线性代数

（同济四版）

学习指导

6

NEUPRESS

东北大学出版社

线性代数学习指导

（同济四版）

主　编　惠淑荣　黄己立　潘东升
副主编　杨中兵　刘　满

东北大学出版社
·沈阳·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导 / 惠淑荣，黄己立，潘东升主编. — 沈阳：东北大学出版社，2007.10
ISBN 978-7-81102-454-8

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①惠…②黄…③潘…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—数学参考资料　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 140932 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph@neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市政二公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：140mm × 203mm
印　　张：8.625
字　　数：224 千字
出版时间：2007 年 10 月第 1 版
印刷时间：2007 年 10 月第 1 次印刷
责任编辑：潘佳宁　刘宗玉　　　责任校对：郝　帅
封面设计：唐敏智　　　责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-454-8　　　定价：15.00 元

前　　言

由高等教育出版社出版、同济大学应用数学系编写的《线性代数》一书，是目前国内公认最好的“线性代数”教材之一，广泛使用于各高等院校. 该书结构严谨、逻辑清晰，并因为在使用过程中的不断修订而使其日臻完善，其中的第四版，是国内用量最多的线性代数教材之一.

为了帮助广大学生学好同济四版《线性代数》，我们编写出这本《线性代数学习指导》. 之所以编写同济四版《线性代数》的“学习指导”，主要考虑的是该书作为国家级优秀教材的权威性以及该书习题编排合理、难易适中，能体现出学习线性代数应达到的水平。《线性代数学习指导》以同济四版《线性代数》为蓝本，给出所有习题的详细解答，适合于使用同济四版《线性代数》的学生们. 对于刚刚跨进大学门槛的大学生，面对概念抽象、运算繁杂的线性代数，往往感到力不从心. 而编写本书的宗旨恰恰是帮助学生熟悉教材、做好习题，在需要的时候助一臂之力，起到课下辅导的作用. 同时，在每章最后，还给出补充练习若干，十分有利于本章的全面复习；在书的最后，给出期末测试题 10 套，意在通过演练找出差距、总结提高，达到提高考试成绩之目的.

本书有下述四方面的特点.

1. 全面. 教材中所有的习题，包括所有带 * 的习题，均有解答. 这主要是考虑到地域、学校之间的差别和学生基础不尽相同，各种问题都可能会遇到，加之学生对做过的习题需全部核对，所以

对所有习题均给出解答，以满足学生的不同需求.

2. 详尽. 这里一方面是指解题过程详尽，使学生对解题过程有一个全面、清晰的了解，以加强对概念的理解和方法的掌握；详尽另一方面是对有些习题给出多种解法.

3. 指导性. 解题过程中特别注意对解题方法的叙述，对一些难题还给出解题思路及提示，并举一反三，意在使学生能理解概念、熟悉路径、掌握方法. 结合作者多年的教学经验，对一些典型题，指出易犯的错误，并剖析原因，避免以后犯类似错误. 还特别介绍了一些方便快捷的解题方法与技巧，并力争给出最简解题方法.

4. "实战演练"作用. 章后的补充练习和书后的期末测试题是我们在总结多年线性代数教学的基础上，针对考生普遍存在的问题精心编写出来的，力求通过演练发现不足并及时调整，最终提高考试成绩.

同时应该指出的是，虽然本书可以说是学习同济四版《线性代数》的工具书，但要合理使用. 我们不赞成学生自己不动脑筋，依赖于本书的解答. 我们的忠告是，所有习题，学生首先应靠自己的力量去做. 习题能独立完成的，做题后再与本书解答对照，并检查解题步骤是否繁复、方法是否最简等问题；对于做不出来的习题，认真思考后再看解答则会有更大的收获.

参加本书编写的还有张金海、王学理等同志. 由于编者水平所限，书中可能存在疏漏与不足，还望同仁及读者不吝赐教. 如果本书能在节省学生们的宝贵时间、提高学习效率等方面有一点作用的话，我们将深感欣慰.

编　者

2007 年 3 月

目　录

第一章　行列式

习题一

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

【解】 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 2\times(-4)\times 3 + 1\times 1\times 8 + 0\times(-1)\times(-1) - 1\times(-4)\times(-1) - 2\times(-1)\times 8 - 3\times 1\times 0$$

$$= -24 + 8 - 4 + 16 = -4.$$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - c^3 - b^3 - a^3$

$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - ac^2 - cb^2$

$= ca^2 - ba^2 - ac^2 + abc - abc + ab^2 + bc^2 - cb^2$

$= a(ac - ab - c^2 + bc) - b(ac - ab - c^2 + bc)$

$= (a - b)(b - c)(c - a).$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$= 3xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3$

$= -2(x^3 + y^3).$

2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数.

