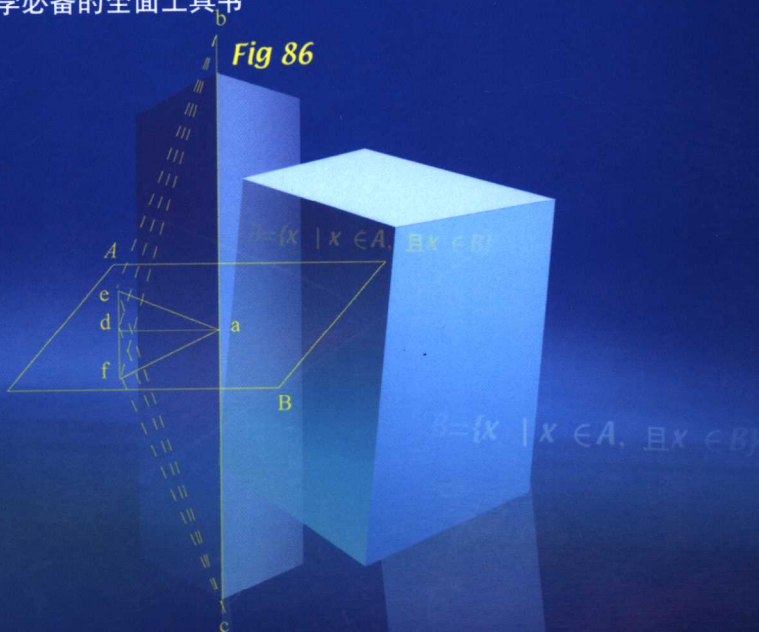


超级 数学专题题典 排列组合与概率

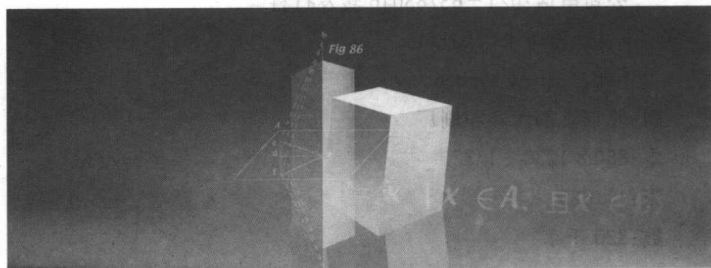
- 紧扣大纲 关注高考
- 学习数学必备的全面工具书





BSK 高考命题研究组

超级 数学专题题典 排列组合与概率



世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

图书在版编目(CIP)数据

超级数学专题题典——排列组合与概率/BSK 高考命题研究组编著.

—上海:上海世界图书出版公司,2007.2

ISBN 978-7-5062-5579-0

I. 超... II. B... III. 排列组合与概率—高中—习题—升学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 153800 号

超级数学专题题典——排列组合与概率

BSK 高考命题研究组

出版发行:上海世界图书出版公司

上海市尚文路 185 号 B 楼 邮政编码 200010

公司电话:021-63783016 转发行科

(各地新华书店经销)

<http://www.wpcsh.com.cn>

印 刷:北京京都六环印刷厂

开 本:880×1230 1/32

印 张:11.625

字 数:320 千字

版 次:2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5579-0/G·67

定 价:12.00 元

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话:010-84498871)

前 言

参考书和教材不同,它并不是学习中的必需品。然而学习好的同学,大部分都看过至少一本参考书,有个别的,甚至看完了市面上所有的参考书,这是为什么呢?

