高等学校教材

高等数学（上册）

叶仲泉　王新质　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高 等 数 学

（上 册）

叶仲泉　王新质　主编
杨　虎　　　　　主审

高等教育出版社

内容提要

本书以提高学生的数学素质，培养学生自我更新知识及创造性地应用数学知识解决实际问题的能力为宗旨。书中的定义和结论产生于对实际问题的调查研究，即从实际问题出发，导出一般结论，强调发散和归纳思维；突出数学基本思想，淡化各种运算技巧；突出应用和数学建模。

本书由上、下两册构成。上册内容包括：极限论，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用。下册内容包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，级数，微分方程。

本书可作为高等学校理工类各专业高等数学教材，也可用于学生自学。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/叶仲泉，王新质主编．—北京：高等教育出版社，2007.6

ISBN 978-7-04-021443-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①叶…②王…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第061865号

策划编辑 于丽娜　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 王凌波
责任绘图 尹　莉　**版式设计** 张　岚　**责任校对** 金　辉
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新丰印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007年6月第1版
印　　张	20.75	**印　　次**	2007年6月第1次印刷
字　　数	380 000	**定　　价**	21.90元

物料号　21443-00

前 言

科学的任务，在于发现未知事物并揭示影响此事物发展变化的不同因素之间的联系方式。而数学则是研究影响事物发展变化的不同因素在形与量上的联系的科学。当研究的对象为抽象的数学概念时，研究内容属于理论数学的范畴；当研究的对象具有实际的背景时，研究内容属于应用数学的范畴。

数学的主要功能是对已知规律进行描述，建立数学模型，通过数学模型来揭示未知规律。数学在科学研究中的应用过程为：通过生产实践、科学实验获得数据→分析数据，总结规律→对已知规律进行数学描述以建立数学模型→利用已有的数学工具或发展新的数学工具求解数学模型→检验解的合理性，如未达到要求，则再对数学模型、求解方法进行改进。

17 世纪，牛顿在研究天体运行规律时发现了微积分基本公式，为了得到证明此公式成立的理论基础，数学家们经过 200 年左右的努力建立了完整的经典微积分学理论体系。微积分学由微分学和积分学组成。微分学主要通过极限理论，研究函数的性质；积分可以用来表达及计算几何体上的非均匀分布量。微积分基本公式是近代数学史上最伟大的发现，微积分学则奠定了现代数学的基础，它是 200 年间众多科学家努力的结果、智慧的结晶。尽管后来微积分学有了巨大的发展，但仍继承了经典微积分学的基本思想，经典微积分学在科学研究中仍然被广泛的应用。

“高等数学”以经典微积分为主要内容。通过高等数学的学习，既可初步掌握数学的基本功能，能够对已知规律进行数学描述，打下建立数学模型的基础，并能获得通过数学建模解决实际问题的能力。读者若能具感恩的心情、求知的欲望、回报社会的愿望来学习高等数学，必可以开发智慧、陶冶性情、感受到数学的乐趣，并为后续课程的学习及今后的科学研究打下必要的基础。

在欧美，与“高等数学”类似的教材一般称为“微积分”(Calculus)，而我国高等数学教材继承了前苏联同类教材的体系，经过 60 年左右的发展、完善，其体系、内容已相当成熟。由于高等教育已从过去的精英化教育逐步转型为大众化教育，加之数学科学的不断发展，高等数学的教学也必须不断做出调整。

教材改革，一直是重庆大学各级领导与教师们工作的重点。随着高等数学教学经验的不断积累和对相关应用科学研究的不断深入，教师们对数学的认识与领悟亦日趋深刻。如何将这些教学经验和科研体会体现在高等数学的教材和

教学中，为提高高等数学的教学水平尽我们的一份力量，是我们编写这套教材的根本动力。

本教材结合众多国内教材和英美教材的长处，以提高学生数学素质，培养学生自我更新知识及创造性地应用数学知识解决实际问题的能力为宗旨，主要特色如下：

1. 在保证教学大纲基本要求的同时，注意渗透现代数学的观点、概念、方法、术语和符号，为现代数学适当地提供内容展示的窗口和延伸发展的接口，培养学生获取现代数学知识的能力；

