黄冈题库

丛书主编　董德松（黄冈市教育科学研究院院长）
本册主编　余国清　童建辉

学习探究拓展

高中数学

1 必修

B版

新课标

适用人教B版

中国计量出版社　卓越教育图书中心

《黄冈题库 学习探究拓展》

品牌教辅 全新打造

根据高中新课程标准编写

董德松 黄冈市教育科学研究院院长，教育学硕士，资深教育专家。多年主管教学工作，成功总结出一套完善的教学方法；主编或参编教学指导用书数十种，在省级、国家级专业报刊上发表教育、教学论文多篇；多次应邀到全国各地讲学，从教育理念、课程设置到教育行为以及学生要求，密切关注并研究高中新课改，始终站在教育改革的最前沿。

导 学——知识梳理 例题精讲 重点研习

练 考——基础演练 能力提高 综合检测

策划组稿 谢 瑛 黄德胡

责任编辑 赵 静 姜立梅

责任校对 杜小丽

责任印制 钟浩军

封面设计 毛雨设计

ISBN 978-7-5026-2663-1

定价：17.00 元

（适用人教B版·新课标）

黄冈题库
学习探究拓展

丛书主编　董德松

本册主编　余国清
童建辉

高中数学1（B版必修）

中国计量出版社
卓越教育图书中心

图书在版编目(CIP)数据

黄冈题库：学习探究拓展．高中数学 1（B版必修）：适用人教B版新课标．/董德松丛书主编；余国清等分册主编．—北京：中国计量出版社，2007．8

ISBN 978-7-5026-2663-1

Ⅰ．黄… Ⅱ．①董…②余… Ⅲ．数学课—高中—习题 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 079854 号

中国计量出版社 出版

北京和平里西街甲 2 号
邮政编码：100013
http://www.zgjl.com.cn
E—mail:jf@zgjl.com.cn

印刷 北京市密东印刷有限公司
发行 中国计量出版社总发行　各地新华书店经销

开本 850 mm×1168 mm　1/16
印张 13.25
字数 281 千字
版次 2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—5 000 册
定价 17.00 元
(如有印装质量问题，请与本社联系调换)

编写说明

丛书特点

1. 关注课改　创新理念　本丛书以促进学生全面发展为宗旨，立足素质教育，全面体现基础教育课程改革的新理念，把课本知识学习、创新研究型实践以及思维拓展训练有机地结合起来。

2. 精心策划　权威编写　充分了解读者需求，与基础教育专家共同策划，结构设计科学，针对性强。作者是来自北京、湖北、陕西、安徽、山东等地重点中学的一线骨干教师，以及参与新课标教材编写的国家级教师、教研员等。

3. 注重实用　科学设计　内容设计以学生为本，注重实用。根据不同学科、不同年级的特点，科学设计栏目，严格控制题量和难度，创新题型。版式设计简单明了，便于使用。

本书栏目设置

知识梳理　通过讲解和辨析，梳理每课基本概念、知识点，指明学习方向。

典型例题精讲　主要针对每节知识点、重难点，选择典型例题(包括高考真题、模拟试题和竞赛题等)，从切入、解析到点拨，帮助学生熟悉各类题型，掌握多种解题方法，举一反三。

一级闯关题　依据每课知识点设计题目，系统、全面且针对性强，注重能力形成训练，旨在夯实基础。提示：高考中绝大部分分值均来自这里，必须完全掌握！

二级闯关题　有较高难度要求的题，适用于学有余力的学生。其题目设计重在知识点的综合运用和能力的提升，注重思维拓展和能力提升训练，旨在盘活基础。思维延伸、创新研究性的题目，能激发学生自主学习的兴趣。提示：能破解难题是获得高分的秘诀！

高考瞭望　综合能力演练，加强对知识点的理解和掌握，提高解题应试能力。

单元总结　通过“知识归纳”和“方法集粹”等栏目归纳总结本单元知识脉络，清晰思路，提炼学习探究方法。

智慧宫殿　通过链接与每章相关的知识背景，点击数学的发展前景及在各领域中的应用，提高对数学学习的兴趣，体验数学带来的智慧和美妙。

综合测试　各单元综合测试、模块达标检测，题目设计系统、全面，便于学习的阶段检测，及时查漏补缺，全面提升解决问题的综合能力。

参考答案及解析　给出每题参考答案，对有一定难度的题，针对知识点、考点或解题思路等进行适当分析和点拨，以引导知识的升华。

目　　录

第1章 集 合

导练1 集合的含义与表示

导 学 篇

知识梳理

一、基础精讲

1. 集合中元素的特征

(1) 确定性;(2) 互异性;(3) 无序性.

2. 集合的分类

(1) 有限集:含有有限个元素的集合叫有限集.

(2) 无限集:含有无限多个元素的集合叫无限集.

(3) 空集:不含任何元素的集合叫空集($\varnothing$).

3. 集合的表示法

(1) 列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.

(2) 描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.

(3) 图示法(韦恩图法):画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合的方法.

4. 集合与元素的符号

集合符号:常用大写拉丁字母(A,B…)表示.

元素符号:常用小写字母(a,b…)表示.

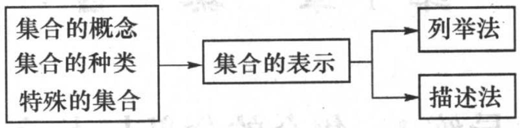
常用的数集:$\mathbf{N}$,自然数集;$\mathbf{Z}$,整数集;$\mathbf{Q}$,有理数集;$\mathbf{R}$,实数集;$\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$),正整数集.

