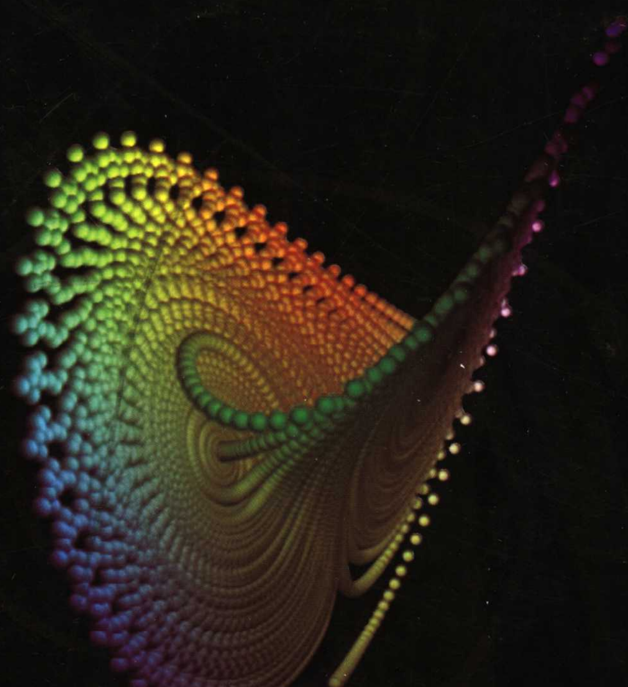
钱祥征 黄立宏 主编

常微分方程

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS



湖南大學出版社

常 微 分 方 程

主　编　钱祥征　黄立宏
参　编　（以姓氏笔画为序）
朱郁森　肖　萍
孟益民　晏华辉

湖南大学出版社
2007年·长沙

内 容 简 介

本书内容包括常微分方程的基本概念、一阶常微分方程的初等积分法、高阶常微分方程、一阶常微分方程组、解的存在唯一性定理与定性分析初步、一阶偏微分方程等．各节后配有适量习题，书末附有习题参考答案.

本书是为高等本科院校理工科非数学专业学生编写的“常微分方程”课程教材，也可作为数学类本科专业（如信息与计算科学专业）同名课程的选用教材或教学参考书，可供科技工作者了解微分方程理论、方法与应用时阅读和参考．

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/钱祥征，黄立宏主编．--长沙：湖南大学出版社，2007.9

ISBN 978-7-81113-252-6

Ⅰ.常…　Ⅱ.①钱…②黄…　Ⅲ.常微分方程—高等学校—教材

Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 155298 号

常微分方程

Changweifen Fangcheng

主　　编：钱祥征　黄立宏

责任编辑：丁　莎

特约编辑：厉　亚

封面设计：吴颖辉

出版发行：湖南大学出版社

社　　址：湖南・长沙・岳麓山　　**邮　　编：**410082

电　　话：0731-8821691(发行部)，8820008(编辑室)，8821006(出版部)

传　　真：0731-8649312(发行部)，8822264(总编室)

电子邮箱：dingsha008@126.com

网　　址：http://press.hnu.cn

印　　装：长沙湖大印务有限公司

开本：889×1194　16 开　　**印张：**10.75　　**字数：**276 千

版次：2007 年 10 月第 1 版　　**印次：**2007 年 10 月第 1 次印刷

印数：1～5 000 册

书号：ISBN 978-7-81113-252-6/O・73

定价：22.00 元

前　言

众所周知，微分方程是数学联系实际的主要桥梁之一，也是在科学、工程和技术领域乃至经济和其他社会学科中应用十分广泛的重要数学工具．它的形成与发展是和力学、天文学、物理学，以及其他科学技术的发展密切相关的，同时它继续推动着这些学科的发展．