2. 三元法则：每个题目都尽可能地用几何的、数值的和代数的方法来表示；

3. 定义和结论产生于对实际问题的调查研究，即强调发散和归纳思维，从实际问题出发，导出一般结论；

4. 突出数学基本思想，淡化各种运算技巧；

5. 突出应用和数学建模。

本书上册由叶仲泉教授和王新质副教授主编，第一、二章由叶仲泉教授和田玉芳副教授编写，第三、四章由王新质副教授和杨木洪讲师编写，第五、六章由张敏讲师和李江涛副教授编写；下册由段正敏副教授和易正俊副教授主编，第七、八章由王晓宏讲师和于光磊副教授编写，第九、十章由段正敏副教授和张谋副教授编写，第十一、十二章由易正俊副教授和阴文革讲师编写。每一章节的内容都经过全体编写人员的充分讨论，浓缩了各位教师的经验和智慧。

本书由重庆市工业与应用数学学会理事长、重庆大学数理学院院长杨虎教授审定。

世上没有完美的事物，但通过努力可以使其趋于完美。若我们的努力能够使这一过程有所进步，则我们的目的就已经达到。由于水平所限，教材中难免有不尽如人意之处，请读者指出其中的不足和错误，全体编写人员在此表示诚挚的感谢！

编　者

2007年1月于重庆大学

目　录

1 第一章 极限论

微积分的产生是人类历史上的一件大事，它是科学发明史上最精彩的篇章之一，它是科学思想的宝库. 300 多年前，受力学、天文学的启发，牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)发明了微积分，到 19 世纪微积分已经成为天体力学、弹性力学、电磁学和统计物理学的强有力的工具. 到目前，微积分在数学、物理学、工程学以及生物科学方面已经显示出了强大的威力.

“高等数学”以经典微积分为主要内容. 如果将整个数学知识比做一棵大树，则初等数学是树根，名目繁多的数学分支是树枝，而高等数学就是树干. 高等数学是一门基础理论课，许多数学分支是在它的基础上发展起来的，学好这门课程，对以后学习其他数学分支以及专业课都会起重要的作用. 高等数学的方法和概念来源于物理现实和直观几何，是应用的天然工具，它对工程技术的重要性就像望远镜之于天文学，显微镜之于生物学一样.

微积分是研究函数的行为、性质和应用的数学学科，它的基本内容为：极限论、微分学和积分学. 微分学研究函数的局部性质，积分学研究函数的全局性质，积分可以用来表达及计算几何体上的非均匀分布量，而极限论是整个微积分的基础，也是研究函数的基本手段和方法. 正确理解微积分的基本概念以及由此产生的极其大量丰富的成果，需要对极限的概念和函数的概念有着深刻的认识.

第一节 微积分的一些基本问题

微积分与初等数学有很大的差别，初等数学基本上是常量数学，而微积分是变量数学，它研究运动和变化. 本节通过几个直观的例子，来说明微积分的基本思想和基本的思考问题的方法.

一、面积问题

1. 多边形的面积

在初等数学里，我们已会求一些规则图形的面积，如三角形，正方形，矩

形和多边形的面积，这些图形的特征是它们的边界都是由一些直线段构成．而且多边形的面积都可以转换为三角形的面积来计算．

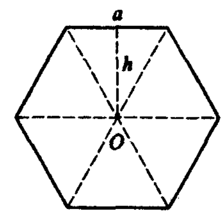

图 1－1

对于正多边形，我们有如下的面积公式：

$$A_n = \frac{1}{2} l_n h_n,$$

其中 l_n 是多边形的周长，h_n 是边心距．

2. 圆面积，割圆术

众所周知圆的面积公式

$$A = \pi r^2.$$

但这个公式是怎么来的或者怎样证明？

多边形的面积之所以好算，是因为它的边界是一些直线段．而圆的面积之所以难算，是因为圆的边界是曲线．另一方面，尽管整个圆周是曲的，但每一小段圆弧却可以近似看成是直的．按照这种思路，我们在圆上取很多很密的分点，将圆分成许多的小段，于是我们可以用多边形的面积近似代替圆的面积．为简单起见，我们用内接正 n 边形来逼近圆．如图 1－2 所示．

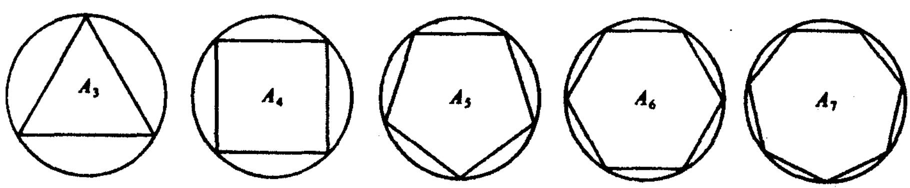

图 1－2

很显然，正多边形的边数 n 越大，则正多边形的面积与圆的面积越接近，当 $n \to \infty$ 时，正多边形面积的极限即为圆的面积．正 n 边形的面积为

$$A_n = \frac{1}{2} l_n h_n,$$

其中 l_n 与 h_n 分别是正 n 边形的周长和边心距．显然当 $n \to \infty$ 时，l_n 与 h_n 的极限分别为圆的周长与半径，故圆的面积

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} l_n h_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2,$$

