

结构力学求解中

之

若干谋略

王前信 著

地震出版社

0342/63

2007

结构力学求解中之若干谋略

王前信 著

地震出版社

序

2004年著者出版《结构力学非常解法》一书,钱令希老师为之作序。序中有这样两段字句:

“传统的结构力学教材,大同小异,有一定之轨,教材内容可以越来越多,但都是为寻常应试教育服务的;而对改革、开放、创新服务少,给学有余力者独立思考的空间更少”。

“后来有了电子计算机,结构力学确实从计算困难中走了出来。但是依靠现成的程序软件,学生独立思考的空间却更少了;同时,应对千变万化的实际所需要的基本理论和概念可能也模糊了”。

为使那一部分“学有余力者独立思考的空间”更多一些,为使那一部分“可能模糊了的基本理论和概念”清晰一些,著者奋力撰写《结构力学求解中之若干谋略》这本书,希望它能成为著者与结构力学同行们互相切磋有用的交流工具。

著者未随大流,持续思考一些几乎濒临边缘化的理论和概念,归结出结构力学求解中之谋略几种,以下试就一部分有代表性的要点作些简短说明。

①为了一揽子求解出桁架所有结点的变位,推演并整理出正则方程(组),其典型如十分简单的几何关系式(1.1.7)所表(平面问题),这样就方便地将结构力学问题转化为解析几何问题。②利用互等性,实现了力学概念不同的图形(变形图、弯矩图与影响线)转换,从弯矩图转换到影响线的推演过程中引伸出影响荷载这一人们尚不熟知的概念;注意影响荷载的确定与跨度无关。③连锁计算在结构力学求解中常见,比如桁架杆件内力的连锁计算十分粗浅,易于操作;但这里所表述的却是桁架结点变位的连锁计算,

这也是人们尚不熟知的。④人们中的一部分是不是不自觉地有一种朦胧成见？似以为所谓结构力学问题就限定是在给定的荷载或强加的变形条件下求解结构的内力和变形分布；事实上，结构力学问题的提出方式是多种多样的，这本书中的例举也仅是少许几种几样，人们必须用多种多样的变通方法应对用多种多样不同方式提出的结构力学问题。⑤桁架结点的力平衡关系十分简单，为人们所熟知，但桁架杆件的几何相容关系的探究则很少；这里展现一种杆件几何相容关系（平面问题）的六边形图形表示，期盼这种图形表示的内容今后会有进一步的扩展。

对应于上述五种谋略，全书编排为五章，内容都是著者研习结构力学的心得集成。书中的理论阐述、公式推演、示例计算和图件绘制工作繁多，恐难免出现疏漏、甚至谬误。热诚欢迎读者们不吝指正。

目 录

绪 论	(1)
第一章 结构力学问题转化为解析几何问题	(5)
第一节 杆链小变形几何关系式系列推演	(5)
第二节 求解桁架结点位移的虚功法的局限性	(12)
第三节 逐个结点位移连锁计算确定桁架变形 曲(折)线	(17)
第四节 几点讨论	(29)
第五节 结点位移曲(折)线演变为杆件内力影 响线	(36)
第二章 借变位互等性暨“弯矩互等性”实现图形转换	(53)
第一节 利用变位互等性简便确定梁(板)变位 影响线(面)	(53)
第二节 利用简支梁“弯矩互等性”简便确定简支 桁架内力影响线	(56)
第三节 带垫梁支座的铰结连续梁的结构力学 奇异特性	(61)
第三章 多种不同场合下使用连锁求解	(70)
第一节 支座连锁求解	(70)
第二节 桁架结点(joints)连锁求解	(74)
第三节 离散结点(nodes)连锁求解	(83)
第四节 时步连锁求解	(89)

第四章 用变通方法应对多种不同的非常问题 (97)

- 第一节 弦杆挠曲刚度对桁架内力分析的影响
浅议 (97)
- 第二节 各阶自频对应相等的两结构的各阶振型
未必相同 (100)
- 第三节 确定解不能求得情况下改求极值解 (105)
- 第四节 地震反应条件极值的搜寻简例 (116)
- 第五节 一个应作为绝对刚性结构计算地震力
的小例 (120)
- 第六节 振动台上“无限长”输电塔-电缆体系的
合理试验布置 (121)

第五章 简练的绘图求解和明晰的图形表示 (125)

