

王式助尔自学丛书

高等数学自学教程

第三卷 上册

(积分学及其应用)

北京王式助尔高等数学研究院

王振力 编讲



中国科学技术出版社

王式助尔自学丛书

高等数学自学教程

第三卷 上册
(积分学及其应用)

北京王式助尔高等数学研究院
王振力 编讲

中国科学技术出版社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学教程. 第3卷, 积分学及其应用/王振力编讲.
—北京: 中国科学技术出版社, 2006. 10
(王式助尔自学丛书)
ISBN 7-5046-1796-2

I. 高… II. 王… III. ①高等数学—教材②积分学—教材
IV. ①O13②O172.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 125720 号

自 2006 年 4 月起本社图书封面均贴有防伪标志, 未贴防伪标志的为盗版图书。

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码: 100081

电话: 62103204 62103201

<http://www.kjpbooks.com.cn>

北京王式助尔高等数学研究院常年销售并设售后服务

北京长宇印刷有限公司印刷

*

开本: 850 毫米 × 1168 毫米 1/32 印张: 45.625 字数: 1130 千字

2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月第 1 次印刷

定价: 150.00 元

(凡购买本社的图书, 如有缺页、倒页、
脱页者, 本社发行部负责调换)



作者简介

王振力，曾用名王振离，河南省漯河市人，幼年家贫，1949年前，断断续续仅上过三年小学。1950年靠自学考上了初中，1955年6月毕业于河南省开封中学高中部，但因病没有参加高考，治病期间，仍坚持自学，1958年7月考入北京航空学院夜大学航空发动机工艺专业；1962年又考入北京广播电视大学数学系，文革初期，因编讲《高等数学自学教程》被“造反派”诬为“走白专道路”，遭抄家、关押、批斗，书稿当成“黑材料”被没收，销毁。“四人帮”跨台后，在北京一成人高校教《高等数学》。2005年初，卖掉仅有的住房，在北京市海淀区工商局独资注册了一家科教型企业：北京王式助尔高等数学研究院，通过与中国科学技术出版社合作，出版《高等数学自学教程》，向全社会传播和普及《高等数学》知识，帮助国家在大学校园之外培养科技人才，为夯实我国创新型国家的基础出力，并使已踏上自学之路的朋友早日成才！

目 录

第十六章 不定积分	(1)
§ 16.1 原函数与不定积分的概念	(1)
I. 问题的提出	(1)
II. 原函数的概念	(2)
III. 原函数存在的条件	(2)
IV. 不定积分的概念	(3)
V. 不定积分的几何意义	(5)
习题 16.1	(8)
§ 16.2 不定积分的性质	(9)
§ 16.3 基本积分公式	(11)
习题 16.2	(18)
§ 16.4 换元积分法	(19)
I. 第一种换元积分法(凑微分法)	(20)
II. 第二种换元积分法	(30)
习题 16.3	(40)
§ 16.5 分部积分法	(41)
习题 16.4	(51)
§ 16.6 有理函数的积分	(53)
I. 有理函数的概念	(53)
II. 有理函数的分解	(54)

Ⅲ. 有理函数的积分	(67)
习题 16.5	(81)
§ 16.7 三角函数有理式的积分	(82)
Ⅰ. 有理式的概念	(82)
Ⅱ. 三角函数的有理式	(82)
Ⅲ. 三角函数有理式的积分方法	(82)
习题 16.6	(88)
§ 16.8 无理函数的积分	(89)
Ⅰ. 无理函数的概念	(89)
Ⅱ. 无理函数的积分方法	(89)
习题 16.7	(106)
§ 16.9 二项微分式的积分	(107)
Ⅰ. 二项微分式的概念	(107)
Ⅱ. 二项微分式的积分是初等函数的条件	(107)
Ⅲ. 二项微分式的积分方法(契贝谢夫法)	(110)
习题 16.8	(126)
§ 16.10 各种积分方法的综合运用	(127)
习题 16.9	(140)
§ 16.11 本章的小结与要求	(141)
Ⅰ. 本章的内容小结	(141)
Ⅱ. 本章的基本要求	(145)
第十七章 定积分	(146)
§ 17.1 定积分的概念	(146)
Ⅰ. 与定积分概念有关的两个实际问题	(146)
Ⅱ. 定积分的概念	(152)
Ⅲ. 定积分的几何意义	(154)
Ⅳ. 定积分的存在条件	(154)
习题 17.1	(163)