其中"lim"是极限"limit"的缩写．

上述这种用多边形的面积来逼近圆面积的方法，早在古希腊时代就提出来了．另外，我国古代数学家刘徽在公元 3 世纪提出了所谓的"割圆术"，其基本思想和上述方法是一致的，刘徽说："割之弥细，所失愈少．割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣．"

3. 曲边三角形的面积

在上面求圆的面积时采用的以直线段近似代替圆弧的方法，在微积分中称为局部“以直代曲”，这是一种非常基本的方法．下面我们利用这种方法来研究曲边三角形的面积问题．

例 1 求图 1－3 中曲边三角形的面积．

在区间[0,1]上取很多很密的分点，然后过这些分点分别作平行于 y 轴的直线，从而曲边三角形被分成很多很窄的小曲边梯形，而每一个小曲边梯形都可以近似地看作矩形（如图 1－4，图 1－5）．

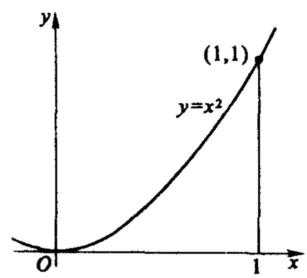

图 1－3

为简单起见，将 $[0,1]$ n 等分，于是将 $[0,1]$ 分成了 n 小段，每小段的长度为 $\frac{1}{n}$，分点的坐标分别为 $\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…，$\frac{n-1}{n}$．小矩形共有 n 个，它们的面积之和为

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3}[1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2] \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

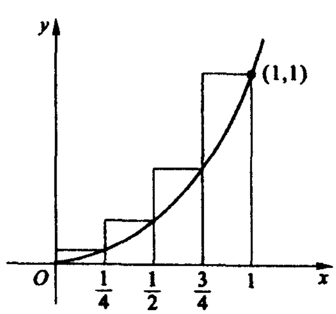

图 1－4

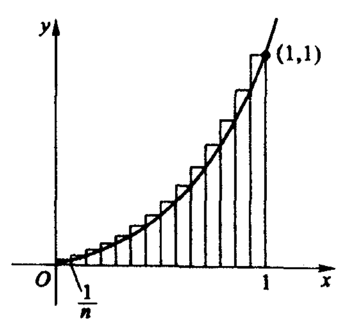

图 1－5

很显然，n 越大，则 S_n 与曲边三角形的面积越接近．当 n 无限增大时，S_n 的极限即为曲边三角形的面积．故

$$A=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

上述求曲边三角形的面积的方法可以用来求如图 1－6 一般的曲边梯形的面积. 以后研究定积分时，还要回到这个问题.

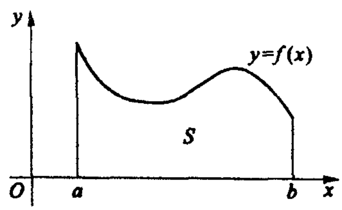

图 1－6

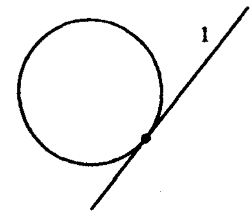

图 1－7

二、切线问题

回顾一下圆的切线的定义：与圆只有一个交点的直线称为圆的切线(如图 1－7). 但圆的切线的定义对一般的曲线来说将不再适用. 即一般曲线的切线不能理解为与曲线只有一个交点的直线，如图 1－8.

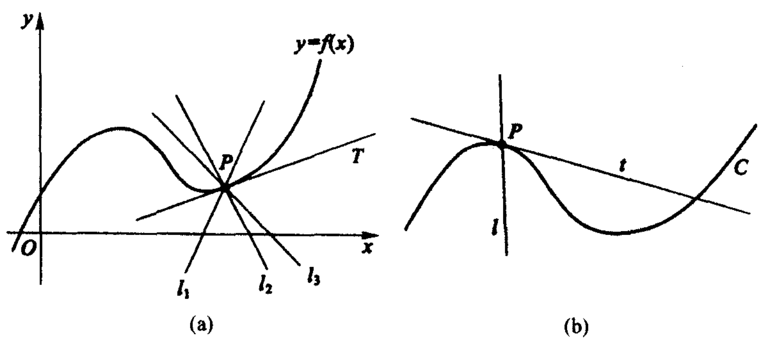

图 1－8

在图 1－8(a)中，过 P 点且与曲线只有一个交点的直线有无限多条，除了直线 PT 外，它们都不是该曲线的切线；在图 1－8(b)中，直线 t 与曲线有两个交点，但它却是该曲线的切线.