- 第一节 用于桁架分析的力多边形图群拼接展趣 (125)
- 第二节 桁架杆件变形的六边形相容关系图示 (134)
- 第三节 摩尔圆引伸用于图解变形主轴方向 (140)
- 第四节 用诺谟图绘制位移、速度、加速度三联
反应谱 (144)

主要符号表 (147)

附录 本书著者出版的专著目录 (155)

后 记 (156)

绪 论

如所周知,结构力学求解为工程设计提供重要数值依据。但不应忽视,结构力学求解也为研习者奉献丰盛的高雅乐趣。

为了求解现有方法不能求解的结构力学问题,为了弥补现有方法的缺陷,为了改进现有方法的功效,为了开阔结构力学的新思路,为了引发对结构力学的研习兴趣,提出了一些非常的方法,故而显著延展了结构力学的篇章。不同的方法各自构思不同,都可以指望从中获取教益和感受乐趣。

结构力学的教程和流行专著中,桁架变形曲(折)线的计算似为一空缺之点,应做一些增补研究。取平面静定桁架中的任一杆件作分析,杆因受力、施工不精细或温度变化引起的伸长(或缩短)给定,两端结点的水平和竖向位移未知,这伸长和结点位移由一个几何方程限定[第一章第一节,式(1.1.7)]。对于每一杆件可列出这样一个方程,对于全部桁架所有的杆件则可列出一组联立的方程。方程的数目与扣除支座处为0的结点位移后的总结点位移数目必定相等。这组方程的解答可借现有常用电算程序或传统求解方法得到(第一章第四节),根据计算结果便勾绘出桁架的变形曲(折)线。

根据各杆件的伸长确定桁架的变形曲(折)线,求解联立方程并不是唯一的选择途径。根据式(1.1.7),将杆件的末端位移表为始端位移,导得连锁公式,简单情形取一个待定变量,复杂些的情形取两个待定变量,基于桁架一端支座的边界条件逐杆做连锁计算,最后计入另一端的边界条件即可解得待定变量,于是全部结点位移相继得解(第一章第三节)。

无论是上述的联立解法还是连锁解法,皆如年届九旬的权威学者钱令希教授早年所指出:“……根本为(解析)几何学之问题”。

将联立解法或连锁解法与基于几何可能位移原理的机构法的思路相结合,可以求得桁架(特别是再分节间桁架、拱式桁架……复杂桁架)的杆件内力影响线(第一章第五节)。

桁架结构力学问题转化为解析几何问题,这是耐人寻味的。

结构力学中的变位互等定理是众多研习者十分熟悉的。利用此变位互等性,梁(板)上某点的位移影响线(面)可用单位力作用于该点时梁(板)的位移曲线(面)所替代(第二章第一节)。这样一来,确定位移影响线(面)的计算工作就大为简化了,促成简化的关键是位移变量的两个注标(某点位置和单位力作用位置)可以互易。这样就实现了图形转换。

简支梁和静定连续梁(带垫梁支座的铰结连续梁)都具有“弯矩互等性”,此特性一般结构力学研习者也许未必十分熟悉。所谓弯矩互等性,即是“在梁上此点作用一集中力时彼点处产生的弯矩必定等于在彼点作用一同样大小的集中力时此点处产生的弯矩”。有似于以上变位互等性的利用,梁上某点的弯矩影响线可以用单位集中力作用于该点时梁的弯矩图所替代。进一步,考虑到简支桁架和静定连续梁式桁架的杆件内力影响线是由车行道上几个结点的弯矩影响线线性组合而成,故若将与这些线性系数同样大小的无量纲集中力作用于相应结点,梁的弯矩图就等同于桁架杆件的内力影响线(第二章第二、三节)。在这里,结构力学概念迭次演变更易,实现了另一种图形转换。

互等性促成了图形转换,转换简化了求解计算(第二章)。

根据杆件伸长确定桁架变形曲(折)线,前述的连锁解法是自一端支座逐个结点向另一端支座做计算,带有待定变量,步骤规则化,计算仍稍赘繁。对于某些类型的桁架,连锁计算取适当的迂回途径,不带有待定变量,不解方程,仅有数值计算(第三章第二节),简单许多。