§ 17.2 定积分的性质	(164)
习题 17.2	(176)
§ 17.3 牛顿-莱布尼兹公式	(176)
I. 变上限的积分	(177)
II. 积分上限的函数及其性质	(178)
III. 牛顿-莱布尼兹公式	(180)
习题 17.3	(188)
§ 17.4 用换元法计算定积分	(190)
§ 17.5 奇、偶函数在对称区间上的定积分	(202)
习题 17.4	(205)
§ 17.6 用分部积分法计算定积分	(206)
§ 17.7 杂题讲解	(214)
习题 17.5	(229)
§ 17.8 定积分的近似计算方法	(231)
I. 矩形法	(231)
II. 梯形法	(234)
III. 抛物线法	(235)
习题 17.6	(244)
§ 17.9 广义积分	(244)
I. 连续函数在无穷区间上的积分	(245)
II. 有无穷型间断点的函数在有限区间上的积分	(249)
习题 17.7	(261)
§ 17.10 定积分的应用	(262)
I. 用定积分计算平面图像的面积	(262)
习题 17.8	(289)
II. 用定积分计算立体的体积	(290)
习题 17.9	(310)
III. 用定积分计算平面曲线的弧长	(311)

习题 17.10	(336)
IV. 用定积分计算变力做功	(339)
习题 17.11	(350)
V. 用定积分计算液体的压力	(351)
习题 17.12	(363)
VI. 用定积分计算连续函数的平均值	(364)
VII. 定积分的其他应用	(366)
习题 17.13	(376)
§ 17.11 本章的小结与要求	(377)
I. 本章的内容小结	(377)
II. 本章的基本要求	(382)
第十八章 重积分	(383)
§ 18.1 二重积分	(384)
I. 曲顶柱体的体积问题	(384)
II. 二重积分的定义	(386)
III. 二重积分的几何意义	(387)
IV. 二重积分的存在条件	(388)
§ 18.2 二重积分的性质	(390)
习题 18.1	(402)
§ 18.3 二重积分在直角坐标系下的计算方法	(403)
I. 矩形区域上二重积分的计算方法	(403)
II. 任意平面区域上二重积分的计算方法	(414)
III. 狄里赫莱 (Dirichlet, 1805 ~ 1859, 德国数学家)	
公式	(418)
习题 18.2	(432)
§ 18.4 二重积分在极坐标系下的计算方法	(434)
I. 二重积分在直角坐标系下与在极坐标系下的	
变换公式	(434)

II. 极坐标系下二重积分的计算方法	(437)
习题 18.3	(447)
§ 18.5 三重积分	(448)
I. 三重积分的概念	(448)
II. 三重积分的物理意义	(449)
III. 三重积分的性质	(450)
IV. 三重积分的计算方法	(452)
1. 三重积分在直角坐标系下的计算方法	(452)
习题 18.4	(467)
2. 三重积分在柱面坐标系下的计算方法	(468)
3. 三重积分在球面坐标系下的计算方法	(476)
习题 18.5	(482)
§ 18.6 重积分的应用	(483)
I. 重积分在几何问题中的应用	(483)
1. 用二重积分计算平面区域(或平面图像)的面积	(483)
2. 用二重积分计算曲面的面积	(490)
习题 18.6	(507)
3. 用重积分计算立体的体积	(508)
习题 18.7	(526)
II. 重积分在物理及力学中的应用	(527)
1. 用重积分计算不均匀物体的质量	(527)
习题 18.8	(533)
2. 用重积分计算物体的重心	(533)
习题 18.9	(549)
3. 用重积分计算物体的转动惯量	(550)
习题 18.10	(578)
§ 18.7 本章的小结与要求	(579)

I. 本章的内容小结	(579)
II. 本章的基本要求	(582)
第十九章 曲线积分	(583)
§ 19.1 对弧长的曲线积分	(583)
I. 问题的提出(平面曲线的质量问题)	(583)
II. 对弧长的曲线积分的概念	(585)
III. 对弧长的曲线积分的性质	(587)
IV. 对弧长的曲线积分的计算方法	(588)
习题 19.1	(603)
§ 19.2 对坐标的曲线积分	(604)
I. 问题的提出(变力沿曲线的作功问题)	(604)
II. 对坐标的曲线积分的概念	(606)
III. 对坐标的曲线积分的性质	(608)
IV. 对坐标的曲线积分的计算方法	(609)
V. 两种曲线积分之间的关系	(613)
习题 19.2	(630)
§ 19.3 曲线积分与二重积分的关系(格林公式)	(631)
I. 平面区域边界的正向	(631)
II. 曲线积分与二重积分之间的关系 ——格林公式	(632)
III. 用曲线积分表示平面区域的面积	(636)
习题 19.3	(643)
§ 19.4 曲线积分与路径无关的条件	(644)
I. 问题的提出	(644)
II. 曲线积分与路径无关的概念	(645)
III. 单连域与多连域的概念	(646)
IV. 曲线积分与路径无关的条件	(646)
V. 全微分存在的条件	(654)