常微分方程是理工科学生众多专业课的基础和重要学习工具，但数学专业以外的理工科各专业过去是把它作为高等数学（微积分）中的一章来进行教学的，内容少、学时少，有一带而过的现象，没能引起学生足够的重视与兴趣．2004 年起，我们开始在湖南大学全校集中办的试点班上单独设常微分方程课，适当扩充内容，改革教学方式，强调两个应用——在实际中的应用和几何、代数、微积分、物理等前期课程所建立的概念与方法在常微分方程中的应用，引起了学生很大的兴趣，加深了学生对数学有用的体会和克服学习困难的信心．基于重点院校要加强学生的基础训练和上述试点的成功，我校决定在 2006 级开始实施的理工科（包括经济专业）学生新的培养方案中，把“常微分方程”作为一门不低于 40 学时的公共基础平台课，单独开出．本教材是为适应这个“公共”的要求，结合试点中的体会而编写的．当然也可作为数学类本科专业（如信息与计算科学专业）同名课程的选用教材或教学参考书，可供科技工作者了解微分方程理论、方法与应用时阅读和参考．

本教材在形式上做了一点改变，那就是每一页的右边留出一些空白，它的作用是，一方面我们附注一些说明、提示，以使左边正文中的内容更简洁一些；另一方面也供读者写一些记录与心得．这只是一种尝试，我们做得还很不够．

本教材由钱祥征、黄立宏主编，参加编写的人员还有：朱郁森、肖萍、孟益民、晏华辉．教材包含常微分方程的基本概念、一阶常微分方程的初等积分法、高阶常微分方程、一阶常微分方程组、解的存在唯一性定理与定性分析初步、一阶偏微分方程等内容，其中标注“*”号的内容可根据学时多少进行选讲．本书中，概念、定理及理论叙述准确、精练，知识点突出，难点分散，证明和计算过程清晰，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性．

本教材中难免会有许多不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵的意见．

编　者

2007 年 8 月

目　次

第 1 章　常微分方程的基本概念

17 世纪中后期，由于生产实践与科学实践的需要，微分方程伴随着科学史上划时代的发现——微积分，几乎同时诞生了．所谓微分方程，就是联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的方程．物理学、化学、生物生态学、工程技术和许多社会、经济科学中的大量问题，一旦加以精确的数学描述，从它们中导出的数学模型往往就是微分方程．因此，它是数学联系实际的主要桥梁之一，是各门专业课的重要数学工具之一．我们在数学分析（微积分学）、高等代数（线性代数）、解析几何等数学课程中学到的许多概念与运算方法，在物理、力学中学到的一些基本概念、基本定律、定理，也将在（常）微分方程模型的建立、求解和结果的实际解释中得到充分的应用．本教程将主要介绍（常）微分方程的基本概念、基本理论、基本解法和实际应用，随着学习的深入，你将发现这是一门十分有趣的课程．

1.1　实际中的一些常微分方程

应用数学手段研究自然现象、社会现象或解决工程技术问题，一般先要建立数学模型，再对模型进行简化和求解，最后结合实际问题对结果进行分析和讨论．建立数学模型时又常常要依据与该问题相关的物理的、化学的或其他的一些已知的规律．下面，我们通过几个例子来说明这个过程，同时也可看到常微分方程的广泛应用．

例 1　物体的温度 u 可视为时间 t 的函数，现有一物体在温度为 $u_a=24$ ℃的恒温介质中冷却，设它的初始温度为 $u_0=150$ ℃，10 min 后它降到 $u_{10}=100$ ℃．试求 20 min 后，该物体的温度 u_{20}．

解　(1) 问题的物理依据——Newton 冷却定律：物质温度变化速度与该物质和其所在介质的温差成正比，即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\propto(u-u_a).$$

正比常数 $k>0$，由于本问题讨论的是温度下降，可以加负号．

(2) 数学模型——一阶常微分方程和初始条件

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-u_a),\tag{1-1}$$

$$u|_{t=0}=u_0=150.\tag{1-2}$$

(3) 求解

通解：
$$u=u_a+C\mathrm{e}^{-kt}.\tag{1-3}$$

特解：
$$u=24+126\mathrm{e}^{-kt}.\tag{1-4}$$

代入方程(1-1)使两端恒等的函数称为方程的解．C 是任意常数，因此这个式子代表许多个解．将初始条件(1-2)代入(1-3)，确定出 $C=126$．所以式(1-4)是(1-3)中满足方程和初始条件的那个特定的解．

(4) 本问题所需的温度与时间的关系式——要确定 k 值

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{126}{100-24}\approx 0.051,$$

所以得

$$u=24+126\mathrm{e}^{-0.051t}.$$

(5) 最后答案

$$u_{20}\approx 70\ ℃.$$

这才是本问题中那类物体(开始 10 min 内从 150 ℃ 下降到 100 ℃ 的)的温度与时间的关系式.

