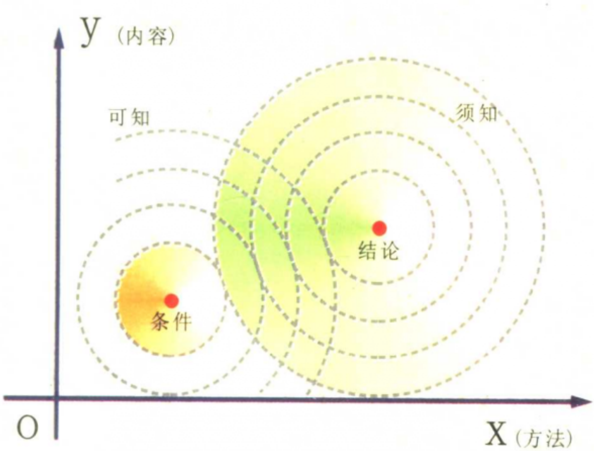
罗增儒数学教育书系

数学解题学引论

罗增儒 著



陕西师范大学出版社

罗增儒数学教育书系

数学解题学引论

罗增儒 著

陕西师范大学出版社

图书代号:ZH079901

图书在版编目(CIP)数据

数学解题学引论/罗增儒著. -2版. -西安:陕西师范大学出版社,2001.7
(罗增儒数学教育书系)
ISBN 7-5613-1498-1

Ⅰ.数 … Ⅱ.罗 … Ⅲ.数学方法-研究 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第027899号

责任编辑 朱永庚
装帧设计 徐 明
责任校对 郭延萍
技术设计 张建飞
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)
网 址 http://www.snuph.com
经 销 新华书店
印 刷 蓝田立新印刷厂
开 本 850×1168 1/32
印 张 18.625
字 数 426千
版 次 2001年7月第2版
印 次 2001年7月第1次
印 数 9001-12000
定 价 19.80元

开户行:西安工行小寨分理处 账 号:216-144610-44-815
读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。
电 话:(029)5251046(传真) 5233753 5307864
E-mail: nuph@pub.xaonline.com

为了数学解题学的诞生——写在前面

无论是数学家还是中学生,天天都在解数学题,这种惊心动魄的实践活动已经产生了惊天动地的数学成果与流芳千古的教育成果．有趣的是,活动本身还没有来得及提炼出自身的完善理论——数学解题学,是根本不存在抑或完全用不着吗?可能是数学太迷人了,数学家马不停蹄地攻克一个又一个数学堡垒,既运用又创造各种解题理论,但无暇把它们独立整理出来．

也可能,这应该是数学教育家的使命．

如果把解题比做打仗,那么解题者的“兵力”就是数学基础知识,解题者的“兵器”就是数学基本方法,而调动数学基础知识、运用数学基本方法的数学解题学正是“兵法”．因此,数学解题学与数学方法论是既有联系又有区别．

研究解题“兵法”、讲授解题“兵法”的开拓者是波利亚,他那风靡世界的名著一开“怎样解题”规律研究之先河．经过几十年的积累,历史要求我们从数学与教学相结合的角度,对数学解题作一些理论性的总结,正面回答多少年来人们翘首以望的问题:怎样学会解题?怎样调动乃至创造解题方法?

笔者的基本观点认为:分析典型例题的解题过程是学会解题的有效途径．至少在没有找到更好的途径之前,这是一个无以替代的好主意．以这一思想为核心,本书收集了建立理论体系的一些素材,也进行了理论体系建立的初步尝试,其中有经典著作的客观介绍(主要在第二章),有报刊资料的丰富集锦(分布在各章、包括正反两方面的材料),也有个人经验的长期积累(如解题过程的各种分析、解题坐标系的建立等)．

第一章提供了解题理论研究的必要准备，包括解题理论的概念介绍，解题研究的现状分析，解题资料的初步整理，解题基本功的要素分析等.

第二章介绍了3本解题著作的解题观点，突出原作者的本质思想并强调"客观性"，尽量避免个人倾向的渗入，也不回避各家观点的差异，并有意引用原文. 到第四章继续介绍两个解题观点：系统论的观点、解题坐标系的观点. 与第二章相反，第四章大多是笔者个人的看法.

第三章首先研究解题程序，然后对解题过程进行思维分析、结构分析和长度分析.