(1) 1234；(2) 4132； (3) 3421； (4) 2413；

(5) $13\cdots(2n-1)\ 24\cdots\ (2n)$；

(6) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$.

【解】(1) 这个排列不存在逆序数，故其逆序数为 0；

(2) 逆序数 $\tau = 0 + 1 + 1 + 2 = 4$；

(3) 逆序数 $\tau = 0 + 0 + 2 + 3 = 5$；

(4) 逆序数 $\tau = 0 + 0 + 2 + 1 = 3$；

(5) 逆序数 $\tau = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \dfrac{n(n-1)}{2}$；

(6) 逆序数 $\tau = 0 + 2 + 4 + \cdots + (2n-2) = n(n-1)$.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【解】因四阶行列式 $D = \sum (-1)^t a_{1i_1} a_{1i_2} a_{1i_3} a_{1i_4}$. 其中 $i_1i_2i_3i_4$ 是1，2，3，4 的某个排列，现在令 $i_1 = 1$，$i_2 = 3$，所以排列 $i_1i_2i_3i_4$ 是 i_3i_4 分别为 2，4 的某些排列，即为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $-a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4. 计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

【解】 (1) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4-c_2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-2c_1} \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -15 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -15 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-r_2} -\begin{vmatrix} 8 & 0 & 8 \\ -15 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_3} -\begin{vmatrix} 8 & 0 & 8 \\ -17 & 0 & -17 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1=r_3} 0.$$

(3) $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 0 & 2e \\ 0 & 2c & 0 \end{vmatrix} = -abdf\begin{vmatrix} 0 & 2e \\ 2c & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

(4) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=ab\begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=ab(cb+1)+ad+(cd+1)$$

$$=abcd+ab+cd+ad+1.$$

5. 证明下列各式.

(1) $$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3;$$

$$(2)\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$(3)\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

$$(5)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

【证明】(1) 左边 $\xlongequal[c_2-c_3]{c_1-c_2}\begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & b^2 \\ a-b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a(a-b) & b(a-b) \\ a-b & (a-b) \end{vmatrix}=(a-b)^3.$$

(2) 左边 $=\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} ax & ay & az+bx \\ ay & az & ax+by \\ az & ax & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & bz & az+bx \\ ay & bx & ax+by \\ az & by & ay+bz \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} by & ay & az+bx \\ bz & az & ax+by \\ bx & ax & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & az+bx \\ bz & bx & ax+by \\ bx & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

(3) 左边$\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

(4) 左边$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}(b-a)(c-a)(d-a)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c-b)(c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac) & (d-b)(d^2+bd+b^2+a^2+ab+ad) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac) & (d-b)(d^2+bd+b^2+a^2+ab+ad) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac) & (d^2+bd+b^2+a^2+ab+ad) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot$$

$$(c-b)(d-b)\cdot(d^2-c^2+bd-bc+ad-ac)$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot(d-c)(a+b+c+d)$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

(5)将 D_n 按第一列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\cdot(-1)^{n-1}$$

$$=xD_{n-1}+a_n=x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n$$

$$=x^2D_{n-2}+xa_{n-1}+a_n=x^{n-2}D_2+x^{n-3}a^3+\cdots+xa_{n-1}+a_n$$

$$=x^{n-2}(x^2+xa_1+a_2)+x^{n-3}a^3+\cdots+xa_{n-1}+a_n$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

5. 计算下列行列式(D_k 为 k 阶行列式).

(1)$D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是 a;

(2)$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

$$(3)D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$(4)D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}，末写出的元素是 0;$$

$(5)D_{2n}=\det(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=|i-j|$;

$$(6)D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}，其中 a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

【解】(1)当 $a=0$ 时，$D_n=-1$；当 $a\neq 0$ 时，

$$D_n \xlongequal{r_n-\frac{1}{a}r_1} \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-\dfrac{1}{a} \end{vmatrix}$$

$$=a^{n-1}\left(a-\frac{1}{a}\right)=a^n-a^{n-2}.$$