例 2　如图 1-1 所示,考虑 $R—L—C$ 串联电路:电感 L,电阻 R 和电容 C 与电源 $e(t)$ 串联,L,R,C 是常数,$e(t)$ 是时间 t 的已知函数. 试建立,当开关 K 合上后,电流 I 应满足的微分方程.

解　(1) 物理依据——电路中基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律:在闭合回路中,所有支路上的电压降的代数和等于零.

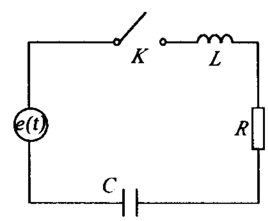


图 1-1

现电感 L,电阻 R 和电容 C 的电压降分别为 $L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$,$RI$ 和 $\dfrac{Q}{C}$(其中 Q 为电量,$\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=I$,$I$ 是回路上的电流),由第二定律得

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{Q}{C}=e(t).$$

(2) 简化,整理得数学模型

上式对 t 求导,代入 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=I$,整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}I=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}.$$

这就是我们在第 3 章中要研究的二阶常系数线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+bx=f(t)$$

的一种特殊情形,其中 a,b 是常数,$f(t)$ 是已知函数.

例 3　求一曲线,它满足:曲线上任何一点 (x,y) 处的切线斜率等于该点横坐标的 2 倍,且经过点 $(1,2)$.

解　(1) 几何依据——曲线 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的几何意义是曲线在点 (x,y) 处的切线斜率.

(2) 数学模型

方程:　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,$　　(1-5)

初值条件:　$y(x)|_{x=1}=y(1)=2.$　　(1-6)

要求的曲线 $y=y(x)$ 过点 $(1,2)$.

初值条件也是定解条件的一种.

(3) 求解

通解:　$y=x^2+C,$　　(1-7)

其中 C 是任意常数. 它代表一族曲线.

特解:　$y=x^2+1,$　　(1-8)

它是由初值条件(1-6)决定的式(1-7)中 $C=1$ 的那个特定的解,就是本题所求的过点 $(1,2)$ 的那一条曲线(见图 1-2).

将方程写成 $\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$. 两边积分得式(1-7),$C$ 是积分常数. 通解是抛物线族. 将初值条件(1-6)代入通解式(1-7),有 $2=y(1)=1+C$,得 $C=1$. 特解(1-8)是抛物线族中的一条.

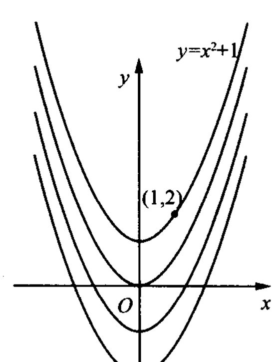


图 1-2

例 4 在某个城镇发生了一种传染病，应立刻采取隔离措施. 设该城镇总人数为 N，以 $x(t)$ 表示 t 时刻已染病人数，开始时 $x(0)=x_0$，以 $y(t)$ 表示 t 时刻尚未被染上病的人数. 若暂时不考虑死亡的问题和不区分敏感人群、免疫人群问题，试建立传染病的数学模型.

没有人员进出，不考虑死亡，则 N 为常数.

解 (1) 建模依据：在单位时间内传染上病的人数与未被染上病的人数成正比.

若考虑敏感人群与免疫人群时情况会复杂一些，将会导出微分方程组，该问题以后再说.

(2) 数学模型

Δt 时刻内 $x(t)$ 的平均改变量：$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$.

Δt 时刻内 $x(t)$ 的平均变化率 $=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}/x(t)$.

$x(t)$ 的瞬时变化率 $=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}/x(t)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}/x(t)$.

按上述依据，有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}/x(t)=ry(t),\quad r>0.$$

另有不变的总人数 N，即

$$x(t)+y(t)=N.$$

因此得数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx(N-x),\quad r>0,$$

初始条件为

$$x(0)=x_0.$$

(3) 求解及结果的分析见 2.1 的例 3.