教材都是自成体系,为了配合大纲和课堂教学,其中很多内容讲述得恰到好处,可以说是提供了一个角度很好的剖面。然而要学好一门学科,必须具备三点:首先是清晰的知识框架,其次是翔实的知识内容,再次是巧妙的方法技巧。要达到这三点,从理论上讲,反复阅读教材并练习教材中的习题是可以做到的,只是需要花费较长的时间去领悟。不过,实际情况往往是限于课时进度,同学们用于学习单一科目的时间本就有限,花费在科目内部的具体知识板块的时间更加寥寥,有没有什么捷径可以走呢?答案是没有。虽然没有捷径,但却有另外一条路可供选择,这就是选择合适的参考书。好的参考书能从各种角度去剖析问题,透过现象看本质;或是补充个别知识点,完善整个知识框架;或是通过纵横向比较,揭示出本来就存在,但教科书却未明示的一些规律;或是汇总前人的经验,揭示出你原本就该知道的一些方法技巧。这套《BSK 高中数学专题》正是本着这样的初衷编写的,一共包括函数、数列、不等式等 12 本。

本套书在编排上体现了以下特点:

(1) 知识讲解循序渐进

知识点讲解特色突出,全套书中的每一本都分为基础知识和拓展思维两大部分。前一部分针对具体的知识点进行精析细讲,帮助读者牢固扎实地打好知识基础、建立知识体系,使学习、记忆和运用有序化。第二部分“高屋建瓴”,帮助读者在掌握和巩固基础知识的同时,突破难点、提高思维。在力求提高的同时,把握尺度,不出偏题、怪题,使之虽然难度加大,但是并不偏离高考方向。

(2) 题目搭配合理有序

习题配备由易到难,层层延伸。基础练习题,能力练习题,历届高考题,精选星级题,3 大部分 6 小块,覆盖高中低档各类题型,层层递进,级级延伸,为复习、备考提供丰富的资料储备;题目讲解不拘一解,详尽规范,引导读者去探究“一题多解”、“多题一解”、“一题多变”和“万变归一”的思路与学习方法,使读者真正能够领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

(3) 框架结构明朗清晰

全书按照内容分布各种知识框架图,为读者学习和探索提供参考路标。

(4) 成书符合使用习惯

全书采用“知识点讲解”——“对应例题”——“另一个知识点讲解”——“对应例题”的编排模式,更符合授课式的思维习惯。我们还独出心裁地引入了“考频”概念,借助于此知识点在最终高考中所占比例的统计数据来检验自己对这一知识点、这一部分内容,甚至这一类问题的掌握程度,以寻找更合适的复习之道,从而达到优质、有效的复习效果。

(5) 自成体系一书多用

本套书完全基于教材,但又不拘泥于教材。基于教材是指教材中的知识点,只要是涉及某专题的,基本上都收录进书,并分别成册;不等同于教材是指本套书并未严格按照教材的章节顺序进行编排,而是把本专题相关内容作为一个子体系加以归纳。这样做的好处不但可以让同学们在短时间内掌握此专题内容,而且还脱离了教材变动的局限性,使全国所有中学生均可选用。

对于正在学习高中数学课程的同学,可以使用本书作为课堂内容的预习复习与补充;对于正在紧张复习,即将投入的高考的同学,使用本书也可作为复习的纲要与熟悉各种题型的战场;而对于高中教育的研究者,本书可以提供一部分研究素材。

由于作者时间和水平所限,疏漏之处在所难免,敬请不吝指正。

BSK 高考命题研究组

2006年9月

目 录

| | |
|---------------|----|
| 第一篇 知识篇 | 1 |
| 第一章 集合与简易逻辑 | 3 |
| 第一节 加法原理和乘法原理 | 4 |
| 高考考点和趋势分析 | 4 |
| 知识点讲解与应用 | 4 |
| 基础练习题 | 6 |
| 高屋建瓴 | 6 |
| 能力练习题 | 8 |
| 第二节 排列 | 9 |
| 高考考点和趋势分析 | 9 |
| 知识点讲解与应用 | 9 |
| 基础练习题 | 12 |
| 高屋建瓴 | 12 |
| 能力练习题 | 13 |
| 第三节 组合 | 14 |
| 高考考点和趋势分析 | 14 |
| 知识点讲解与应用 | 14 |
| 基础练习题 | 16 |
| 高屋建瓴 | 17 |
| 能力练习题 | 17 |
| 第四节 排列组合综合题 | 18 |
| 高考考点和趋势分析 | 18 |
| 知识点讲解与应用 | 18 |
| 基础练习题 | 22 |
| 能力练习题 | 23 |
| 第二章 二项式定理 | 24 |
| 第一节 二项式定理 | 25 |
| 高考考点和趋势分析 | 25 |
| 知识点讲解与应用 | 25 |
| 基础练习题 | 28 |
| 高屋建瓴 | 28 |
| 能力练习题 | 29 |
| 第二节 二项式系数性质 | 30 |

