卫生部"十一五"规划教材　全国高等医药教材建设研究会规划教材

全国高等学校配套教材 • 供药学类专业用

高等数学
学习指导与习题集

主　编　顾作林

副主编　闫心丽　方　影

人民卫生出版社

卫生部“十一五”规划教材
全国高等医药教材建设研究会规划教材
全国高等学校配套教材
供药学类专业用

高等数学
学习指导与习题集

主　编　顾作林

副主编　闫心丽　方　影

编　者（以姓氏笔画为序）
方　影（第二军医大学）
王敏彦（河北医科大学）
邓　英（四川大学数学学院）
吕　同（山东大学数学与系统科学学院）
闫心丽（沈阳药科大学）
张福良（大连医科大学）
赵淑健（河北医科大学附属第三医院）
顾作林（河北医科大学）
黄榕波（广东药学院）

人民卫生出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题集/顾作林主编. —北京:人民卫生出版社,2007.7

ISBN 978-7-117-08849-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 顾… Ⅲ. 高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 090904 号

高等数学学习指导与习题集

主　　编: 顾作林
出版发行: 人民卫生出版社(中继线 010-67616688)
地　　址: 北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
邮　　编: 100078
网　　址: http://www.pmph.com
E - mail: pmph@pmph.com
购书热线: 010-67605754　010-65264830
印　　刷: 北京市安泰印刷厂
经　　销: 新华书店
开　　本: 787×1092　1/16　　印张: 14
字　　数: 320 千字
版　　次: 2007 年 7 月第 1 版　2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号: ISBN 978-7-117-08849-7/R·8850
定　　价: 20.00 元

前　言

在学习该课时,同学们提的最多的两个问题是:1. 作为医药学专业的学生,学习高等数学究竟有什么用途? 2. 高等数学学起来很难,如何学好这门课程?

我们所学的各门课程是适应自身专业需要的一个课程体系,是一个系统工程。在这个系统工程中,高等数学是最基础的课程之一。由于各学科间的相互渗透和联系越来越密切,使得高等数学不仅教给学生思考和解决实际问题的科学方法和必要技能,也为后继课程的学习提供知识和方法论的支撑。这主要体现在数理统计方法课程的学习,需要完备的高等数学理论作支持。好比一条连接完好的封闭链条,不允许出现断点一样,高等数学的学习是最基础的一个环节。

之所以有的同学说高等数学学起来很难,是因为它内容丰富,系统性强,且需要较扎实的中学数学知识储备。在相对较短的时间内,学习如此众多的数学模型并掌握它们的应用,确非易事。但高等数学的内容结构合理,联系密切。抓住它的特点,不断地总结各章内容的知识体系结构以及它们之间的联系,并适当地做些练习,积累下来,就会发现高等数学如同蕴含无数宝藏的大海,我们常常惊叹于发现一颗颗美丽的贝壳,进而激发进一步探究它的欲望。

为了帮助广大读者学好这门课程,由参加教材编写的各位老师,总结自己多年的教学实践经验,编写了这本与全国高等学校药学专业规划教材《高等数学》第4版配套的指导书。

本书的特色是将各章内容的知识体系结构以图解的形式展现,使读者从整体上更清晰地了解各章内容及其它们之间的联系,突出各章内容的重点和难点。把各章内容的主要知识点总结、汇集起来,形成内容概要。通过丰富的例题分析,建立完善的解题方法和技巧体系。并提供大量的复习思考题,巩固、提高读者的解题技能。

在本书的编写过程中,参考了国内外大量有关书籍,我们对这些书籍的作者表示感谢,同时也感谢编写组成员所在各医药院校有关领导和老师的悉心关怀和大力支持。

由于作者水平有限,书中难免有错误或考虑不周之处。恳请读者多提宝贵意见。

顾作林

2007年5月于石家庄

目　录

第一章 函数与极限

函数、极限、连续是高等数学的基本概念。函数是高等数学研究的主要对象,极限是研究函数变化趋势的重要方法。

本章内容的知识体系结构图解如下:

第一章 函数与极限

- 一、基本概念
  - 1. 函数(***)
  - 2. 复合函数(***)
  - 3. 反函数(**)
  - 4. 初等函数(*****)——高等数学的主要研究对象
  - 5. 极限(*****)
  - 6. 无穷小(大)(****)
  - 7. 连续(****)
  - 8. 间断点(***)

