

普通高等教育“十一五”国家级规划教材辅导教材

理论力学解题 和应试指南

蔡泰信 编著



普通高等教育“十一五”国家级规划教材辅导教材

理论力学解题和应试指南

蔡泰信 编著



机械工业出版社

本书是理论力学课程学习的解题辅导和应试用书。按相关内容分为若干单元，多数单元一般包括五部分内容：理论提要、知识结构框图、习题分类与典型题、解题步骤、方法和要点，范例精解。例题都是精选的典型题，除了对例题进行深入分析和讨论外，多数例题都采用多种方法求解，这有助于读者融会贯通所学的知识，并逐步掌握不同题型的解题思路、方法和技巧，提高读者的解题和应试能力。书末附有本课程的考点，本课程期末考试和研究生入学考试的模拟试题及其解答。

本书可供学习理论力学课程的大学生、考研者和教师使用，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

理论力学解题和应试指南/蔡泰信编著. —北京：机械工业出版社，
2006. 10

普通高等教育“十一五”国家级规划教材辅导教材
ISBN 7-111-20156-6

I. 理… II. 蔡… III. 理论力学—高等学校—教学参考资料
IV. 031

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 124714 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

责任编辑：季顺利 版式设计：张世琴 责任校对：陈延翔

封面设计：姚毅 责任印制：洪汉军

三河市宏达印刷有限公司印刷

2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 14 印张 · 544 千字

定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68326294

编辑热线电话（010）88379729

封面无防伪标均为盗版

前　　言

本书是根据“高等工业学校理论力学课程教学基本要求”，以及本课程期末考试和硕士研究生入学考试的要求，按照相关的内容分为若干单元进行编写，多数单元一般包括五部分内容：理论提要，知识结构框图，习题分类与典型题，解题步骤、方法和要点，范例精解。每题有分析（或提示）和讨论，一般都用多种方法求解，便于学生融会贯通所学的内容，并通过比较后使读者逐步学会采用最佳方案求解。书末附有本课程的考点，以及期末考试和硕士研究生入学考试的模拟试题及其解答，便于读者复习和应考。

通过对每单元典型题的深入分析，并指出典型题与同类型题的相互关系和特点，真正起到举一反三的效果，这些典型题可覆盖本课程考试的主要题型。

本书首先把基本问题交代清楚，启发读者积极思考，并不断加大难度，使读者逐步掌握不同题型的求解方法，激发读者的学习兴趣，提高解题能力。同时加深读者对本课程基本概念和基本理论的理解。

本书由和兴锁教授主审。在编写过程中，曾参阅兄弟院校的有关教材、参考书、专著和文献，并得到许多教师和学生的大力支持。在此一并表示感谢。另外，姚祥华高级教师曾帮助我收集和整理了很多资料，并校对部分稿件，对她的辛劳也表示衷心感谢。

本书可与蔡泰信、和兴锁编写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《理论力学》配套使用。

由于编者水平有限，书中难免有不妥和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编著者

2006年6月

于西北工业大学

主要符号表

a	加速度	F_Φ	附加推力或反推力
a_c	质心加速度	F_{\max}	最大静滑动摩擦力
a_n	法向加速度	f_s	静滑动摩擦因数
a_t	切向加速度	f	动滑动摩擦因数, 振动频率
a_s	绝对加速度	G	重力
a_r	相对加速度	g	重力加速度
a_e	牵连加速度	h	高度
a_k	科氏加速度	i, j, k	沿正交轴 x, y, z 的单位矢量
a_{At}	点 A 的切向加速度	I	冲量
a_{An}	点 A 的法向加速度	J_x, J_y, J_z	刚体对轴 x, y, z 的转动惯量
a_{MO}^t	动点 M 绕基点 O 相对转动的切向加速度	J_{xy}	刚体对轴 x 和 y 的惯性积
a_{MO}^n	动点 M 绕基点 O 相对转动的法向加速度	J_{yz}	刚体对轴 y 和 z 的惯性积
A	自由振动的振幅, 面积	J_{zx}	刚体对轴 z 和 x 的惯性积
C	重心, 速度瞬心	k	弹簧的刚度系数, 曲率
dr	实位移	L	拉格朗日函数
$d'W$	元功	L_o	质点系对点 O 的动量矩
e	碰撞恢复因数	m	质点的质量
F	作用力	m_R	质点系的质量
F_x, F_y, F_z	力 F 在轴 x, y, z 上的投影	M	力偶矩矢
F_R	力系的合力	M_R	合力偶矩矢
F'_R	力系的主矢	M_o	力系对点 O 的主矩
F_s	静滑动摩擦力	$M_z(F)$	力 F 对轴 z 的矩
F_n	法向约束力	$M_o(F)$	力 F 对点 O 的矩
F_i	惯性力	M_{lo}	惯性力系对点 O 的主矩
F_{ie}	牵连惯性力	$M_o(mv)$	质点的动量 mv 对点 O 的动量矩
F_{ik}	科氏惯性力	n	质点的数目
		O	坐标系原点