| | |
|-------------------------|----|
| 高考考点和趋势分析 | 30 |
| 知识点讲解与应用 | 30 |
| 基础练习题 | 32 |
| 高屋建瓴 | 33 |
| 能力练习题 | 33 |
| 第三章 概率 | 35 |
| 第一节 随机事件与概率 | 35 |
| 高考考点和趋势分析 | 35 |
| 知识点讲解与应用 | 36 |
| 基础练习题 | 38 |
| 能力练习题 | 40 |
| 第二节 互斥事件其一发生概率 | 41 |
| 高考考点和趋势分析 | 41 |
| 知识点讲解与应用 | 41 |
| 基础练习题 | 43 |
| 能力练习题 | 44 |
| 第三节 相互独立事件同时发生概率 | 45 |
| 高考考点和趋势分析 | 45 |
| 知识点讲解与应用 | 45 |
| 基础练习题 | 48 |
| 能力练习题 | 49 |
| 第四章 随机变量 | 51 |
| 第一节 离散型随机变量的分布列 | 51 |
| 高考考点和趋势分析 | 51 |
| 知识点讲解与应用 | 52 |
| 基础练习题 | 57 |
| 能力练习题 | 58 |
| 第二节 离散型随机变量的期望和方差 | 60 |
| 高考考点和趋势分析 | 60 |
| 知识点讲解与应用 | 60 |
| 基础练习题 | 64 |
| 能力练习题 | 65 |
| 第五章 统计初步 | 67 |
| 第一节 抽样方法 | 67 |
| 高考考点和趋势分析 | 67 |
| 知识点讲解与应用 | 68 |
| 基础练习题 | 73 |
| 能力练习题 | 74 |

| | |
|----------------------------|------------|
| 第二节 总体分布的估计 | 76 |
| 高考考点和趋势分析 | 76 |
| 知识点讲解与应用 | 76 |
| 基础练习题 | 84 |
| 能力练习题 | 85 |
| 第三节 正态分布 | 86 |
| 高考考点和趋势分析 | 86 |
| 知识点讲解与应用 | 86 |
| 基础练习题 | 88 |
| 能力练习题 | 89 |
| 第四节 线性回归 | 90 |
| 高考考点和趋势分析 | 90 |
| 知识点讲解与应用 | 90 |
| 基础练习题 | 93 |
| 能力练习题 | 93 |
| 第六章 排列组合概率统计的应用 | 95 |
| 高考考点和趋势分析 | 95 |
| 知识点讲解与应用 | 95 |
| 基础练习题 | 101 |
| 能力练习题 | 102 |
| 第二篇 真题篇 | 103 |
| 考点分析 | 103 |
| 考试要求 | 103 |
| 命题趋向与应试策略 | 103 |
| 真题探究 | 104 |
| 选择题 | 104 |
| 填空题 | 113 |
| 解答证明题 | 120 |
| 第三篇 题典篇 | 129 |
| 选择题 | 129 |
| 填空题 | 140 |
| 解答证明题 | 146 |
| 第四篇 参考答案与解析 | 160 |
| 知识篇答案与解析 | 160 |
| 真题篇答案与解析 | 211 |
| 题典篇答案与解析 | 265 |
| 附录一 公式定理大全 | 355 |
| 附录二 高中数学公式一览表 | 357 |