例 5 设某商品在时刻 t 的售价为 P，社会对该商品的需求量和供给量分别是 P 的函数 $Q(P)$ 和 $S(P)$，则该商品在时刻 t 的价格 $P(t)$ 对于时间 t 的变化率可认为与该商品在同一时刻的超额需求量 $Q(P)-S(P)$ 成正比，试建立该商品售价的数学模型.

解 (1) 建模依据：商品在 t 时刻的价格对于时间 t 的变化率与商品在同一时刻的超额需求量成正比.

(2) 数学模型

商品在 t 时刻的价格 $P(t)$ 对于时间 t 的变化率为 $\dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}$.

商品在 t 时刻的超额需求量是 $Q(P)-S(P)$.

依题意有：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k[Q(P)-S(P)],$$

其中 $k>0$ 为常数. 这就是商品的价格调整模型.

对于特定商品，$Q(P)$ 和 $S(P)$ 是确定的，从而由上面的价格调整模型可确定出该商品价格 $P(t)$ 与时间 t 的函数关系，以作为价格调整依据.

1.2　基本概念

前面已提到了有关微分方程的一些名词，本节中我们再系统地、准确地给出一些定义.

1.2.1　方程的阶、线性方程和非线性方程

在初等数学里已学过方程，例如

$$x^2+2x-3=0,$$

$$\tan x=x$$

代数方程
三角方程

等都是方程，其中 x 是未知量，它们的解是某些个特定的值. 也见过另一类方程，例如

$$x^2-y^2=1,$$

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

等，这里若 x 为自变量，则 y 和 z 就是未知函数，它们的解是 x 的函数. 这种方程称为函数方程.

本书要研究的是另一类方程，是联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的方程，这种方程称为**微分方程**，其中必须含有未知函数的导数. 例如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\tan x+x^3, \tag{1-9}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2, \tag{1-10}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0, \tag{1-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+ct^2x=t^5+1, \tag{1-12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x), \tag{1-13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1-14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{1-15}$$

等等都是微分方程，其中式(1-9)～式(1-13)是常微分方程，自变量只有一个，(1-9)、(1-10)、(1-13)中的自变量是 x，而 y 是未知函数；(1-11)、(1-12)中的自变量是 t，而未知函数在(1-11)中是 y，(1-12)中是 x. 方程(1-14)、(1-15)是偏微分方程，自变量有两个以上，在(1-14)中自变量是 t,x，(1-15)中自变量是 x,y,z，两个方程的未知函数都是 u.

方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为该方程的**阶**. 方程(1-9)、(1-10)、(1-11)都是一阶方程，(1-12)、(1-14)、(1-15)都是二阶方程，(1-13)是 n 阶方程.

一阶常微分方程的一般形式是

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0, \tag{1-16}$$

这里 F 是 x,y 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的已知函数,而且其中一定要含有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 如果能从式(1-16)中解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,就得到导数已解出的一阶方程的一般形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),$$

或

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

这两种形式也称为**一阶显式方程**,从而称式(1-16)为**一阶隐式方程**.

n 阶常微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1-17}$$

这里 $y^{(i)}=\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}x^i}(i=1,2,\cdots,n)$,$F$ 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数,而且其中一定要含有 $y^{(n)}$. 已解出 n 阶导数的 n 阶方程的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

i 较小时可写作 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y',\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=y''$ 等.

在式(1-17)中,如果函数 F 关于 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 是一次有理整式,则称为**线性微分方程**. 前面提到的式(1-13)就是 n 阶线性常微分方程的一般形式,(1-9)是一阶线性方程,(1-12)是二阶线性方程. 线性微分方程(组)是微分方程理论和应用中非常重要的一类方程,将在第 3,4 章中重点讨论.

不是线性的方程称为**非线性方程**,例如(1-10)、(1-11)都是非线性方程.

1.2.2 方程的解、通解、特解和初值条件

定义 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $a<x<b$ 内连续,且有一直到 n 阶的各阶导数,使

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{n}(x))\equiv 0$$

在 $a<x<b$ 内成立,则称函数 $y=\varphi(x)$ 为方程(1-17)的**解**,$a<x<b$ 是**解的定义区间**.