VI. 求全微分原函数的方法	(660)
习题 19.4	(670)
§ 19.5 曲线积分的应用	(671)
I. 用曲线积分计算平面图像的面积	(671)
II. 用曲线积分计算线材的质量	(673)
III. 用曲线积分计算线材的重心	(676)
习题 19.5	(686)
IV. 用曲线积分计算线材(质线)的转动惯量	(686)
习题 19.6	(695)
V. 用曲线积分计算变力作功	(695)
习题 19.7	(698)
§ 19.6 本章的小结与要求	(699)
I. 本章的内容小结	(699)
II. 本章的基本要求	(701)
第二十章 曲面积分	(702)
§ 20.1 对坐标的曲面积分	(702)
I. 流量问题	(702)
II. 对坐标的曲面积分的概念	(704)
III. 曲面的双侧及有向曲面的概念	(706)
IV. 对坐标的曲面积分的性质	(707)
V. 对坐标的曲面积分的计算方法	(707)
习题 20.1	(738)
§ 20.2 对面积的曲面积分	(739)
I. 不均匀曲面的质量问题	(739)
II. 对面积的曲面积分的概念	(741)
III. 对面积的曲面积分的性质	(742)
IV. 对面积的曲面积分的计算方法	(742)
习题 20.2	(754)

§ 20.3 两种曲面积分之间的关系	(755)
§ 20.4 曲面积分与三重积分之间的关系	(757)
I. 奥氏公式	(757)
II. 对坐标的曲面积分与曲面无关的条件	(767)
习题 20.3	(768)
§ 20.5 曲面积分的应用	(769)
I. 用曲面积分计算立体的体积	(769)
II. 用曲面积分计算曲面的面积	(771)
III. 用曲面积分计算曲面的质量	(773)
IV. 用曲面积分计算曲面的重心	(775)
V. 用曲面积分计算曲面的转动惯量	(777)
VI. 用曲面积分计算流体流过曲面的流量	(783)
习题 20.4	(794)
§ 20.6 本章的小结与要求	(795)
I. 本章的内容小结	(795)
II. 本章的基本要求	(796)

我们在本书第二卷中向自学者详细、系统、全面地讲解了微分学及其应用情况,现在来讲积分学及其应用情况.

在本卷中依次将要讲解的内容有:不定积分、定积分、广义积分、重积分、曲线积分、曲面积分及其应用情况.

第十六章 不定积分

在这一章里,我们主要讲不定积分的概念、性质及各种积分方法.

§ 16.1 原函数与不定积分的概念

1. 问题的提出

如果作直线运动的质点其运动规律由函数:

$$S = S(t)$$

给出(其中 t 表示时间, S 表示质点在时刻 t 的路程). 则路程函数 $S(t)$ 的一阶导数 $S'(t)$ 就表示该质点在时刻 t 的速度 v , 即

$$v(t) = S'(t).$$

这是我们在第二卷上册中已经讲过的问题(见第二卷上册 274 页). 但是在力学中有时也会遇到相反的问题: 即已知作变速运动的质点在任一时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$, 而要求质点的运动规律, 即要求质点经过的路程 S 与时间 t 的依赖关系 $S = S(t)$.

从数学上来说, 这个与求导数相反的问题的实质是: 要找一个

函数 $S(t)$, 使这个函数的导数 $S'(t)$ 等于已知的函数 $v(t)$, 即使

$$S'(t) = v(t).$$

因为这个问题具有普遍的意义, 所以需要给出它的一般形式, 同时引进一些必要的术语, 并寻找解决这个问题的基本方法.

II. 原函数的概念

定义 16.1 设函数 $f(x)$ 在某区间上连续, 如果存在这样一个函数 $F(x)$, 使得在该区间上的一切点处都有:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间上的“原函数”.

例如: 正弦函数 $\sin x$ 是余弦函数 $\cos x$ 在其定义域内的原函数, 因为

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{或} \quad d\sin x = \cos x dx;$$

又如 x 是 1 的原函数, 因为

$$x' = 1 \quad \text{或} \quad dx = dx;$$

再如 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的原函数, 因为

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{或} \quad d\ln x = \frac{1}{x} dx. (x > 0)$$

有了原函数这一概念后, 前面的问题就可简单地叙述为:

已知函数 $v(t) = S'(t)$, 求它的原函数 $S(t)$.

求给定函数的原函数是一元函数积分学中的首要问题, 也是本章讨论的中心问题.

III. 原函数存在的条件

如果函数 $f(x)$ 在某区间上连续, 则在这区间上函数 $f(x)$ 的原函数一定存在.

在第二卷上册第 269 页结论 12.5 中, 我们曾经指出: 一切初

等函数在其定义域内都是连续的,因此,如果 $f(x)$ 是初等函数,则可以肯定,在它的定义域内其原函数一定存在.