第一篇 知识篇

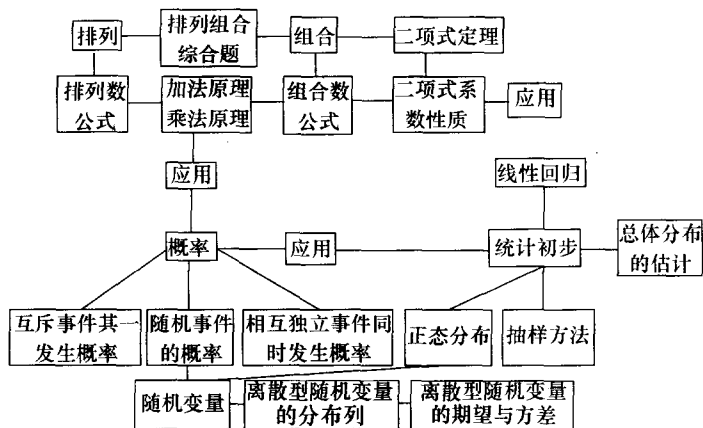
本专题知识结构图

| | | |
|----------------------|-------------|---------------|
| 排列 组合 概率 统计 | 排列组合 | 加法原理与乘法原理 |
| | | 排列 |
| | | 组合 |
| | | 排列组合综合题 |
| | 二项式定理 | 二项式定理 |
| | | 二项式系数性质 |
| | 概率 | 随机事件与概率 |
| | | 互斥事件其一发生概率 |
| | | 相互独立事件同时发生概率 |
| | 随机变量 | 离散型随机变量的分布列 |
| | | 离散型随机变量的期望与方差 |
| | 统计初步 | 抽样方法 |
| | | 总体分布的估计 |
| | | 正态分布 |
| | | 线性回归 |
| 排列组合概率统计的应用 | 排列组合概率统计的应用 | |

虽然大家以前就接触过概率的初步知识,但是在高中阶段将会比较系统地了解概率论和统计的一般知识,因为这部分的知识背景性很强,所以大多数是作为知识点出现的,而技巧性的东西就比较少一点.总体来说,排列组合和二项式定理作为概率论和统计的初步知识应该作为基础掌握好,掌握这部分是一个熟能生巧的过程,而掌握后面的知识是多读多想的过程,两部分的学习方法不太相同.本专题的讲解也充分注意到了这个差别,在前一部分,讲解注重的是方法,在后一部分,注重的是概念原理的说明,而且在例题的选取上,前一部分强调技巧性,后一部分强调基础性和操作性,尤其值得注意的是,在高屋建瓴部分,我们把很多大家在学习过程中容易犯的错误列举了出来,这样使大家能够对照自己的学习过程,防止走入误区.最后一部分是本专题的应用,这是一个值得注意的地方,因为很多用概率统计作为工具的很有趣的问题都被放到了这个部分,大家在研习它的同时能够感受到数学无与伦比的技巧美.

2 专题题典·高中数学 排列组合

为了明确各部分之间的联系,我们作出了下面的专题知识联系图:



希望大家在进行学习的时候能够仔细揣摩各种方法,并且善于总结各个知识模块之间的微妙联系.

第一章 集合与简易逻辑

本章知识结构图

| | | |
|------------------|------------|--|
| 排 列 组 合 | 加法原理与乘法原理 | 加法原理 |
| | | 乘法原理 |
| | | 分类计数与分步计数 |
| | | 怎样分类和分步 |
| | 排列 | 排列 |
| | | 排列数 |
| | | 排列数公式 |
| | | $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, m \leq n, m, n \in \mathbf{N}$ |
| | | 排列数恒等式 $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$ $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1} + A_{n-1}^m$ |
| | | 怎么理解排列定义中的一定顺序 怎样理解排列数和加法原理、乘法原理的关系 |
| | 组合 | 组合 |
| | | 组合数 |
| | | 组合数公式 |
| | | $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} (m \leq n)$ |
| | | $C_n^m = C_n^{n-m}$ |
| | | $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ |
| | | $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$ |
| | 区别排列和组合 | |
| 排列组合综合题 | 组合应用题的解题思路 | |
| | 枚举法 | |
| | 排除法 | |
| | 插空法 | |
| | 捆绑法 | |
| | 对称法 | |
| | 集合法 | |

第一节 加法原理和乘法原理

高考考点和趋势分析

本节是推导排列、组合数的依据,又是解排列、组合应用题的基本原理,所以高考对这一部分的考查多与其他知识结合,较少专门单独出题.