为了简单明了,我们以一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1-18}$$

来进一步说明,解有通解与特解之分. 从 1.1 的例 3 中的简单方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

出发. 我们看到,函数 $y=x^2+C$ 是它的解,其中 C 是任意常数,C 取不同的值对应不同的解;$C=1$ 时,即 $y=x^2+1$ 就是方程解的一般表达式(通式)$y=x^2+C$ 中,对应过点(1,2)的那一个特定的解. 我们有:

设含有任意常数 C 的函数

$$y=\varphi(x,C) \tag{1-19}$$

是一阶方程(1-18)的解,且对于 (x,y) 平面上某个区域 G 内任一点 (x_0,y_0),总有 C 的确定值 C_0 与之对应,使得解 $y=\varphi(x,C_0)$ 满足初值条件

$$y|_{x=x_0}=y_0, \tag{1-20}$$

1.1 的例 3 中的条件 $y|_{x=1}=y(1)=2$ 称作初值条件,是定解条件的一种,它的作用是从通式 $y=x^2+C$ 中确定 $C=1$,得到过点(1,2)的那一个解.

当自变量是时间 t 时,条件 $y|_{t=0}=y_0$ 常称作初始条件,表示 $y(t)$ 在开始时取 $y(0)\equiv y_0$ 这个值. 它的作用与初值条件一样.

通俗地讲:通解式(1-19)至少是某个区域 G 内,过 G 内一切点方程(1-18)所有解的总代表.

即 $y_0=\varphi(x_0,C_0)$，则称 $y=\varphi(x,C)$ 是方程(1－18)在区域 G 内的通解.

一般地，如果常微分方程的解中含有的独立任意常数的个数与方程的阶数相等，则称这样的解为常微分方程的**通解**.

方程的满足初值条件的解称为**特解**.

求方程(1－18)的满足初值条件(1－20)的解的问题，称为**一阶微分方程的初值问题**，也称为**柯西(Cauchy)问题**，常表示为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y|_{x=x_0}=y_0.\end{cases}$$

我们在第 5 章中，将会从理论上讨论这个初值问题在什么条件下解是一定存在和唯一的.

一般地，n 阶微分方程(1－17)的初始条件可以写成

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

或写成

$$y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_0',\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

其中，$x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的值.

1.2.3　线素场和积分曲线

在 $x-y$ 平面区域 G 内定义的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad (x,y)\in G, \tag{1-21}$$

相当于，对 G 内任一点 (x,y)，由该点的 $f(x,y)$ 值给出了以点 (x,y) 为中心，斜率为 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的小直线段，这小线段称为点 (x,y) 上由方程(1－18)定义的**线素**. 当 G 内每一点都这样做了，就得到 G 内的线素图，称为方程(1－21)在 G 内定义的**线素场**. 因此，从几何上看，给定了一个具体的方程(1－21)，就相当于在区域 G 内给定了一个线素场.

方程(1－21)的解在 $x-y$ 平面上的几何图形称为方程(1－21)的**积分曲线**. 在 G 内的每一点处，积分曲线与该点上(1－21)定义的线素相切，反过来说，如果一条曲线，它的每一点都与(1－21)定义的线素场在该点的线素相切，则这条曲线就是方程(1－21)的积分曲线. 我们在上节例 3 中看到，方程(1－5)的通解 $y=x^2+C$ 的图形是积分曲线族——一族抛物线，特解 $y=x^2+1$ 是这个曲线族中满足初值条件(过点(1,2)的)的一条积分曲线 .

例中的方程看似简单，但它的解是无法用初等函数或它们的积分式表示的.

利用线素场可以近似地画出积分曲线，我们看下面的例子.

例　画出方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \tag{1-22}$$

的线素场，并近似地画出积分曲线.