除上述桁架结点(joints)连锁计算外,结构力学求解中还有多种连锁计算,各具特色。为求解多跨静定连续梁的反力,采取支座

连锁计算(第三章第一节),为求解水库中坝面上的动水压力影响矩阵,在离散的动水压力场中采取结点(nodes)连锁计算(第三章第三节);根据地震加速度记录求解位移、速度和加速度反应谱的数值结果,导出了时步三连锁计算公式(第三章第四节)。

连锁求解显著节省计算工作量,应尽量在多种不同场合使用(第三章)。

结构力学这门学科在工程应用、理论探索、求解技巧和试验策划等多方面显现出许多颇富兴趣的非常问题:

- 工程实际中的桁架结点并非铰结,内力分析时却按铰结假定进行,计算结果与实际状态的出入怎样?(第四章第一节)

- 两座建筑物的自振频率一一对应相等,但振型却彼此不一样,这情况在实际中是可能的吗?(第四章第二节)

- 工程实际中,早年建成的竖直伸臂建筑的质量分布不难点清查明,基本自振周期(以及相应的设计反应谱值)的测算一般不致有不可接受的误差,但刚度分布不明,地震反应的确定解不可得。为进行抗震验算,如何对于不同内力、不同截面寻求极端刚度分布下的极值解?各种不同极端刚度分布下的“虚拟模型”的基本自振周期都可能是相同的吗?与测算的基本自振周期能相一致吗?(第四章第三节)

- 建筑框架的部分构件刚度分布不明,对于不同的构件,与地震反应极值解相应的验算模型应不相同。这时,求得的极值是有条件的,如何取一简例试作搜寻?(第四章第四节)

- 工程实际中并无绝对刚性结构,计算地震力的静力法有用武之地吗?(第四章第五节)

- 无限长的结构体系的振动试验在有限大小的振动台上如何实现?(第四章第六节)

这些不同的非常问题须用不同的变通方法应对(第四章)。

在某些情况下,结构力学问题用绘图方法求解比较简单和快捷。在某些情况下,结构力学问题的解答用图形展示,清晰且直观

(第五章)。

桁架内力分析常用力多边形(三角形)图解法,如将这些多边形作简练清新、紧凑醒目、条理分明的拼接,便显示出较丰富的表现力(第五章第一节)。

再次取桁架中的任一根杆件做分析,两端各有水平和竖向位移,杆件本身既有伸长(或缩短),又有(轴线)转动。探究结果表明,这六个几何变量的关系可用一组(两个)相容方程限定(第五章第二节)。值得注意的是,这简练的相容关系可以绘成为一个六边形来表示,每一边相应于一个几何变量。杆件的变形状态各有不同,这相容六边形就展现各式各样的奇异图形。

在材料力学—弹性力学中,摩尔圆用来图解平面中某一点主应力的大小和方向。借用摩尔圆,可以图解确定单层建筑楼面变形主轴方向(第五章第三节)。

诺谟图的应用在上世纪中期曾风行一时,如今则似有些被淡忘。第五章第四节中展现一个为抗震分析所用的诺谟图,可同时读取位移、速度、加速度三种反应谱。

总之,结构力学求解谋略多多,不胜枚举,以上所提及的仅为著者的部分切身感受。

第一章 结构力学问题转化为解析几何问题

第一节 杆链小变形几何关系式系列推演

建筑结构、桥梁结构以及某些他种结构常由为数很多的杆件作为主体所组成,相邻杆件的端部互相联结,形成杆链。结构受载时,或在温度变化、施工不精条件下,会产生小变形(或尺寸偏差),求解结构力学问题常须考虑杆链小变形几何关系。现就平面问题情形做系列推演。

图 1.1.1 中杆链 $0-1-2-(i-1)-i-(i+1)-(n-1)-n$ 为平面斜交杆系某一支示意。结点 i 的横坐标和纵坐标分别为 x_i 和 z_i , 水平向和竖向位移分别为 u_i 和 w_i , 正、负符号规则示于同一图中; i 为序号, n 为杆段数目。

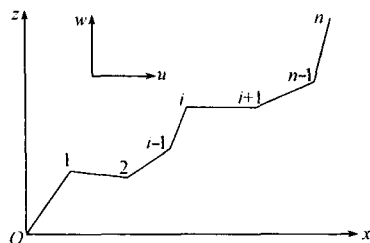


图 1.1.1 杆链 $0-1-2-(i-1)-i-(i+1)-(n-1)-n$ 示意

$(i-1)-i$ 杆段轴线的转动(角位移)为 $\zeta_{i-1,i}$, 顺时针方向为正; 轴向应变为 $\epsilon_{i-1,i}$, 收缩为正。在小变形假定下, 对于杆段 $(i-1)-i$, 有如下几何关系:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_{i-1} + \zeta_{i-1,i}(z_i - z_{i-1}) - \epsilon_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) \\ w_i &= w_{i-1} - \zeta_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) - \epsilon_{i-1,i}(z_i - z_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