目标 1:掌握分步计数和分类计数原理;

目标 2:能熟练运用两个原理解决一些实际问题.

知识点讲解与应用

1. 加法原理(考频 34 次,其中,选择题 18 次,填空题 14 次,解答或证明题 2 次)

做一件事,完成它可以有 n 类不同的办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法,……,依此类推,在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法.那么要完成这件事总共有 $N = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$ 种不同的方法.

例 1 从甲地到乙地,可以乘火车,也可以乘汽车,还可以乘飞机.一天中,火车有 3 班,汽车有 5 班,飞机有 2 班,问一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法?

分析 因为一天中乘火车从甲到乙有 3 种走法,乘汽车有 5 种走法,乘飞机有 2 种走法,每一种走法都可以从甲地到达乙地,也就是说可以做完这件事,因此一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地总共有 $3 + 5 + 2 = 10$ 种不同的走法.

解答 10 种走法.

点评 加法定理的最基本应用.

例 2 三边长均为整数,且最大边长为 7 的三角形的个数是多少?

分析 设另外两边分别是 a, b , 所以 $1 \leq a \leq b \leq 7, b - a < 7 < b + a$, 分类讨论即可.

解答 注意到三边长均为正整数,所以不妨设另外两边分别是 a, b ,

$$\text{所以} \begin{cases} 1 \leq a \leq b \leq 7, \\ b - a < 7 < b + a, \end{cases}$$

所以按照加法原理,我们对 a 进行分类讨论:

$$a = 1 \text{ 的时候, } 7 - 1 < b < 7 + 1, \therefore b = 7.$$

$$a = 2 \text{ 的时候, } 7 - 2 < b < 7 + 2, \therefore b = 6, 7.$$

$$a = 3 \text{ 的时候, } 7 - 3 < b < 7 + 3, \therefore b = 5, 6, 7.$$

$$a = 4 \text{ 的时候, } 7 - 4 < b < 7 + 4, \therefore b = 4, 5, 6, 7.$$

$$a = 5 \text{ 的时候, } 5 \leq b < 7 + 5, \therefore b = 5, 6, 7.$$

$$a = 6 \text{ 的时候, } 6 \leq b < 7 + 6, \therefore b = 6, 7.$$

$a = 7$ 的时候, $7 \leq b < 7 + 7, \therefore b = 7$.

所以根据加法原理最大边长为 7 的三角形的个数是 $1+2+3+4+3+2+1 = 16$ 个.

点评 题目不太复杂的时候不妨就将所有可能一一列出.

2. 乘法原理(考频 19 次,其中,选择题 16 次,填空题 2 次,解答或证明题 1 次)

做一件事,完成它需要依次分成 n 个步骤,做第一步有 m_1 种不同的方法,做第二步有 m_2 种不同的方法,……,依此类推,做第 n 步有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事总共有 $N = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同的方法.

例 3 用数字 0,1,2,3(可以重复使用)能够组成多少个四位数?

分析 注意到完成这件事情可以分成四个步骤:首先是确定千位上的数字,然后是确定百位,其次确定十位,最后确定个位.

解答 因为首位不为 0,所以第一步有 1,2,3 三种可能,其他的每个步骤都有 4 种方法可以选择,根据乘法原理总共可以组成 $3 \times 4^3 = 192$ 个四位数.

点评 乘法定理的基本应用题,关键是将事情分成几个步骤做.

例 4 5 名旅客在 3 家旅馆投宿的方法有多少种?

分析 假设五名旅客分别是 A,B,C,D,E,注意到完成这件事情,可以分成 5 个步骤:安排 A,安排 B,安排 C,安排 D,安排 E.每个步骤有 3 种方法,所以可以得到总的方法数是 $3^5 = 243$ 种.

解答 $3^5 = 243$ 种.

点评 分别安排 5 名旅客即可.

例 5 8 本不同的书,任选 3 本分给 3 个同学,每人一本,有多少种不同的分法?