p	动量	x, y, z	直角坐标
P	功率	x_c, y_c, z_c	质心的直角坐标
Q	广义力	$\alpha (\alpha)$	角加速度 (角加速度矢)
Q_j	对应于第 j 个广义坐标的广义力	$\alpha, \beta, \gamma,$ φ, θ, ψ	角度
q	载荷集度, 广义坐标	φ_i	摩擦角
r	半径	ρ	曲率半径, 密度
r	矢径	δ	滚动摩阻系数, 弹簧变形量, 阻尼系数
r_o	点 O 的矢径	δ_s	弹簧静变形, 静伸长
s	弧坐标	δr	虚位移
T	质点系的动能, 周期	δW	虚功
t	时间	η	机械效率
V	质点系的势能	$\omega (\omega)$	角速度 (角速度矢), 激振力 频率
v	质点的速度	ω_0	固有频率
v_a	绝对速度	ω_a	绝对角速度
v_c	牵连速度	ω_c	牵连角速度
v_r	相对速度	ω_r	相对角速度
v_c	质心速度		
v_{mo}	动点 M 绕点 O 转动的速度		
W	力的功		

目 录

前言

主要符号表

第一篇 静 力 学

第1单元 平面力系	1	2.3 习题分类与典型题	39
1.1 理论提要	1	2.4 解题步骤和特点	40
1.2 知识结构框图	8	2.5 范例精解	40
1.3 习题分类与典型题	10	第3单元 摩擦	49
1.4 解题步骤和要点	10	3.1 理论提要	49
1.5 范例精解	11	3.2 知识结构框图	50
第2单元 空间力系	32	3.3 习题分类与典型题	51
2.1 理论提要	32	3.4 解题步骤和要点	52
2.2 知识结构框图	37	3.5 范例精解	53

第二篇 运 动 学

第4单元 点的运动和刚体的基本运动	68	5.5 范例精解	96
4.1 理论提要	68	第6单元 刚体的平面运动	120
4.2 知识结构框图	74	6.1 理论提要	120
4.3 习题分类与典型题	76	6.2 知识结构框图	124
4.4 解题步骤和要点	77	6.3 习题分类与典型题	125
4.5 范例精解	78	6.4 解题步骤	127
第5单元 点的复合运动	88	6.5 范例精解	128
5.1 理论提要	88	第7单元 运动学综合题	153
5.2 知识结构框图	90	7.1 习题分类与典型题	153
5.3 习题分类与典型题	91	7.2 解题要点	153
5.4 解题步骤和要点	94	7.3 范例精解	153

第三篇 动 力 学

第8单元 动力学主要内容	181	8.1 质点动力学	181
---------------------------	-----	-----------------	-----