第五章讨论解题方法，但不重复一般数学方法论著作的"解题方法研究"，而是进行数学方法的文化审视，提出解题方法的研究课题（方法的实质、方法的功能、方法的逻辑基础、方法的变化形式、方法的应用层次、方法的正确使用），探讨反例的作用与构造. 作为示范，对配方法进行了较为完整的理论分析.

第六章是实践上升为理论又理论指导实践的重要课题，首先分析了解题策略的特征，然后总结出10条解题策略，并从解题策略的角度，推出了求解选择题的完整体系.

第七章是习题理论，讨论了数学习题的分类，数学题解的检验，解题错误的分析、最后研究数学习题的科学性要求与编拟方法.

书末附有30道供研究的初等数学问题，大多尚无现成答案. 各章的最后也配有充足的练习题，并且有意将后面的例题作为前面的习题. 类似地，前后章节之间的联系、相互参见也是很多的，毕竟全书都协奏着"分析解题过程"、"开发解题智慧"的同一个主旋律.

这就是本书的基本情况. 需要指出的是，虽然笔者的个人思考很早就开始了，并且自1987年以来已向学生连续作过多年讲授，但其理论性、系统性都还极为粗糙. 至于个人的解题心得，与其说是记录了一些研究的成果，不如说是提出了一些思考的课题. 笔者提醒自己：叙述是商讨性的、名词是描述性的，画一个问号作为丑陋的开

头，把完善、完整、完美的句号留给读者.

我们考虑，数学解题学的建设是一件理论性和实践性都很强的工作，恐怕要反复经过这样两个阶段：

1. 广泛了解各种解题观点、解题方法和解题技巧，并且亲身解出很多题(每一个企望成为解题专家的人都应该到题海里去游泳，教师进题海，正是避免学生被题海淹没的一个途径). 在这个基础上，抽象出一些规律性的结论，这些结论不是也不应是点石成金的魔杖，不是也不会是“无题不解”的万能钥匙，但应有一般性的指导意义，具体应用中还很灵验. 比如说，应用这些规律去指导解题与解题教学，确实能解决一些见所未见的新题，确实能改进一些千锤百炼的成题，有时还能突破一些长期猜想的悬题.

这是一个总结和检验的阶段.

2. 将经过验证的规律进行系统性的整理与数学化的加工，使之成为一个兼有逻辑结构和数学特征的理论体系，我们强调应当有数学特征，而不是生硬的“逻辑学＋数学例子”或“教育学＋数学例子”；同时也区别于现有的数学方法论.

这两个阶段既不能截然分开，也不是一次完成，我们现在所做的基本上是第一阶段的基础工作，还很幼稚，重要的只是，我们已经开始了，既情不自禁又欲罢不能.

既然，解题与数学同生共长，一样古老、一样辉煌；既然，数学早已有了系统完整的理论大厦，那么，“数学解题学”的落成还会远吗?

多少年之后，也许人们会发现“数学解题学”的白天鹅与“数学解题学引论”的丑小鸭之间没有多少共同的地方，但这并不要紧，重要的是，白天鹅的存在、美丽、高雅与楚楚动人.

罗增儒

目　　录

第一章 绪 论

本章提供解题理论研究的必要准备，包括解题理论的概念介绍，解题研究的现状分析，解题资料的初步整理，解题基本功的要素剖析.

1－1 解题与解题理论

1－1－1 题

美国数学家哈尔莫斯（P·R·Halmos）认为，问题是数学的心脏.他说："数学究竟是由什么组成的？公理吗？定理吗？证明吗？概念？定义？理论？公式？方法？诚然，没有这些组成部分，数学就不存在，这些都是数学的必要组成部分，但是，它们中的任何一个都不是数学的心脏，这个观点是站得住脚的，数学家存在的主要理由就是解问题.因此，数学的真正的组成部分是问题和解."①

数学的历史发展一再印证了"问题是数学的心脏".尤其是1900年，当希尔伯特（D·Hilbert）在巴黎国际数学家代表大会上发表《数学问题》的著名演讲之后，数学问题更加成为激励数学家推进数学发展的一种原动力.希尔伯特在他的演讲中说：只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止.正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数

① P·R·Halmos.数学的心脏.数学通报，1982，4，P.27.

学研究也需要自己的问题[①].

有一个传说,虽然难以辨明真假,但却深深体现了数学家对"问题"的偏爱.据说,希尔伯特曾经找到了证明"费马猜想"[②]的方法,但为了让它继续激励人们去开拓新的数学分支和创造新的数学方法,他守口如瓶,秘而不宣.当他周围的挚友敦促他发表这个证明时,希尔伯特深情地说:"我们应当更加注意,不要轻易杀掉这只能为人类生出金蛋的母鸡!"