分析 不妨设这三个同学分别是 A,B,C,那么 A 选择 8 本书中的 1 本有 8 种选法,B 选择的时候只剩 7 本书,所以有 7 种选法,C 选择的时候只剩 6 本书,所以有 6 种选法.所以 3 本书每人 1 本的话,根据乘法原理,总共有选法 $8 \times 7 \times 6 = 336$ 种选法.

解答 $8 \times 7 \times 6 = 336$ 种选法.

点评 分别由几名同学按顺序来选书,即可得到结果.

例 6 由数字 1,2,3,4,5 可以组成多少个无重复数字的三位数?

分析 第一步确定百位上的数字,从 5 个数字中任选一个数字,共有 5 种选法;第二步确定十位上的数字,由于数字不允许重复,这有 4 种选法;第三步确定个位上的数字,同理,它只有 3 种选法.根据乘法原理,得到可以组成的三位数的个数是 $5 \times 4 \times 3 = 60$.

解答 可以组成的三位数的个数是 $5 \times 4 \times 3 = 60$.

点评 关于数字的问题,先后确定各个数位的数字即可.

例 7 分别回答下列问题:

- (1) 从 6 本不同的语文书和 5 本不同的数学书中取语文或数学书一本,有多少种取法?
- (2) 从 6 本不同的语文书和 5 本不同的数学书中取语文书一本同时取数学书一本,有多少种取法?

分析 两种情况要分别用到不同的原理,第一种情况只取一本书,所以要分类,而第

6 专题题典·高中数学 排列组合

二种情况要取两本书,所以要分步,这是最大的差别.

解答 (1) 根据加法原理, $6 + 5 = 11$ 种.

(2) 根据乘法原理, $6 \times 5 = 30$ 种.

点评 两种原理的运用,注意对比它们之间的区别.

基础练习题

1. 从甲地到乙地,可以乘火车,也可以乘汽车,还可以乘轮船.一天中火车有 4 班,汽车有 3 班,轮船有 2 班.问:一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地,共有多少种不同走法?
2. 旗杆上最多可以挂两面信号旗,现有红色、蓝色和黄色的信号旗各一面,如果用挂信号旗表示信号,最多能表示出多少种不同的信号?
3. 掷一枚骰子两次,两次出现的数字之和为偶数的情况有多少种?
4. 用五种颜色给图 1-1-1 的五个区域染色,每个区域染一种颜色,相邻的区域染不同的颜色.共有多少种不同的染色方法?
5. 用 1, 2, 3, 4 这四种数字组成五位数,数字可以重复,至少有连续三位是 1 的五位数有多少个?
6. 马戏团的小丑有红、黄、蓝三顶帽子和黑、白两双鞋,他每次出场演出都要戴一顶帽子、穿一双鞋.问:小丑的帽子和鞋共有几种不同搭配?
7. 从甲地到乙地有 2 条路,从乙地到丙地有 3 条路,从丙地到丁地也有 2 条路.问:从甲地经乙、丙两地到丁地,共有多少种不同的走法?

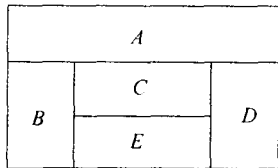


图 1-1-1

(参考答案见 P160)

高屋建瓴

1. 分类计数与分步计数

如果完成一件事有很多类办法,这些种类的办法之间是相互独立的,相互排斥的,不论哪一类办法中的哪一种办法都能单独完成这件事而不是这件事的一部分,求完成这件事的方法种数,应用分类计数原理即加法原理.

如果完成一件事,须分成很多步骤,各个步骤都是不可缺少的,需要依次完成所有步骤,才能完成这件事情,而完成每一个步骤各有若干方法,求完成这件事的方法种数,应用分步计数原理即乘法原理.

例 8 从甲地到乙地有 3 条陆路可走,从乙地到丙地有 2 条陆路可走,又从甲地不经过乙地到丙地有 2 条水路可走.

(1) 从甲地经乙地到丙地有多少种不同的走法?

(2) 从甲地到丙地共有多少种不同的走法?