又因为任何一个常量 C 的导数都等于零(见第二卷上册第299页[13, 22]式),所以,若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则 $F(x) + C$ (C 为任意常数)也都是 $f(x)$ 的原函数,这是因为:

$$[F(x) + C]'_x = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

可见,一个连续函数在其定义区间内,存在有无穷多个原函数,这些原函数之间,彼此相差一个常数,例如: $\cos x + 1, \cos x + \frac{1}{2}, \cos x + C$ (C 为任意常数),都是 $-\sin x$ 的原函数.

因为 $(\cos x + 1)' = (\cos x)' + 1' = -\sin x + 0 = -\sin x,$

$$\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)' = (\cos x)' + \left(\frac{1}{2}\right)' = -\sin x + 0 = -\sin x,$$

$$(\cos x + C)' = (\cos x)' + C' = -\sin x + 0 = -\sin x,$$

而 $\cos x + 1, \cos x + \frac{1}{2}$ 与 $\cos x + C$ 之间相差一个常数.

综上所述,我们得到一个结论:

结论 16.1 如果 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$,那么 $f(x)$ 就有无穷多个原函数: $F(x) + C$ (其中 C 为任意常数),这些原函数之间彼此相差一个常数.

IV. 不定积分的概念

定义 16.2 函数 $f(x)$ 的所有原函数的集合,称为函数 $f(x)$ 的“不定积分”,记作:

$$\int f(x) dx \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 叫做不定积分(1)的“被积(分)函数”, $f(x) dx$ 叫做不定积分(1)的“被积(分)表达式”, x 叫做不定积分(1)的“积分变

量”， $\int$ 叫做不定积分(1)的“积分(符号)”，它是“求和”(sum)的第一个英文字母 *S* 的拉长写法，因为积分是一种特殊的求和(见后面 152 页定积分的定义)。

根据这一定义，欲求连续函数 $f(x)$ 的不定积分，只需求出连续函数 $f(x)$ 的原函数集合就行了；而根据结论 16.1，欲求连续函数 $f(x)$ 的原函数集合，只需求出连续函数 $f(x)$ 的一个原函数然后加上任意常数 C 就行了。据此，若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x) + C$ 就表示连续函数 $f(x)$ 的原函数集合，所以连续函数 $f(x)$ 的不定积分(1)就等于 $F(x) + C$ ，即

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C.} \quad [16.1]$$

其中 $F(x)$ 是被积分函数 $f(x)$ 的一个原函数， C 为任意常数，称为“积分常数”。

例如：因为 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，所以 $\cos x$ 的不定积分等于 $\sin x + C$ ，即

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

又如， $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数，所以 $\frac{1}{x}$ 的不定积分等于 $\ln x + C$ ，即

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C. \quad (x > 0)$$

再如，因 x^2 是 $2x$ 的一个原函数，所以 $2x$ 的不定积分等于 $x^2 + C$ ，即

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

求连续函数的原函数的方法称为“积分法”。

如果把积分法看成是一种运算，那么，积分法是微分法的逆运算(微分法在第二卷中已经讲过了)。

V. 不定积分的几何意义

定义 16.3 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$, 则此原函数的图像称为函数 $f(x)$ 的“积分曲线”, 其方程为

$$y = F(x) \quad (1)$$

因 $F'(x) = f(x)$, 所以积分曲线(1)上过点 (x, y) 处的切线的斜率正好等于函数 $f(x)$ 在点 x 处的函数值, 如果把积分曲线(1)沿 y 轴的方向上、下平移一段长度 C , 我们就能得到另一条积分曲线:

$$y = F(x) + C. \quad (2)$$

因函数 $f(x)$ 的每一条积分曲线都可用这种方法而得到, 所以第4页不定积分[16.1]的图像就是这样获得的全部积分曲线构成的曲线族; 又因, 不论常数 C 取何值, 都有:

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

所以, 积分曲线族(2)中, 横坐标相同的点处, 切线彼此平行(看图 16.1), 继而推知, 不定积分[16.1]的几何意义是一族可经平移重合的平面曲线.

例如, x 的不定积分:

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

的几何意义是一族抛物线;

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

$$\frac{1}{x} \text{ 的不定积分: } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

的几何意义是一族对数曲线 $y = \ln x + C$ (C 为任意常数).

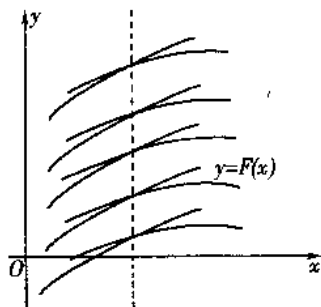


图 16.1