8.1.1 理论提要	181	——轮子的平面运动	247
8.1.2 知识结构框图	183	11.1 习题分类与典型题	247
8.1.3 解题步骤	184	11.2 范例精解	248
8.2 动能定理	184	第 12 单元 动力学问题 (四)	
8.2.1 理论提要	184	——杆件的平面运动	282
8.2.2 知识结构框图	188	12.1 习题分类与典型题	282
8.2.3 解题步骤和要点	189	12.2 范例精解	282
8.3 动量定理和质心运动		第 13 单元 动力学问题 (五)	
定理	190	——动力学综合题	313
8.3.1 理论提要	190	13.1 习题分类与典型题	313
8.3.2 知识结构框图	193	13.2 范例精解	313
8.3.3 解题步骤	194	第 14 单元 质点的振动	362
8.4 动量矩定理·动力学普遍		14.1 理论提要	362
定理综合应用	194	14.2 知识结构框图	366
8.4.1 理论提要	194	14.3 习题分类与典型题	367
8.4.2 知识结构框图	198	14.4 解题步骤	367
8.4.3 解题步骤和要点	199	14.5 范例精解	368
8.5 达朗贝尔原理和动静法	200	第 15 单元 碰撞	380
8.5.1 理论提要	200	15.1 理论提要	380
8.5.2 知识结构框图	203	15.2 知识结构框图	382
8.5.3 解题步骤	204	15.3 习题分类与典型题	383
8.6 动力学普遍方程	205	15.4 解题步骤和要点	383
8.6.1 理论提要	205	15.5 范例精解	384
8.6.2 知识结构框图	205	第 16 单元 虚位移原理	396
8.6.3 解题步骤	206	16.1 理论提要	396
8.7 拉格朗日方程	206	16.2 知识结构框图	398
8.7.1 理论提要	206	16.3 习题分类与典型题	398
8.7.2 知识结构框图	208	16.4 解题步骤和方法	399
8.7.3 解题步骤	208	16.5 范例精解	399
第 9 单元 动力学问题 (一)		附录 A 理论力学的考点	416
——质点动力学	210	附录 B 理论力学课程考试模拟	
9.1 习题分类与典型题	210	试题及其解答	418
9.2 范例精解	210	附录 C 硕士研究生入学考试	
第 10 单元 动力学问题 (二)		理论力学模拟试题及	
——刚体平动和定轴转动	222	其解答	434
10.1 习题分类与典型题	222	参考文献	439
10.2 范例精解	223		
第 11 单元 动力学问题 (三)			

第一篇 静 力 学

第1单元 平面力系

1.1 理论提要

1.1.1 引言

1. 静力学研究的任务

静力学是研究物体在力系作用下，物体平衡的一般规律的科学。它研究的主要问题是：

1) 对物体进行受力分析。分析物体受到哪些力的作用，以及每个力的作用位置和方向。

2) 对力系进行简化和合成。在研究力和力偶等性质的基础上，将作用在物体上的复杂力系简化为较简单的力系，以及研究力系的最后合成结果。

3) 物体在力系作用下的平衡条件及其在工程中的应用，特别是求约束力。

在上述三个问题中，前两个问题是静力学的基础，而第三个问题是静力学的重点。

2. 静力学公理和推理

公理1 二力平衡公理 要使刚体在两个力作用下维持平衡状态的必要和充分条件是：这两个力的大小相等、指向相反并沿同一直线作用。只受两个力作用而平衡的物体称为二力体或二力构件，这两个力必沿两力作用点的连线。

公理2 加减平衡力系公理 在作用于刚体的力系上加上或减去任何平衡力系，并不改变原力系对该刚体的作用。

推论1 力在刚体内的可传性 作用在刚体上的力，其作用点可以沿作用线在该刚体内前后移动，而不改变力对该刚体的作用。

公理3 力的平行四边形定律 作用在物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力。合力仍作用在该点，合力的大小和方向，可由这两个力矢为邻边而

画出的平行四边形的对角线确定。即合力为原两力的矢量和。

推理 2 三力平衡汇交定理 当刚体在三个力作用下平衡时，若其中两个力的作用线相交于某点，则第三个力的作用线也通过该点，且这三个力必在同一平面内。

公理 4 作用与反作用定律 任何两个物体相互作用的力，总是大小相等，作用线相同，但指向相反，并同时分别作用在这两个物体上。可见，作用力与反作用力总是同时成对出现的。

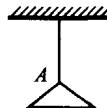
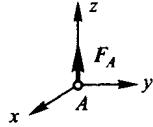
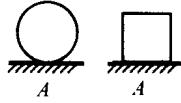
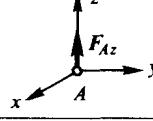
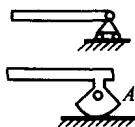
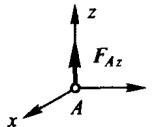
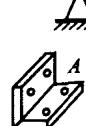
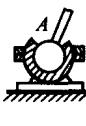
公理 5 刚化公理 设变形体在某力系作用下处于平衡，如将这个已变形但平衡的变形体变成刚体（刚化），则其平衡状态将保持不变。

公理 1 和公理 2 只适用于刚体，而公理 3 和公理 4 对任何物体都适用。

3. 约束和约束力

对非自由体的某些位移起限制作用的周围物体称为约束。约束作用在非自由体上的力称为约束力。约束力的方向与该约束所限制非自由体位移的方向相反。约束力的大小和方向，不仅与作用于非自由体的主动力有关，还与约束的类型有关。常见的约束及其约束力如表 1-1 所示。