不仅对于数学科学,而且对于学校数学来说,问题也是它的心脏.波利亚强调指出:"中学数学教学首要的任务就是加强解题训练."他有一句名言:"掌握数学就是意味着善于解题."[③]

本世纪 70 年代,美国数学指导委员会也曾提出过:"学习数学的主要目的在于解题."1980 年 4 月,美国数学教师协会公布了一份文件,叫做《关于行动的议程》,明确提出"必须把问题解决作为 80 年代中学数学的核心","数学课程应当围绕着问题解决来组织","数学教师应当创造一种使问题解决得以蓬勃发展的课堂环境".90 年代以来,"问题解决"仍然是美国数学教育的中心 .

力求提高解题教学在数学教学中的作用已经是现代数学教学理论的一个特点.现代兴起的"问题教学法"、"研究法"、"发现法"、"试错法"等教学法,都明显地突出了解题教学在数学教学中的地位 .

那么,什么是数学中的问题呢?

波利亚在《数学的发现》中将问题理解为:有意识地寻求某一适当的行动,以便达到一个被清楚地意识到但又不能立即达到的目的.

---

① 转引自邓东皋等.数学与文化,北京大学出版社,1990 年 5 月第 1 版,P·191,李文林、袁向东译.

② 费马猜想是:$n>2$ 时,方程 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解.历经 300 多年后已为美国普林斯顿大学威尔斯(A·Wiles)教授于最近解决.

③ 见参考文献[28]波利亚.数学的发现,序言.

解决问题指的是寻找这种活动①.

威克尔格伦在《怎样解题》中说:我们考虑的所有形式的问题都可以认为由三类信息组成:关于已知条件的信息(已知表达式);关于运算的信息,这些运算从一个或多个表达式推导出一个或多个新的表达式;以及关于目标的信息(目标表达式)②.

三轮辰郎在"问题解决能力的育成"中认为:问题是指那些对于解答者来说还没有具备直接的解决办法,对于解答者构成认知上的挑战这样一种局面③.

1988年召开的第六届国际数学教育大会的一份报告指出:"一个(数学)问题是一个对人具有智力挑战特征的,没有现成的直接方法、程序或算法的未解决的情境."

还可以列出一些提法④⑤⑥,但是,不管有多少种不同的叙述,都离不开这样一个本质:问题反映了现有水平与客观需要的矛盾,问题就是矛盾.对于学生而言,问题有三个特征:

(1) 接受性:学生愿意解决并且具有解决它的知识基础和能力基础.

(2) 障碍性:学生不能直接看出它的解法和答案,而必须经过思考才能解决.

(3) 探究性:学生不能按照现成的公式或常规的套路去解,需要进行探索和研究,寻找新的处理方法.

例如,解方程:

$$x^2 - 3x + 2 = 0; \qquad ①$$

---

① 见第一卷第二部分第五章,问题,P.164.

② 见参考文献[31]威克尔格伦.怎样解题,P.10,什么是问题.

③ 转引自刘学质.问题解决在美国和日本.数学教学,1993,2,P.17.

④ 余致甫主编.数学教育学概论,P.219.

⑤ 参考文献[19]张奠宙等.数学教育学,P.225.

⑥ 本书§4-1-1.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0; \quad ②$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 1. \quad ③$$

对于初一学生来说,这三个方程都是问题,因为他们只学过一元一次方程的解法.对于初二学生来说,他们已经学了一元二次方程的解法,方程①不成为问题;方程②由于提取出 x 之后才能化为常规的一元二次方程,因而对一部分学生将成为问题,而对另一部分学生并不成为问题;但一元三次方程③对所有初中生都是问题.

数学教学中的问题也叫做题,可以分为练习型与研究型两类.(习题的分类见第七章)

练习型的题具有教学性,它的结论为数学家或教师所已知,其之所以成为问题仅相对于教学或学生而言,包括一个待计算的答案、一个待证明的结论、一个待作出的图形、一个待判断的命题、一个待解决的实际问题等.其中既有学生所做的作业,又有教师所讲的概念和定理.本书中近 600 道例题、习题均属此列.