本章难点

- 二、极限
  - 1. 极限的定义(***)
  - 2. 无穷小(大)
    - (1) 无穷小(大)的定义(**)
    - (2) 无穷小定理(***)
    - (3) 无穷小与无穷大的关系(**)
    - (4) 无穷小的比较
      - ① 高阶无穷小(**)
      - ② 同阶无穷小(**)
      - ③ 等价无穷小(***)
  - 3. 求极限的方法
    - (1) 按定义求(***)
    - (2) 极限的四则运算(****)
    - (3) 用无穷小的结论求(****)
    - (4) 用函数的连续性求(***)
    - (5) 利用两个重要极限(*****)

本章重点

- 三、函数
  - 1. 函数
    - (1) 函数(***)
    - (2) 复合函数(****)
    - (3) 反函数(**)
    - (4) 初等函数(****)
  - 2. 函数的连续性
    - (1) 连续的定义(****)
    - (2) 间断(**)
    - (3) 初等函数的连续性(***)
    - (4) 闭区间上连续函数的性质
      - ① 最值定理(***)
      - ② 有界性定理(***)
      - ③ 介值定理(****)

注:“ * ”号表示内容的重要程度。

一、教学要求

1. 正确理解函数、反函数、复合函数及初等函数的概念。
2. 掌握函数的简单性质及复合函数的复合过程。
3. 正确理解极限、无穷小及无穷大概念,掌握无穷小性质,了解无穷小的比较。
4. 熟练应用极限的四则运算法则及两个重要极限求极限,了解极限存在准则。
5. 理解函数连续性的定义,掌握闭区间上连续函数的性质,了解函数的间断点及其分类。

二、重点及难点

重点:

1. 函数、复合函数的概念。
2. 极限的概念及极限求法。
3. 判断函数的连续性。

难点:极限的定义。

三、内容概要

(一) 函数

1. 函数的概念。

定义 1-1 如果对于数集 D 中的每一个元素 x,按照某一对应法则 f,都有唯一确定的数值 y 与之对应,则称 f 是在 D 上的一个函数,记作:

$$y=f(x),x\in D$$

集合 D 称为函数的定义域,集合:$V=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域。

在理解函数定义时要注意以下几点:

(1) 定义域和对应法则 f 是确定函数的两个基本要素,缺一不可。因此,两函数相等是指它们的定义域、对应法则分别相同。

例如 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$。显然,$f(x)$ 与 $g(x)$ 对应法则相同,但定义域不同,前者定义域是 $(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$,后者定义域是 $[2,+\infty)$,故,$f(x)\neq g(x)$。

(2) 若对于每一个 $x\in D$,有唯一确定的数值 y 与之对应,则称 f 是 D 上的单值函数,否则称为多值函数。

如 $y=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的单值函数,而由方程 $x^2+y^2=a^2$ 所确定的函数

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

是 $[-a,a]$ 上的多值函数。

2. 函数表示法 解析法、列表法、图像法。

3. 定义域求法

(1) 当函数用解析式表示时,定义域就是使这个式子有意义的自变量值的全体构成的集合。

(2) 在实际问题中,定义域应由实际问题的意义来确定。

例如,在图 1-1 所示的直角三角形中,$y=\sqrt{4^2-x^2}$,此函数的定义域应满足:

$$\begin{cases} 4^2-x^2\geqslant 0 \\ \sqrt{4^2-x^2}>0 \\ x>0 \end{cases}$$

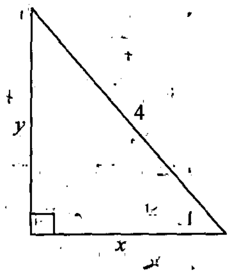

图 1-1

解得$\begin{cases}|x|<4 \\ x>0\end{cases}$。故函数的定义域为$(0,4)$

4. 函数的特性　单值性和多值性、有界性、单调性、奇偶性、周期性。

(二) 复合函数与反函数

1. 复合函数　函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数为 $y=f[\varphi(x)]$。

理解此概念时应注意以下几点:

(1) 不是任何两个函数都能复合成一个复合函数,只有当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$的定义域的交集非空时才能构成复合函数。

例如 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{2+x^2}$就不能进行复合,因为函数 $u=\sqrt{2+x^2}$ 的值域为$[2,+\infty)$,而 $y=\arccos u$ 的定义域为$[-1,1]$,显然,$[2,+\infty)\cap[-1,1]=\varphi$,故不能构成复合函数。

(2) 形成复合函数的中间变量可以不只一个,即复合函数可由多个函数构成。

例如 $y=\arctan u$,$u=\sin v$,$v=x^2+1$。由以上三个函数构成一个复合函数:

$$y=\arctan[\sin(x^2+1)]$$

中间变量为 u、v。

(3) 分解复合函数的方法:对给定的复合函数,可以由外及里一层层顺序拆开,使拆开后的每个函数都是基本初等函数或由基本初等函数及常数经四则运算所构成的简单函数。

例　指出下列函数由哪些函数复合而成?