表 1-1 几种常见约束及其约束力

类 型	示 意 图	约 束 力	备 注
柔 绳			方向沿绳，背离所系物体的拉力
光 滑 面			方向沿接触处的公法线，指向被约束物体的压力
铰 链	活动铰		
	固定铰		作用线通过铰链轴心，方向待定。可用两个正交分力表示
	球 铰		作用线通过铰链球心，方向待定。可用三个正交分力表示

(续)

类 型		示 意 图	约 束 力	备 注
固 定 端	平 面			约束力可分为两个正交分力和一个力偶
	空 间			约束力可分为三个正交分力和三个正交分力偶
光 滑 轴 承	径 向 轴 承			约束力可分为两个正交分力
	径 向 推 力 轴 承			约束力可分为三个正交分力

4. 受力分析与受力图

全面分析作用在研究对象（或分离体）上所受各力的位置、大小和方向的已知或未知情况，这一过程称为受力分析。在研究对象上画出所受的全部主动和约束力的简图称为受力图。对研究对象进行正确的受力分析并画出相应的受力图，是求解静力学和动力学问题的前提和关键之一。

画受力图的要点：

- 1) 明确研究对象，用简明的轮廓线把它从周围的物体中分离出来，即取分离体。
- 2) 画出研究对象上所受的全部主动力。
- 3) 根据各处不同的约束类型，画出研究对象上所受的全部约束力。
- 4) 只画外力，不画内力。不要多画，漏画和错画力。
- 5) 注意作用力与反作用力之间的关系。
- 6) 善于判断二力构件，并应用三力平衡汇交定理，力线平移定理，力偶与力偶相平衡等力学理论简化受力图。

5. 力系分类

按照力系的作用线是否在同一平面内，可将力系分为平面力系和空间力系

两大类。按照力系作用线的相互位置，上述两大类都可细分为共点力系（或汇交力系），力偶系，平行力系和任意力系；其中空间任意力系是最一般的力系。因为任意力系可以简化为共点力系和力偶系，故共点力系和力偶系合称的基本力系。

1.1.2 平面共点力系

1. 力在轴上的投影

设力 \mathbf{F} 与正交坐标轴 x 和 y 正向的夹角分别为 α 和 β ，则力 \mathbf{F} 在轴 x 和 y 上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta = F \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

2. 平面共点力系的合成

平面共点力系若不平衡，则可以合成为一个合力。合力的大小和方向可用几何法和解析法求得，合力作用在共点力系的汇交点上。

(1) 几何法 合力的大小和方向由力多边形的封闭边表示，其指向从力多边形的始端指向其终端。写成矢量形式为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F} \quad (1-2)$$

即合力矢等于力系中各力的矢量和。

(2) 解析法（投影法） 将式(1-2)分别投影到正交坐标轴 x 和 y 上，得

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_y \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

合力 \mathbf{F}_R 的大小为

$$F_R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} \quad (1-4)$$

合力 \mathbf{F}_R 的方向由两个方向余弦确定，即

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathbf{F}_R, i) &= \frac{\sum F_x}{F_R} \\ \cos(\mathbf{F}_R, j) &= \frac{\sum F_y}{F_R} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

3. 平面共点力系的平衡

平面共点力系平衡的充要几何条件是，力系的力多边形自行闭合，即力系中各力的矢量和等于零，即

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad (1-6)$$

平面共点力系平衡的充要解析条件是，力系的合力 \mathbf{F}_R 等于零，即力系中各力在两个坐标轴上投影的代数和分别等于零，即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

式(1-7)称为平面共点力系的平衡方程。

1.1.3 平面力偶系

1. 力偶和力偶矩

力偶是由两个大小相等、方向相反且不共线的平行力组成。力偶对刚体只产生转动效应，并用力偶矩来度量。力偶矩为

$$M = \pm Fp \quad (1-8)$$

式中， F 为组成功力偶的力的大小， p 为力偶臂；其正负号表示转向，逆时针为正，反之为负。力偶不可能与一个力相平衡；力偶中的两个力在任一轴上的投影代数和恒为零；力偶中的两个力对其作用平面内任一点之力矩的代数和恒等于其力偶矩，与矩心位置无关。如果两个力偶的力偶矩相等，则互称为等效力偶。