自式(1.1.1)分别消去 ϵ 和 ζ , 可得

$$\zeta_{i-1,i} = \frac{(z_i - z_{i-1})(u_i - u_{i-1}) - (x_i - x_{i-1})(w_i - w_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} \quad (1.1.2)$$

和

$$\epsilon_{i-1,i} = -\frac{(x_i - x_{i-1})(u_i - u_{i-1}) + (z_i - z_{i-1})(w_i - w_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} \quad (1.1.3)$$

如不计及轴向变形影响, 取 $\epsilon=0$, 则式(1.1.1)简化为

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_{i-1} + \zeta_{i-1,i}(z_i - z_{i-1}) \\ w_i &= w_{i-1} - \zeta_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.4)$$

将式(1.1.4)应用于一系列杆件——杆链, 即得

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_0 + \sum_{i=1}^n \zeta_{i-1,i}(z_i - z_{i-1}) \\ w_n &= w_0 - \sum_{i=1}^n \zeta_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

为计算使用方便, 将式(1.1.3)写成如下形式:

$$(x_i - x_{i-1})(u_i - u_{i-1}) + (z_i - z_{i-1})(w_i - w_{i-1}) = l_{i-1,i}^2 (-\epsilon_{i-1,i}) \quad (1.1.6)$$

进一步改写为

$$\Delta x_{i-1,i}(u_i - u_{i-1}) + \Delta z_{i-1,i}(w_i - w_{i-1}) = l_{i-1,i} e_{i-1,i} \quad (1.1.7)$$

式(1.1.6)和式(1.1.7)中, $l_{i-1,i}$ 为杆 $(i-1)-i$ 的长度; $e_{i-1,i}$ 为杆 $(i-1)-i$ 的伸长,

$$e_{i-1,i} = l_{i-1,i} \cdot (-\epsilon_{i-1,i}) = -l_{i-1,i} \epsilon_{i-1,i} \quad (1.1.8)$$

$\Delta x_{i-1,i}$ 和 $\Delta z_{i-1,i}$ 分别表示结点 i 与结点 $i-1$ 的横坐标之差和纵坐标之差, 应注意它们并不是小量。

若杆件位置为水平, $\Delta z_{i-1,i} = 0$, 则式(1.1.7)简化为

$$\Delta x_{i-1,i}(u_i - u_{i-1}) = l_{i-1,i} e_{i-1,i} \quad (1.1.9)$$

若杆件位置为竖直, $\Delta x_{i-1,i} = 0$, 则式(1.1.7)简化为

$$\Delta z_{i-1,i}(w_i - w_{i-1}) = l_{i-1,i} e_{i-1,i} \quad (1.1.10)$$

利用式(1.1.7), 根据实际问题中给定的杆件伸长 $e_{i-1,i}$, 可以确定杆端位移 u_{i-1}, w_{i-1}, u_i 和 w_i 之间的关系。

对于图 1.1.2 中的一根杆件, 当杆长 l_{12} 、伸长 e_{12} 和始端位移 u_1, w_1 给定时, 根据式(1.1.7), 可以写出末端水平位移 u_2 和竖向位移 w_2 之间的关系式:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{-\Delta z_{12} w_2 + (\Delta x_{12} u_1 + \Delta z_{12} w_1 + l_{12} e_{12})}{\Delta x_{12}} \\ w_2 &= \frac{-\Delta x_{12} u_2 + (\Delta z_{12} w_1 + \Delta x_{12} u_1 + l_{12} e_{12})}{\Delta z_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

或

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -\frac{\Delta z_{12}}{\Delta x_{12}} w_2 + \left(u_1 + \frac{\Delta z_{12}}{\Delta x_{12}} w_1 + \frac{l_{12} e_{12}}{\Delta x_{12}} \right) \\ w_2 &= -\frac{\Delta x_{12}}{\Delta z_{12}} u_2 + \left(w_1 + \frac{\Delta x_{12}}{\Delta z_{12}} u_1 + \frac{l_{12} e_{12}}{\Delta z_{12}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.12)$$