分析 两个题目的关键在于区分是否必须经过乙地。

解答 (1) 因为要经乙地, 从甲到乙有 3 种走法, 再从乙到丙有 2 种走法,

根据乘法原理, 从甲地经乙地到丙地有 $3 \times 2 = 6$ 种走法。

(2) 从甲地不经乙地到丙地由 2 种走法, 加上经乙地到丙地的 6 种走法,

共有 $2 + 6 = 8$ 种走法。

点评 乘法原理、加法原理的运用, 注意对比它们之间的区别。

2. 怎样分类和分步

分类的时候要首先确立标准, 只有确立了标准, 才能够不重复不遗漏的把所有的类别都考虑到。所谓不重复不遗漏, 是指两条原则, 第一条是完成这件事的任何一种方法必须属于某一类; 第二条是分别属于不同两类的两种方法是不同的方法。虽然原则很简单, 但是在复杂的情况下要把握好并不容易, 所以需要思维的缜密性和头脑冷静。

分步的时候也要注意不重复不遗漏。比如说如果本来是一个方法, 但是既可以这样分步, 又可以那样分步, 那么在计算的时候就会出现重复; 或者是一个方法不能按照你的标准去分步, 那么按照你的方法进行计算就会出现遗漏。

例 9 某外语组有 9 人, 每人至少会英语、法语中的一门, 其中 7 人会英语, 4 人会法语, 从中选会英语和会法语的各一人, 有多少种不同的方法?

分析 这个题目的特点是人员门类众多, 所以需要先分门类地整理清楚。

解答 由集合知识, 既会英语又会法语的有 $7 + 4 - 9 = 2$ 人, 仅会英语的有 $7 - 2 = 5$ 人, 仅会法语的有 $4 - 2 = 2$ 人。

先分类后分步, 从仅会英、法语的人中各选 1 人, 有 $5 \times 2 = 10$ 种方法; 从仅会英语与英、法语都会的人中各选 1 人, 有 $5 \times 2 = 10$ 种方法; 从与英、法语都会和仅会法语的人中各选 1 人, 有 $2 \times 2 = 4$ 种方法。故所求的方法共有 $10 + 10 + 4 = 24$ 种。

点评 本题先分类再分步, 读者可以由此题熟悉分类、分步的方法。

3. 适当把两种方法结合

如果碰到复杂一点的题目, 单靠一种办法很难把问题计算清楚, 所以需要混合使用这两种方法。比如说可以把一个问题首先分类, 然后在某一类中再具体分步计算。在结合的时候还要注意的是不要把分类和分步弄混, 也就是说每做一步你得知道自己在干什么。

例 10 现有高一四个班学生 34 人, 其中一、二、三、四班学生各 7, 8, 9, 10 人, 他们自愿组成数学小组。现在要推选两个人作年级大会发言, 这两个人必须来自不同的班级, 有多少种不同的选法?

分析 解法 1 就是先分类再分步的操作方法, 比较基础; 解法 2 介绍一种新方法, 就是排除法, 所谓排除法就是把全部情况数中不符合题目条件的情况数排除掉, 剩下的就是满足条件的情况数。

解法 1 首先分类, 可以分成六类, 按照两个学生从哪个班里来分:

从一二班来: 有 7×8 种方法。

从一三班来: 有 7×9 种方法。

8 专题题典·高中数学 排列组合

从一四班来:有 7×10 种方法.

从二三班来:有 8×9 种方法.

从二四班来:有 8×10 种方法.

从三四班来:有 9×10 种方法.

所以共有方法 $N = 7 \times 8 + 7 \times 9 + 7 \times 10 + 8 \times 9 + 8 \times 10 + 9 \times 10 = 431$ 种.

解法 2 在这个题目中,全部情况数是所有 34 名学生中挑选 2 名的方法数,我们分两步来做,第一步有 34 种方法,第二步有 33 种方法,所以如果两名学生考虑顺序的话就会有 $34 \times 33 = 1122$ 种方法,但是我们知道在这个题目中按照顺序挑选学生甲、乙和学生乙、甲是没有区别的,所以这 1122 种方法里是有重复的,重复的数目都是 2 次,所以真正的全部的情况数是 $1122 \div 2 = 561$.