2. 平面力偶系的合成

平面力偶系若不平衡，可以合成为一个合力偶，合力偶矩等于力系中各力偶的力偶矩的代数和，即

$$M_R = \sum M \quad (1-9)$$

3. 平面力偶系的平衡

平面力偶系平衡的充要条件是，力系中各力偶的力偶矩的代数和等于零，即

$$\sum M = 0 \quad (1-10)$$

1.1.4 平面任意力系

1. 力对点的矩

力 F 对点 O 的矩（简称力矩）是力 F 绕刚体 O 的转动效应的度量，它是代数量，记为

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (1-11)$$

式中，点 O 为矩心； d 为力臂（点 O 到力 F 作用线的垂直距离）；力 F 使刚体绕矩心 O 逆时针转动为正，反之为负。

2. 平面任意力系的简化和合成

(1) 力线平移定理 作用在刚体上的力，可以平移到该刚体内的任一点而不改变该力对刚体的作用效应，只需增加一个附加力偶，附加力偶矩等于原力对平移点的矩。

(2) 平面任意力系的简化、主矢和主矩 根据力线平移定理，把平面任意力系向作用面内某点 O 简化后（该点 O 称为简化中心），一般可得一个力和一

一个力偶。这个力的力矢称为力系的主矢，它等于力系中各力的矢量和，即

$$\mathbf{F}'_R = \sum \mathbf{F} \quad (1-12)$$

它的大小是

$$F'_R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} \quad (1-13)$$

方向余弦是

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{F}'_R, i) &= \frac{\sum F_x}{F'_R} \\ \cos(\mathbf{F}'_R, j) &= \frac{\sum F_y}{F'_R} \end{aligned} \quad (1-14)$$

这个力偶的矩称为力系对简化中心 O 的主矩，它等于力系中各力对简化中心 O 的矩的代数和，即

$$M_o = \sum M_o(\mathbf{F}) \quad (1-15)$$

主矢的大小和方向与简化中心的位置无关，而主矩的大小和转向则一般随简化中心的位置而变化。

(3) 平面任意力系的合成

1) 主矢 $\mathbf{F}'_R \neq 0$ 时，力系合成为一个力即力系的合力 \mathbf{F}_R 。当主矩 $M_o = 0$ 时，合力 \mathbf{F}_R 作用在简化中心 O ；当主矩 $M_o \neq 0$ 时，合力 \mathbf{F}_R 的作用线到点 O 的垂直距离 $d = \frac{|M_o|}{F'_R}$ 。

2) 主矢 $\mathbf{F}'_R = 0$ 而主矩 $M_o \neq 0$ ，力系合成为一个力偶，这时主矩 M_o 与简化中心的位置无关。

3) 主矢 $\mathbf{F}'_R = 0$ 和主矩 $M_o = 0$ ，则力系平衡。

(4) 合力矩定理 平面力系有合力时，合力对力系作用面内某点 O 的矩，等于力系中各力对该点 O 的矩的代数和，即

$$M_o(\mathbf{F}_R) = \sum M_o(\mathbf{F}) \quad (1-16)$$

(5) 平面任意力系的平衡条件和平衡方程 平面任意力系平衡的充要条件是，力系的主矢以及对某点 O 的主矩都等于零，即

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_R &= 0 \\ M_o &= \sum M_o(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned} \quad (1-17)$$

于是可得

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_o(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \quad (1-18)$$

式(1-18)称为平面任意力系平衡方程的基本形式，即一矩二投影式。由式(1-18)知，平面任意力系有三个独立的平衡方程，可求解三个未知量。

平面任意力系的平衡方程还有另外的两种形式，即，二矩一投影式为

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \end{array} \right\} \quad (1-19)$$

式中A和B两点的连线不垂直于轴x；三矩式

$$\left. \begin{array}{l} \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_C(\mathbf{F}) = 0 \end{array} \right\} \quad (1-20)$$

式中A、B和C三点不在同一条直线上。

上述三组平衡方程(1-18)、(1-19)和(1-20)都可以用来求解平面任意力系的平衡问题。究竟选用哪一组方程，应根据具体情况确定。对于受平面任意力系作用而处于平衡的刚体，只能写出三个独立的平衡方程，求解三个未知量，任何第四个方程只是前面三个方程的线性组合，因而不是独立的。通常力求先写出只包含1个未知量的平衡方程。为此，写力矩平衡方程时，矩心应尽量选取为暂不需求的未知力作用线的交点；写投影平衡方程时，投影轴尽量选取与暂不需求的未知力作用线相垂直的方向。