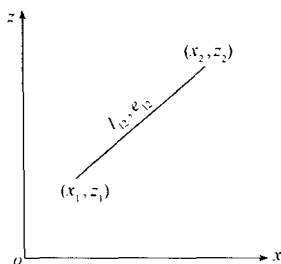


图 1.1.2 一根杆件情形的
始端—末端位移关系

对于图 1.1.3 中末端相连的两根杆件, 当杆长 l_{13} 和 l_{23} , 伸长 e_{13} 和 e_{23} , 始端位移 u_1, w_1, u_2, w_2 给定时, 根据式(1.1.7), 可以写出联立方程:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{13} u_3 + \Delta z_{13} w_3 &= \Delta x_{13} u_1 + \Delta z_{13} w_1 + l_{13} e_{13} \\ \Delta x_{23} u_3 + \Delta z_{23} w_3 &= \Delta x_{23} u_2 + \Delta z_{23} w_2 + l_{23} e_{23} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.13)$$

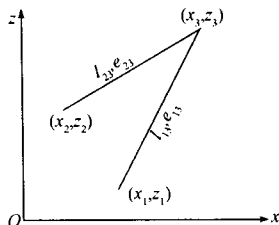


图 1.1.3 两根杆件交汇情形的
始端—末端(交点)位移关系

自式(1.1.13)解得末端位移:

$$u_3 = \frac{\Delta z_{23} (\Delta x_{13} u_1 + \Delta z_{13} w_1 + l_{13} e_{13}) - \Delta z_{13} (\Delta x_{23} u_2 + \Delta z_{23} w_2 + l_{23} e_{23})}{\Delta z_{23} \Delta x_{13} - \Delta z_{13} \Delta x_{23}} \quad (1.1.14)$$

和

$$w_3 = \frac{\Delta x_{23} (\Delta x_{13} u_1 + \Delta z_{13} w_1 + l_{13} e_{13}) - \Delta x_{13} (\Delta x_{23} u_2 + \Delta z_{23} w_2 + l_{23} e_{23})}{\Delta x_{23} \Delta z_{13} - \Delta x_{13} \Delta z_{23}} \quad (1.1.15)$$

式(1.1.14)和式(1.1.15)也可表为简练形式:

$$u_3 = \frac{\Delta z_{23} \phi_1 - \Delta z_{13} \phi_2}{\Delta z_{23} \Delta x_{13} - \Delta z_{13} \Delta x_{23}} \quad (1.1.16)$$

和

$$w_3 = \frac{\Delta x_{23} \phi_1 - \Delta x_{13} \phi_2}{\Delta x_{23} \Delta z_{13} - \Delta x_{13} \Delta z_{23}} \quad (1.1.17)$$

式中,

$$\phi_1 = \Delta x_{13} u_1 + \Delta z_{13} w_1 + l_{13} e_{13} \quad (1.1.18)$$

和

$$\phi_2 = \Delta x_{23} u_2 + \Delta z_{23} w_2 + l_{23} e_{23} \quad (1.1.19)$$

ϕ_1 和 ϕ_2 分别是与序号 1 和 2 有关的长度与相应的小变形的乘积之和。

在一些特殊情形,式(1.1.16)至式(1.1.19)可更简练。

若 1—3 杆水平放置, $\Delta z_{13}=0$ (图 1.1.4), 则有

$$\phi_1 = \Delta x_{13} u_1 + l_{13} e_{13} \quad (1.1.20a)$$

$$\phi_2 = \Delta x_{23} u_2 + \Delta z_{23} w_2 + l_{23} e_{23} \quad (1.1.20b)$$

$$u_3 = \frac{\phi_1}{\Delta x_{13}} \quad (1.1.20c)$$

$$w_3 = \frac{-\Delta x_{23} \phi_1 + \Delta x_{13} \phi_2}{\Delta x_{13} \Delta z_{23}} \quad (1.1.20d)$$