研究型的题具有学术性,它的结论对于数学和数学家都是未知的,其中既有数学自身理论发展的认知题,又有应用数学理论解决实际问题的应用题.本书末附有 30 道供研究的初等数学问题.

把两种类型都包括进去,是"题"的广义含义;只考虑其中一种类型,是"题"的狭义理解.在教学中基本上都是练习型的题,而在科研中则不承认已经解决的课题仍为问题.本书的讨论出于教学目的,当然主要考虑练习型的题目,且常限于初等数学的范围.但是,由于学生解决练习型题目的过程与数学家解决研究型题目的过程是类似的(当然在创造与发现的层次上有区别),所以,我们的研究有时也不拘泥于"题"的狭义理解.事实上,我们的初衷正是:通过练习型例题的过程分析,去探索研究型课题的解决规律,去获得解决研究型课题的能力.

无论对题作何种意义的认识,都应该把概念的抽象概括、定理的发现证明、数学的实际应用等,纳入"题"的固有范围.

1-1-2 解 题

解题就是“解决问题”，即求出问题的答案.这个答案在数学上也叫做“解”，所以，解题也就是求出题的解.小至一个学生算出作业的答案、一个教师讲完定理的证明，大至一个数学课题得出肯定或否定的结论、一个数学技术用于工农业实际部门产生良好效益，都叫做解题.

我们说过，波利亚有一句脍炙人口的名言：“掌握数学就是意味着善于解题”，在这里，“解题”近于“掌握数学”的同义语了.确实，数学工作者每日每时都离不开解题.

解题是数学工作者数学活动的基本形式；

解题是数学工作者数学活动的主要内容；

解题是数学工作者的一个存在目的；

解题是数学工作者的一个兴奋中心.

需要提出的是，现代兴起的“问题解决”(Problem solving)比传统意义上的“解题”有了很大的发展.传统意义的“解题”注重结果、注重答案，而现代意义的“问题解决”则更注重解决问题的过程、策略以及思维的方法.

一个学生拿到一道习题之后，通过翻看习题集的答案得到了解决，当然这个答案是正确的，但能否认为他解决了问题呢？从“问题解决”的观点看来，回答是否定的.同样，一个教师讲解一条几何定理时，没有任何知识的发生过程，小黑板一挂，辅助线作好了，证明和盘托出了，也是一个不成功的“解题”.

“问题解决”有不同的解释，比较典型的观点可归纳为 4 种：

1. 问题解决是心理活动

指的是人们在日常生活和社会实践中，面临新情境、新课题，发现它与主客观需要的矛盾而自己却没有现成对策时，所引起的寻求处理办法的一种活动.

2. 问题解决是一个过程

美国全国数学管理者大会(NCSM)在《21世纪的数学基础》(1988)中,把"问题解决"定义为"将先前已获得的知识用于新的、不熟悉的情境的过程".这就是说,问题解决是一个发现的过程、探索的过程、创新的过程.

3. 问题解决是一个目的

美国全国数学管理者大会(NCSM)在《21世纪的数学基础》中认为:"学习数学的主要目的在于问题解决".因而,学习怎样解决问题就成为学习数学的根本原因.此时,问题解决就独立于特殊的问题,独立于一般过程或方法,也独立于数学的具体内容.

4. 问题解决是一种能力

即那种把数学用之于各种情况的能力.美国全国数学管理者大会(NCSM)把解决问题的能力列为10项基本技能之首.重视问题解决能力的培养、发展问题解决的能力,其目的之一是,在这个充满疑问、有时连问题和答案都是不确定的世界里,学习生存的本领.

上述各种看法,在形式上似乎并不一致,但它们有本质上的共同点,即在教学中为学生提供了一个发现、创新的环境与机会,为教师提供了一条培养学生解题能力、自控能力和应用数学知识能力的有效途径.

1-1-3 解题理论

传统意义上的解题,把"题"作为考察的对象,把"解"作为研究的目的.在很多情况下,对"题"的关心,对"解"的追求,超过对"解题"本身的注意.那些精明的数学成果所告诉我们的只是:"应用了什么数学方法","得到了什么数学结论".而我们困惑的却是:"怎样应用数学方法","如何发现数学结论"

本书认为,解题理论研究的对象是"解题",它的基本任务是研究解题规律,回答"怎样学会解题",基本方法是"分析解题过程".所以,本书所理解的数学解题学是,通过解题过程的分析去探索怎样学会解题的一门学问.本书将讨论解题观点、解题过程、解题方法、解题策