解　为了较有规律地画出线素场，我们先画出 K 等倾线，即线素场中线素斜率都等于常数 K 的那些点所构成的曲线. 本例的 K 等倾线就是

$$x^2+y^2=K,\quad K\geqslant 0.$$

这是一系列以原点为中心，半径为 $\sqrt{K}$ 的圆周($K=0$ 对应一点(0,0)). 我们

可以取 $K=0,1,4,9,\cdots$;在 0,1 之间还可以取 $K=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{3}{4}\right)^2,\cdots$,这样就可有规律地作出方程(1-22)的线素场了.图 1-3 中画出的是如下四条代表等倾线:

$$x^2+y^2=0,$$
$$x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$x^2+y^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$
$$x^2+y^2=1.$$

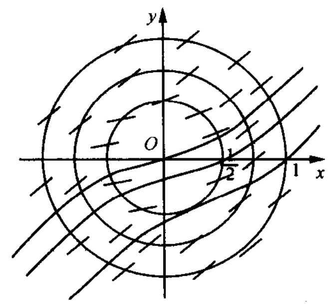


图 1-3

每条等倾线上线素的斜率是相等的,分别是 $K=0,\frac{1}{4},\frac{9}{16},1$.

有了线素场,以场中线素为切线,就可近似地描绘出积分曲线的图形了.图 1-3 中画出的是方程(1-22)过点(0,0)、$(\frac{1}{2},0)$和(1,0)的三条积分曲线.

从积分曲线的分布性态、走向等,我们可以不依靠解的表达式,而获得所给方程解的许多重要性质.因此,利用方程(1-21)定义的线素场作出积分曲线(族)的方法,虽然不容易,但却是常微分方程研究中的一种重要方法.

综合练习 1

1. 指出下列各微分方程的阶数,并说明是线性还是非线性方程.

(1) $\frac{d^3y}{dx^3}-2\cos x\frac{d^2y}{dx^2}+\sin y=0$;

(2) $y^3\frac{dx}{dy}+2xy^2+1=0$;

(3) $x^2y''+6xy'+4x^2y=f(x)$;

(4) $(y')^2+3x^2y'+6y=0$;

(5) $\frac{dr}{d\theta}+3r=\sin\theta$;

(6) $\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}+\left(\frac{du}{dt}\right)^3+u=0$.

2. 试验证下列各题中所给出的函数是相应微分方程的解.

(1) $y=\frac{1}{C_1x+C_2}+1,y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$ (C_1,C_2 是常数);

(2) $y=2+C\sqrt{1-x^2},(1-x^2)y'+xy=2x$ (C 是常数);

(3) $y=e^x,y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$;

(4) $y=-\frac{1}{x},x^2y'=x^2y^2+xy+1$;

(5) $y=-6\cos 2x+8\sin 2x$ 是 $y''+y'+\frac{5}{2}y=25\cos 2x$ 满足 $y(0)=-6$,$y'(0)=16$ 的特解;

(6) $x=t^3-t+2, y=\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+C$($C$ 是常数，t 是参变量)所决定的函数 $y=y(x)$ 是 $x=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2$ 的解；

(7) $(x+\sqrt{2}C)^2+y^2=C^2$(C 是常数)所确定的函数是 $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$ 的解.

3. 试验证下列各函数都是二阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2y=0$ 的解($\omega>0$ 是常数)，并思考：这告诉了我们什么？

(1) $y=\cos\omega x$；

(2) $y=\sin\omega x$；

(3) $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$　(C_1, C_2 是任意常数)；

(4) $y=A\sin(\omega x+B)$　(A, B 是任意常数).

4. 对微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，

(1) 求出它的通解；

(2) 求它过点(1,4)的特解；

(3) 求它与直线 $y=2x+3$ 相切的特解；

(4) 求它满足条件 $\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的特解.

做完后，说明这些结果告诉我们什么？

5. 求通解为 $y=Ce^x+x$ 的微分方程，这里 C 是任意常数.

6. 已知一物体运动的加速度为 $A\sin\frac{2\pi}{T}t$，其中 A, T 为常数，初速度为零，试求该物体运动速度 v 随时间 t 的变化规律.

7. 试按下列各题的条件，分别建立曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴间的部分被切点所等分；

(2) 曲线上任一点的切线之纵截距等于切点横坐标的平方；

(3) 曲线上任一点的切线介于切点和纵坐标轴间的那部分长度恒为 2.