(1) $y=\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}$　　(2) $y=\arcsin(1-x)^3$

解:由复合函数分解方法知:

(1) $y=u^{\frac{2}{3}}$,$u=\frac{1+x}{1-x}$

(2) $y=\arcsin u$,$u=v^3$,$v=1-x$

2. 反函数　理解该定义时应注意:

(1) 反函数是指:从 $y=f(x)$ 中解出的函数 $x=\varphi(y)$,人为的写成 $y=\varphi(x)$,常用 $y=f^{-1}(x)$表示,即$f^{-1}=\varphi$。

(2) f的定义域、值域分别为f^{-1}的值域、定义域。

(3) 在同一坐标系中,$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称,而$y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$的图形是同一图形。

3. 初等函数　常数及基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而构

成的，可用一个解析式表示的函数，称为初等函数。

4. 分段函数　在定义域的不同范围内函数的解析式不相同，即不能用一个解析式表示的函数，称为分段函数。

显然，分段函数是非初等函数。

（三）函数极限的概念

1. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限。

定义 1-2　设有函数 $f(x)$，若对于预先任意给定的无论多么小的正数 ε，总存在正数 N，使得对 $|x|>N$ 时的一切 x，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to\infty)$$

特别地，当 x 取自然数 n 趋近于 $+\infty$ 时便得数列极限。

注意：定义中的 ε 刻划 $f(x)$ 与 A 的无限接近程度。N 刻划 $|x|$ 充分大的程度，N 是随 ε 而确定的，是 ε 的函数，但不是单值函数。

2. $x\to x_0$ 时函数的极限。

定义 1-3　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义（x_0 可除外），若对于预先任意给定的无论多么小的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立（A 为常数），则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

这里 ε 和 δ 是分别刻划 $f(x)$ 与 A，x 与 x_0 之间接近程度的。

理解该定义时注意以下几点：

（1）定义中 $|x-x_0|>0$，必有 $x\neq x_0$，即不考虑 x_0 点。这是因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 研究的是当自变量 x 在 x_0 点附近无限接近 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，与 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义及取什么值都无关。

（2）当 x 仅从 x_0 的左侧（即 $x<x_0$）无限趋近 x_0 时函数有极限，称为左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 或 $f(x_0-0)$；当 x 仅从 x_0 的右侧（即 $x>x_0$）无限趋近 x_0 时函数有极限，称为右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 或 $f(x_0+0)$。

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$。

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$。

（四）极限的四则运算法则

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$ 都存在（略去 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$），则有

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

（3）$\lim[f(x)/g(x)]=\lim f(x)/\lim g(x)\quad (g(x)\neq0 且 \lim g(x)\neq0)$

运用此法则时注意：

（1）法则的前提条件：$\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，对商的极限更应注意分母及其极限不能为零。

（2）对于法则中的加、乘运算可推广到有限个函数的情形。

（3）对于不满足法则条件的极限需经过适当变换变成满足法则条件时，方可用法则。

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{6x^3+5x^2+7}$

解：因为分子、分母的极限均为“∞”，故不能直接用法则。为此，将分子、分母同除以 x^3 得：

$$\text{原极限}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{6+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}6+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^3}}$$

$$=0$$

一般地，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n} & m=n\\ \infty & m>n\end{cases}$$

（五）无穷小与无穷大

1. **定义 1-4** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时函数 $f(x)$ 为无穷小量，简称无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时函数 $f(x)$ 为无穷大量；简称无穷大。

理解无穷小与无穷大时，应注意：

（1）无穷小与无穷大都是变量，因此，任何一个很小的数，都不是无穷小；任何一个很大的数，也不是无穷大。但常数零是无穷小。

（2）说一个函数是无穷小还是无穷大时，必须指明自变量的变化趋势。

（3）无穷小与无穷大的关系：在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大。

（4）极限与无穷小的关系：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha \quad (\alpha\text{ 为 }x\to x_0\text{ 时的无穷小})。$$

2. 无穷小的性质

（1）有限个无穷小的代数和（或积）仍为无穷小。

（2）有界函数与无穷小之积仍为无穷小。

注意 性质（1）的前提条件“有限个”，否则结论未必成立。

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)\neq\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}$。

实际上，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}$$

显然,无穷多个无穷小之和,未必是无穷小。

(六) 极限存在准则与两个重要极限

1. 极限存在准则。

准则Ⅰ(夹挤定理):若对于点 x_0 某一邻域内的一切 x(x_0 可除外),或绝对值大于某一正数的一切 x,有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