下面我们看不符合条件的情况数,注意到两人不同班的反面就是两人同班,所以:

$$\text{两人都在一班,情况数} \frac{7 \times 6}{2} = 21;$$

$$\text{两人都在二班,情况数} \frac{8 \times 7}{2} = 28;$$

$$\text{两人都在三班,情况数} \frac{9 \times 8}{2} = 36;$$

$$\text{两人都在四班,情况数} \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

所以剩余的情况数就是 $561 - 21 - 28 - 36 - 45 = 431$.

点评 不知道大家注意到没有,根据上面这个题目我们可以得到一个恒等式如果

$$N = 7 \times 8 + 7 \times 9 + 7 \times 10 + 8 \times 9 + 8 \times 10 + 9 \times 10,$$

$$M = \frac{(7+8+9+10)(7+8+9+10-1)}{2} - \frac{7 \times 6}{2} - \frac{8 \times 7}{2} - \frac{9 \times 8}{2} - \frac{10 \times 9}{2},$$

那么 $M = N$.

题目中各班人数换成字母 a, b, c, d , 根据同样的方法,我们就证明了恒等式:

$$\begin{aligned} & ab + ac + ad + bc + bd + cd \\ &= \frac{(a+b+c+d)(a+b+c+d-1)}{2} - \frac{a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)}{2}. \end{aligned}$$

可见概率论的应用是很广泛的,如果你还想继续探讨可以研读讲解部分的最后一章.

能力练习题

- 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成多少个三位数(各位上的数字允许重复)?
- 如图 1-1-2, A, B, C, D, E 五个区域分别用红、黄、蓝、白、黑五种颜色中的某一种染色,要使相邻的区域染不同的颜色,共有多少种不同的染色方法?
- 求 360 共有多少个不同的约数.

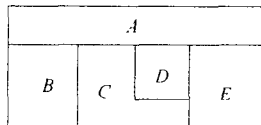


图 1-1-2

- 有 10 块糖,每天至少吃一块,吃完为止.问:共有多少种不同的吃法?
- 小明要登上 10 级台阶,他每一步只能登 1 级或 2 级台阶,他登上 10 级台阶共有多少种不同的登法?
- 在图 1-1-3 中,从 A 点沿实线走最短路径到 B 点,共有多少条不同路线?

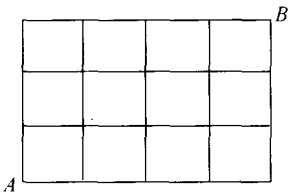


图 1-1-3

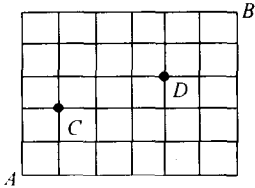


图 1-1-4

- 图 1-1-4 是某街区的道路图.从 A 点沿最短路线到 B 点,其中经过 C 点和 D 点的不同路线共有多少条?
- 沿图 1-1-5 中箭头所指的方向从 A 到 B 共有多少种不同的走法?

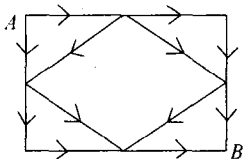


图 1-1-5

- 有 15 根火柴,如果规定每次取 2 根或 3 根,那么取完这堆火柴共有多少种不同取法?
(参考答案见 P161)

第二节 排列

高考考点和趋势分析

排列和后面要学习的组合在代数中自成体系,内容抽象,解题方法灵活多样,历年高考题都以考查基础知识和基本技能、方法为主,准确运用公式是重点.

目标 1:理解排列的意义,掌握排列数公式;

目标 2:掌握排列数恒等式,并能用它来证明一些等式.

知识点讲解与应用

- 排列(考频 39 次,其中,选择题 26 次,填空题 12 次,解答或证明题 1 次)

从 n 个不同元素中,任取 $m(m \leq n)$ 个元素(这里被取元素各不相同),按照一定的