第 2 章　一阶常微分方程的初等积分法

一阶常微分方程，相对来说是一类最简单的微分方程. 初等积分法，就是把微分方程的解用初等函数或它们的积分来表示的方法. 在常微分方程发展的早期，由一些前辈数学家发现、创造，并总结出一些寻求这种解的表达式的行之有效的方法与技巧，它们非常实用，对初学者是一种很好的基本训练.

17 世纪末到 18 世纪中，伟大的数学家牛顿、莱布尼兹、欧拉和伯努里兄弟等.

本章主要讲述 6 种方法：(1)分离变量法(直接积分法)；(2)变量代换法；(3)常数变易法；(4)凑全微分法；(5)积分因子法；(6)引入参数法. 这 6 种方法常常是互通的，要掌握每一种方法的精髓，又要融会贯通. 对一个具体的微分方程，选准恰当的解法，能达到更为便捷、不易出错之效.

2.1　分离变量法与变量代换法

2.1.1　分离变量法

一阶微分方程的显式形式是

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{2-1}$$

导数已解出形式.

和

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{2-2}$$

对称形式.

分离变量法主要是用于解显式形式中变量可分离的方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$$

和

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0.$$

例如：

$\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$,

$x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0.$

1. 方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y). \tag{2-3}$$

我们以$\frac{dx}{\varphi(y)}$乘等式两端，得到

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx.$$

要求 $\varphi(y)\neq 0$.

这样，变量 x 与 y 分离了. 两端取不定积分，得

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+C,$$

由于通常化为求不定积分的过程非常简单，所以此法也称“直接积分法”.

C 是任意常数. 这个式子已经不含导数$\frac{dy}{dx}$或微分 dx, dy 了，它具有形式

$$\varphi(x,y)=C,$$

称为方程(2－3)的通积分. 若还能从中解出

$$y=\Psi(x,C),$$

则称为方程(2-3)的通解.

这里还得补充:若存在某个 y_0 使 $\varphi(y_0)=0$ 时,从式(2-3)知,$y=y_0$ 也是方程的解,它在乘因子$\frac{1}{\varphi(y)}$时被丢失了,应补入通解或通积分表达式中.

例 1　求$\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$ 的通解及满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

解　将变量分离得到

$$\frac{dy}{y^2}=\cos x dx.$$

注意:$y\neq 0$. 而 $y=0$ 要单独验算它是否是解,是否会被遗漏.

两边积分,得

$$-\frac{1}{y}=\sin x+C.$$

由此得方程的通解为

$$y=-\frac{1}{\sin x+C}.$$

可代入方程验算:对任何常数 C,它都满足方程.

经单独验算 $y=0$ 也是解,它不含在上面的通解中,因此,方程的解为

$$y=-\frac{1}{\sin x+C}\text{和 } y=0.$$

再代入初始条件,得

$$1=-\frac{1}{C},\text{即 } C=-1,$$

故所求特解为

$$y=\frac{1}{1-\sin x}.$$

例 2　求解$\frac{dy}{dx}=p(x)y$.

解　分离变量,得

$$\frac{dy}{y}=p(x)dx.$$

这相当于等式两端乘因子$\frac{1}{y}$,要求 $y\neq 0$. 而 $y=0$ 满足方程,是解. 要像上例中一样,检查它是否包含在通解表达式中.

等式两边积分,有

$$\ln|y|=\int p(x)dx+\tilde{C}.$$

$|y|=e^{\tilde{C}}\cdot e^{\int P(x)dx}$,

$y=\pm e^{\tilde{C}}\cdot e^{\int P(x)dx}$.

整理得

$$y=Ce^{\int p(x)dx},$$

其中 C 是任意非零常数. 另外,经检查,$y=0$ 也是方程的解. 而只要我们允许上式中的 C 可取零值,则 $y=0$ 就可被包含在上式中(它对应 $C=0$ 的解),因此方程的通解表达式为

$$y=Ce^{\int p(x)dx},\quad C\text{ 为任意常数}.$$

例 3　求解 1.1 中例 4 的传染病模型

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=rx(N-x),\\ x(0)=x_0,\end{cases}$$

并对结果作一定的分析.

解　容易验证 $x=0$ 和 $x=N$ 均为方程的解. 分离变量,得