成立,且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 存在,且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$$

准则Ⅱ:单调有界数列必有极限。

2. 重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

运用这两个重要极限时,要注意自变量的变化趋势及形式的一致。

(七) 函数的连续性

1. 定义 函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的连续性定义可用三种等价形式给出:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$。其中 $\Delta x=x-x_0$,$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

注意:函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,要满足以下三个条件:

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

如果 $f(x_0-0)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;如果 $f(x_0+0)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

(八) 函数的间断点

定义:不满足连续的三个条件之一的点,称为函数的间断点。

分类：$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$都存在的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点。

（九）初等函数的连续性

1. 连续函数的代数和、积、商仍是连续函数（商的情形分母不为零）。

2. 复合函数的连续性。

（1）若 $y=f(u)$在$u=u_0$处连续，函数 $u=\varphi(x)$在$x=x_0$处连续且$u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在$x=x_0$处也连续，即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f(u_0)$$

上式表明，求连续函数极限时，极限符号可以和函数符号相交换。

（2）复合函数的极限

若 $y=f(u)$在$u=a$处连续，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$$

3. 一切初等函数在其定义区间内连续。

（十）函数极限的求法

1. 直接利用极限的四则运算法则求极限。

2. 利用恒等变形，例如，消去零因子；分子、分母同除以 x 的最高次幂；无理式的分子、分母有理化等，再求极限。

3. 利用左右极限求分段函数在衔接点处的极限。

4. 利用两个重要极限及极限存在准则求极限。

5. 利用无穷小的性质求极限。

6. 利用函数的连续性求极限。

（十一）闭区间上连续函数的性质

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

1. 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界。

2. 函数$f(x)$在$[a,b]$上一定有最大值和最小值。

3. 若$f(a)=A$，$f(b)=B$，且$A\neq B$，则对于A、B之间的任意实数C，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得：$f(\xi)=C$。

推论：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则至少存在一点$\eta\in(a,b)$，使得$f(\eta)=0$。

四、例题分析

例 1-1 求下列函数的定义域

（1）$f(x)=(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$　（2）$f(x)=\dfrac{2}{x}+3^{\arcsin x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

解：（1）要使$f(x)$有定义，只需：$\dfrac{x+1}{1-x}\geqslant0$，即$\begin{cases}x+1\geqslant0\\1-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1\leqslant0\\1-x<0\end{cases}$，解得$-1\leqslant x<1$，故$f(x)$的定义域为$[-1,1)$。

（2）要使$f(x)$有定义，需要：$\begin{cases} x\neq 0 \\ |x|\leq 1 \\ x-2>0 \end{cases}$

易见，此不等式组无解，故此函数定义域为空集。

例 1-2 （1）设$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，$(x>0)$，求$f(x)$

（2）$f(x)=x^2-x$，$g(x)=2^x$ 求$f[g(x)]$，$g[f(x)]$

解：（1）令$u=\frac{1}{x}$，因为$x>0$，所以$u>0$，$x=\frac{1}{u}$，代入原式得：

$$f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}=\frac{1}{u}+\sqrt{\frac{1+u^2}{u^2}}=\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}$$

于是，$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$，$(x>0)$。

（2）$f[g(x)]=[g(x)]^2-g(x)=(2^x)^2-2^x=4^x-2^x$

同理：$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{(x^2-x)}$。

例 1-3 设$f(x)$是定义在$(-l,l)$内的函数，试证$\varphi(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数，$\psi(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数。

证明 设$x\in(-l,l)$，则$-x\in(-l,l)$。

因为 $\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=\varphi(x)$，

$\psi(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-\psi(x)$

所以，$\varphi(x)$是偶函数，$\psi(x)$是奇函数。

例 1-4 判断下列函数的奇偶性

（1）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ （2）$f(x)=\sin x+\cos x$

分析：判断函数的奇偶性时，先看函数的定义域是否是对称区间，再看$f(-x)$与$f(x)$的关系。

解：（1）函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以，$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数。

（2）因为$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x=-(\sin x-\cos x)$，即$f(-x)\neq f(x)$，且$f(-x)\neq -f(x)$，所以，此函数是非奇非偶函数。

例 1-5 判断函数$f(x)=\sin^2x$是否为周期函数？若是，求其最小正周期T。

解：$f(x)=\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$。因为$\cos 2x$是周期为$\pi$的周期函数，所以，$f(x)=\sin^2x$是周期函数，且$T=\pi$。

例 1-6 试问函数$y=f(u)=\ln u$，$u=\varphi(x)=1-x^2$能否构成复合函数$y=f[\varphi(x)]$？若能构成复合函数，指出其定义域。