那么，怎样定义一条曲线的切线？又该怎样求一条曲线的切线的斜率呢？要确定一条直线需要两点，但我们无法找到切线上的两点.

想像一下用直尺作曲线的切线的过程，开始时，直尺往往与曲线有两个交点，于是就得到一条割线，比如说 PQ_1，固定 P 点，让 Q_1 点沿曲线移动，分别得到割线 PQ_1，PQ_2，PQ_3，…，当 Q_1 点沿曲线无限接近 P 点时，割线的极限位置即为曲线的切线. 如图 1－9 所示.

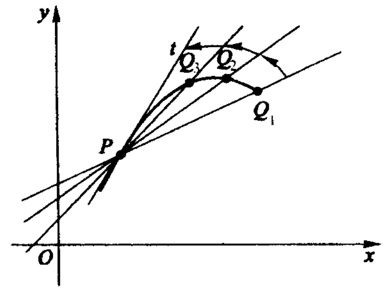

图 1－9

例 2　求抛物线 $y=x^2$ 上点 $P(1,1)$ 处的切线的斜率.

如图 1－10，设 $Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$ 为抛物线上的点，于是割线 PQ 的斜率为

$$k_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x,$$

故抛物线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 点处的切线的斜率为

$$k=\lim_{Q\to P}k_{PQ}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

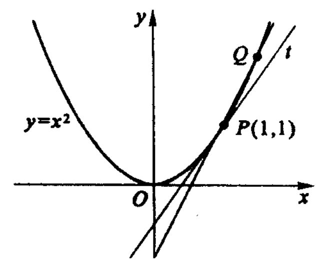

图 1－10

三、变速直线运动的瞬时速度问题

当我们看见汽车示速计上的速度为 60 km/h 时，它的含义是什么？当速度不变时，我们知道一小时后汽车将行驶60 km；当汽车的速度在变化时，我们说汽车的速度在某一时刻为 60 km/h，那又是什么意思？拍出那一瞬间的照片显示出汽车是不动的，所以我们不能将瞬时速度孤立地理解为物体在那一点的速度，因为当你注视某个孤立瞬间的运动时，也就使这一运动停止了，正如古希腊的一个著名的悖论所说的：“飞矢不动”.

在整段时间内，速度是在变化的，但在很短的一段时间内，速度可以近似地看成不变，即局部“以匀速代变速”. 按照这种思路，在微积分中，将瞬时速度理解为包含该瞬间的一小段时间上的平均速度的极限.

例 3　求自由落体运动在时刻 t_0 的速度 $v(t_0)$.

由物理学的知识知道，自由落体运动中，路程 s 与时间 t 有如下的关系式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g\approx9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 为重力加速度.

考察在时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这一段时间内的运动. 在这一段时间内，自由落体所走过的路程为

$$\begin{aligned}\Delta s&=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2\\&=gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2.\end{aligned}$$

当 Δt 很小时，这段时间内的运动就可以近似地看作匀速运动，因而就可以用这段时间内的平均速度

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}\\&=\frac{gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t\end{aligned}$$

来近似地代替在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$，Δt 越小，近似程度就越高，但无论 Δt 多么小，这个平均速度也只是瞬时速度的近似值，而不是精确值.

为了从近似值过渡到精确值，需要取极限，当 $\Delta t\to0$ 时，平均速度的极限就是瞬时速度 $v(t_0)$，故

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\left(gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt_0.$$

小结：通过以上例子，我们看到为了求平面图形的面积，曲线切线的斜率以及变速直线运动的瞬时速度，需要引进极限的概念. 极限概念的引进是微积分与初等数学的最大不同之处. 我们甚至可以说微积分是研究极限的一门数学学科.

Newton 发明微积分是为了研究行星绕太阳的运动. 今天，微积分不仅用于计算卫星和宇宙飞船的轨道，而且用于研究天文学、核物理、电学、热力学、机械设计、化学反应、有机物的增长、天气预报和人寿保险费的计算以及许多经济问题乃至日常生活中. 像栅栏围一块地使其所围面积最大，或求汽车的经济速度等问题，都需要用到微积分的知识. 在以后的学习中，读者会逐渐体会到微积分应用的巨大威力.

第二节 函 数

函数是用数学语言来研究现实世界的主要工具，它研究变量与变量之间的关系. 函数是数学最基本的概念，也是微积分研究的基本对象. 自 17 世纪近代数学产生以来，函数的概念一直是处于数学思想的真正核心位置.