(6) 平面平行力系的平衡条件和平衡方程 平面平行力系平衡的充要条件是，力系中各力的代数和等于零，又这些力对任一点O之矩的代数和也等于零，即

$$\left. \begin{array}{l} \sum F = 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \end{array} \right\} \quad (1-21)$$

式(1-21)称为平面平行力系平衡方程的基本形式，即一矩一投影式。也可写出如下二矩式

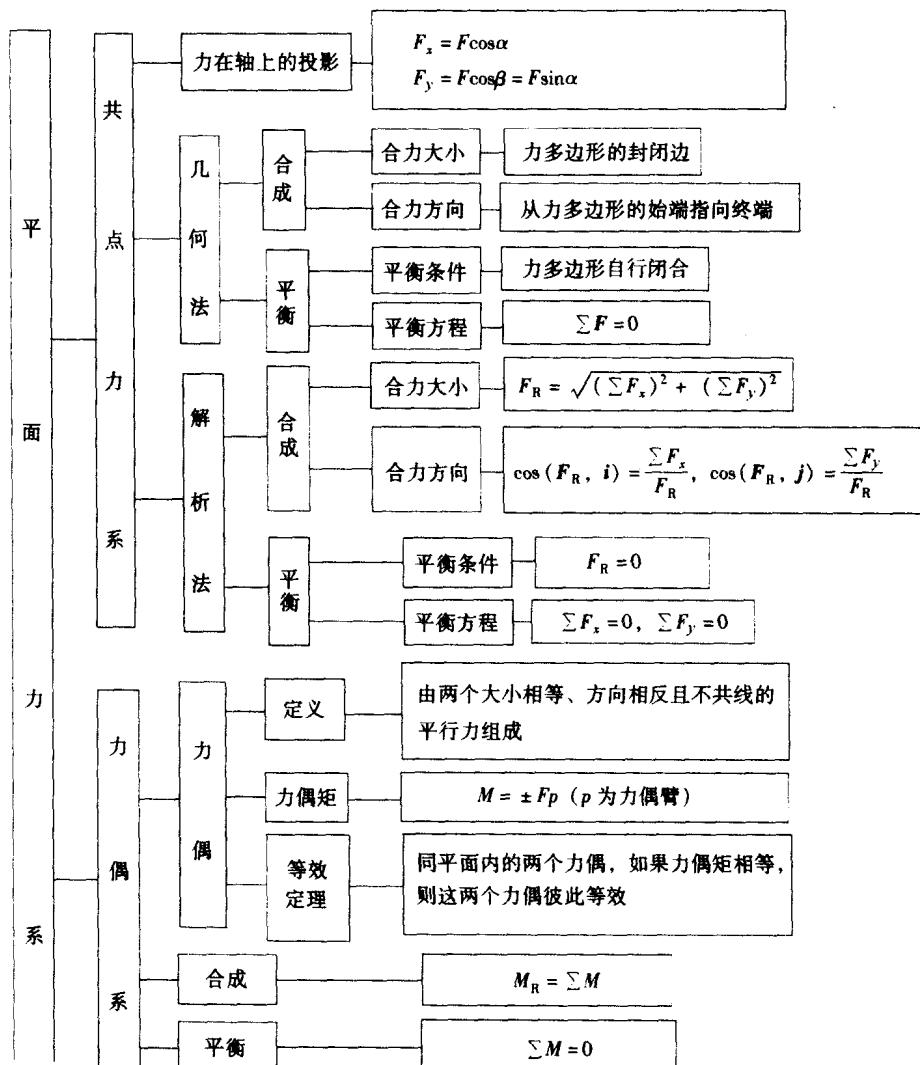
$$\left. \begin{array}{l} \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \end{array} \right\} \quad (1-22)$$

式中A和B两点的连线不与各力作用线平行。

(7) 物体系的平衡、静定和超静定问题 由若干个物体通过约束所组成的系统称为物体系。当物体系平衡时，组成该系统的每一个物体都处于平衡状态。因此，对于每一个受平面任意力系作用的刚体，都可写出三个独立的平衡方程。对于由n个物体组成的物体系，可写出3n个独立的平衡方程。当系统中未知量

的数目超过独立平衡方程的数目时，则未知量不能只根据刚体静力学理论全部求出，这种问题称为超静定问题；反之则称为静定问题。

1.2 知识结构框图



(续)