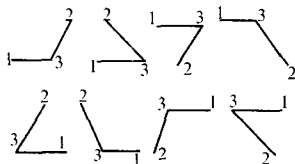


图 1.1.4 1—3 杆水平放置情形

若 1—3 杆竖直放置, $\Delta x_{13}=0$ (图 1.1.5) 则有

$$\phi_1 = \Delta z_{13} w_1 + l_{13} e_{13} \quad (1.1.21a)$$

$$\phi_2 = \Delta x_{23} u_2 + \Delta z_{23} w_2 + l_{23} e_{23} \quad (1.1.21b)$$

$$u_3 = \frac{-\Delta z_{23} \phi_1 + \Delta z_{13} \phi_2}{\Delta z_{13} \Delta x_{23}} \quad (1.1.21c)$$

$$w_3 = \frac{\phi_1}{\Delta z_{13}} \quad (1.1.21d)$$

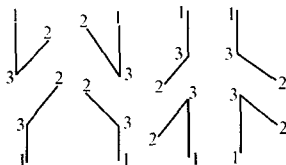


图 1.1.5 1—3 杆竖直放置情形

若 2—3 杆水平放置, $\Delta z_{23}=0$ (图 1.1.6), 则有

$$\phi_1 = \Delta x_{13} u_1 + z_{13} w_1 + l_{13} e_{13} \quad (1.1.22a)$$

$$\phi_2 = \Delta x_{23} u_2 + l_{23} e_{23} \quad (1.1.22b)$$

$$u_3 = \frac{\phi_2}{\Delta x_{23}} \quad (1.1.22c)$$

$$w_3 = \frac{\Delta x_{23} \phi_1 - \Delta x_{13} \phi_2}{\Delta x_{23} \Delta z_{13}} \quad (1.1.22d)$$

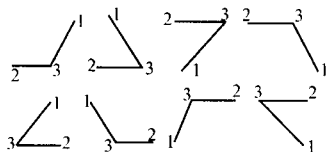


图 1.1.6 2—3 杆水平放置情形

若 2—3 杆竖直放置, $\Delta x_{23}=0$ (图 1.1.7), 则有

$$\phi_1 = \Delta x_{13} u_1 + \Delta z_{13} w_1 + l_{13} e_{13} \quad (1.1.23a)$$

$$\phi_2 = \Delta z_{23} w_2 + l_{23} e_{23} \quad (1.1.23b)$$

$$u_3 = \frac{\Delta z_{23} \phi_1 - \Delta z_{13} \phi_2}{\Delta z_{23} \Delta x_{13}} \quad (1.1.23c)$$

$$w_3 = \frac{\phi_2}{\Delta z_{23}} \quad (1.1.23d)$$

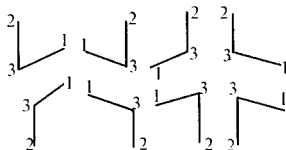


图 1.1.7 2—3 杆竖直放置情形

还有更加特殊的情形。若 1—3 杆水平放置 ($\Delta z_{13}=0$), 2—3 杆竖直放置 ($\Delta x_{23}=0$), 参见图 1.1.8, 有

$$\phi_1 = \Delta x_{13} u_1 + l_{13} e_{13} \quad (1.1.24a)$$

$$\phi_2 = \Delta z_{23} w_2 + l_{23} e_{23} \quad (1.1.24b)$$

$$u_3 = \frac{\phi_1}{\Delta x_{13}} \quad (1.1.24c)$$

$$w_3 = \frac{\phi_2}{\Delta z_{23}} \quad (1.1.24d)$$

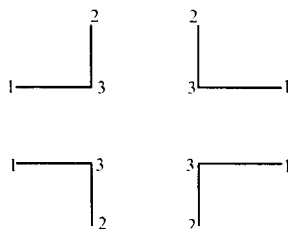


图 1.1.8 1—3 杆水平放置、
2—3 杆竖直放置情形

若 1—3 杆竖直放置($\Delta x_{13}=0$), 2—3 杆水平放置($\Delta z_{23}=0$), 参见图 1.1.9, 有

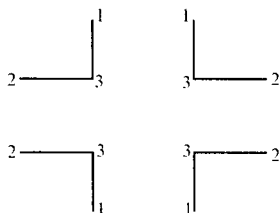


图 1.1.9 1—3 杆竖直放置、
2—3 杆水平放置情形

$$\phi_1 = \Delta z_{13} w_1 + l_{13} e_{13} \quad (1.1.25a)$$

$$\phi_2 = \Delta x_{23} u_2 + l_{23} e_{23} \quad (1.1.25b)$$

$$u_3 = \frac{\phi_2}{\Delta x_{23}} \quad (1.1.25c)$$