C$（C为任意常数）也都是$f(x)$的原函数，这是因为：

$$[F(x)+C]'_x=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x).$$

可见，一个连续函数在其定义区间内，存在有无穷多个原函数，这些原函数之间，彼此相差一个常数，例如：$\cos x+1,\cos x+\frac{1}{2},\cos x+C$（$C$为任意常数），都是$-\sin x$的原函数.

因为 $(\cos x+1)'=(\cos x)'+1'=-\sin x+0=-\sin x,$

$$\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)'=(\cos x)'+\left(\frac{1}{2}\right)'=-\sin x+0=-\sin x,$$

$$(\cos x+C)'=(\cos x)'+C'=-\sin x+0=-\sin x,$$

而 $\cos x+1,\cos x+\frac{1}{2}$与$\cos x+C$之间相差一个常数.

综上所述，我们得到一个结论：

结论16.1 **如果$f(x)$有一个原函数$F(x)$，那么$f(x)$就有无穷多个原函数：$F(x)+C$（其中C为任意常数），这些原函数之间彼此相差一个常数.**

Ⅳ. 不定积分的概念

定义16.2 **函数$f(x)$的所有原函数的集合，称为函数$f(x)$的"不定积分"，记作：**

$$\int f(x)\,dx \tag{1}$$

其中$f(x)$叫做不定积分(1)的"被积(分)函数"，$f(x)\,dx$叫做不定积分(1)的"被积(分)表达式"，x叫做不定积分(1)的"积分变

量”，$\int$叫做不定积分(1)的“积分(符)号”，它是“求和”(*sum*)的第一个英文字母 S 的拉长写法，因为积分是一种特殊的求和(见后面 152 页定积分的定义).

根据这一定义，欲求连续函数 $f(x)$ 的不定积分，只需求出连续函数 $f(x)$ 的原函数集合就行了；而根据结论 16.1，欲求连续函数 $f(x)$ 的原函数集合，只需求出连续函数 $f(x)$ 的一个原函数然后加上任意常数 C 就行了. 据此，若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 就表示连续函数 $f(x)$ 的原函数集合，所以连续函数 $f(x)$ 的不定积分(1)就等于 $F(x)+C$，即

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.} \qquad [16.1]$$

其中 $F(x)$ 是被积分函数 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数，称为“积分常数”.

例如：因为 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，所以 $\cos x$ 的不定积分等于 $\sin x + C$，即

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$$

又如，$\ln x$ 是$\frac{1}{x}$的一个原函数，所以$\frac{1}{x}$的不定积分等于 $\ln x + C$，即

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C. \quad (x > 0)$$

再如，因 x^2 是 $2x$ 的一个原函数，所以 $2x$ 的不定积分等于 $x^2 + C$，即

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C.$$

求连续函数的原函数的方法称为“积分法”.

如果把积分法看成是一种运算，那么，积分法是微分法的逆运算(微分法在第二卷中已经讲过了).

V. 不定积分的几何意义

定义 16.3　设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，则此原函数的图像称为函数 $f(x)$ 的“积分曲线”，其方程为

$$y = F(x) \tag{1}$$

因 $F'(x)=f(x)$，所以积分曲线(1)上过点(x,y)处的切线的斜率正好等于函数 $f(x)$ 在点 x 处的函数值，如果把积分曲线(1)沿 y 轴的方向上、下平移一段长度 C，我们就能得到另一条积分曲线：

$$y = F(x) + C. \tag{2}$$

因函数 $f(x)$ 的每一条积分曲线都可用这种方法而得到，所以第 4 页不定积分[16.1]的图像就是这样获得的全部积分曲线构成的曲线族；又因，不论常数 C 取何值，都有：

$$[F(x)+C]' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

所以，积分曲线族(2)中，横坐标相同的点处，切线彼此平行（看图 16.1），继而推知，**不定积分[16.1]的几何意义是一族可经平移重合的平面曲线.**

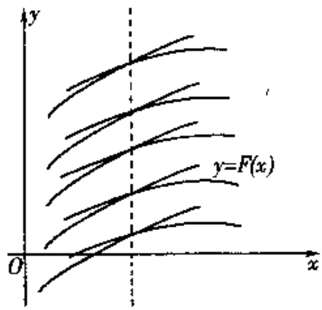

图 16.1

例如，x 的不定积分：

$$\int x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$$

的几何意义是一族抛物线：

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C\ (C\text{ 为任意常数}).$$

$\frac{1}{x}$ 的不定积分：$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$

的几何意义是一族对数曲线 $y=\ln x + C$（C 为任意常数）.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com