5. 元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于($\in$)或不属于($\notin$)两种,且只有这两种关系.

二、重点研习

1. 学习脉络



学习这一节内容，必须从以下4个方面来理解：

(1) 集合的基本概念以及集合与元素间的关系；

(2) 集合的特性；

(3) 集合的表示方法；

(4) 集合的分类与几种常见的数集.

2. 描述法的三种语言形式

如表示由抛物线 $y=x^2$ 上所有的点组成的集合，可用文字语言、图形语言和符号语言三种方法描述.

(1) 文字语言形式：抛物线 $y=x^2$ 上所有的点组成的集合；

(2) 图形语言形式：在平面直角坐标系内画出抛物线 $y=x^2$(略)；

(3) 符号语言形式：$\{(x,y)|y=x^2\}$.

表示集合的描述法是使命题 $P(x)$ 为真的 A 中诸元素之集合记为 $\{x\in A|P(x)\}$. 其中 x 为该集合中元素的代号，它表明了该集合中的元素是“谁”，是“什么”；A 是特定条件；$P(x)$ 为该集合中元素特有的公共属性、特征.

在使用描述法时，应注意以下6点：

① 写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表达的元素符号)；

② 说明该集合中元素的性质；

③ 不能出现未被说明的字母；

④ 多层描述时，应当准确使用“且”和“或”；

⑤ 所有描述的内容都要写在集合括号内；

⑥ 用于描述的语句力求简明、确切.

3. 用描述法表示的集合，对其元素的属性要准确理解

例如：集合 $\{x|y=x^2\}$ 表示自变量 x 值的全体，即 $\{x|x$ 为任一实数$\}$；集合 $\{y|y=x^2\}$ 表示函数值 y 的全体，即 $\{y|y\geqslant 0\}$；集合 $\{(x,y)|y=x^2\}$ 表示抛物线 $y=x^2$ 上的点的全体，是点集(一条抛物线)；而集合 $\{y=x^2\}$ 则是用列举法表示的单元素集.

典型例题精讲

例1—1 下列各组对象能构成集合的是______.(选填序号)

(1) 我们学校的高一(1)班的男生

(2) 美丽的小鸟

(3) 关于 x 的方程 $ax^2+1=0$ 的实数解

(4) 某教室的桌子

(5) 著名的数学家

[切入] 看一组对象能否组成一个集合，只要看这组对象是否是确定的，即任何一个对象，要么在这一组之中，要么不在这组之中，没有第三种情况出现.

[解析] “美丽”和“著名”没有确定的标准，因此(2)(5)的对象不能构成集合，其他的都可以构成集合. 尽管(3)中，对于 a 的不同值，方程可能有实数解，也可能没有实数解，但一旦 a 给定后，方程的解的情况是确定的.

[答案] (1)(3)(4)可以构成集合

[点拨] 集合的元素的确定性决定了某一元素是否是集合中的元素，因而构成的集合的条件必须是明确的，即某组对象能否构成集合是根据这组对象是否是确定的，进而看确定对象的条件是否是确定的来判断.

例 1—2 (2002，潍坊高考模拟试题)设 a,b,c 为非零实数，则 $m=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合为 ( )

A. $\{4\}$ B. $\{-4\}$ C. $\{0\}$ D. $\{0,-4,4\}$

[切入] 对 a,b,c 的正负要分类讨论.

[解析] 当 a,b,c 全为正数时，$m=4$；当 a,b,c 全为负数时，$m=-4$；
a,b,c 中只有一个为负数时，$m=0$；a,b,c 中只有两个为负数时，$m=0$.
$\therefore$ 所组成的集合为 $\{0,-4,4\}$. 故选 D.

[点拨] (1)按 a,b,c 的正负恰当地分类是解题关键. (2)根据元素的互异性，相同元素在一个集合里只能算一个元素.

例 1—3 用另一种方法表示下列集合.

(1) $\{(x,y)\mid x+y=5,x,y\in\mathbf{N}\}$； (2) $\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-2)^2=0\}$；

(3) $\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}2x+y=8\\x-y=1\end{cases}\right\}$； (4) $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\right\}$；

(5) $\{2,3,4\}$； (6) x^2-9 的一次因式组成的集合.

[切入] 注意集合的两种表示方法的相互转化.

[解析] (1) 由 $x+y=5$，得 $y=5-x$. 又 $x,y\in\mathbf{N}$.
$\therefore 5-x\geqslant 0$，即 $x=0,1,2,3,4,5$.
对应的 y 值依次为 5,4,3,2,1,0. 又集合中的代表元素为 (x,y)，
$\therefore$ 集合中的元素为 $(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)$，
故用列举法表示为 $\{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$.
(2) 方程 $(x-1)^2+(y-2)^2=0$ 是关于 x、y 的二元二次方程，其解成对出现，即 (x,y) 是该方程的一组解，而方程的解为 $x=1$ 且 $y=2$.
$\therefore$ 此集合可表示为 $\{(1,2)\}$.
(3) 方程组的解是 $\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$
故此集合只有一个元素，用列举法表示为 $\{(3,2)\}$.
(4) 观察集合元素的结构特征不难发现：分子为 $n,n\in\mathbf{N}_+,n\leqslant 5$，分母为 $n+2,n\in\mathbf{N}_+,n\leqslant 5$. 故此集合用描述法表示为 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{n+2},n\in\mathbf{N}_+,n\leqslant 5\right\}$.

(5) 联想非零自然数,容易描述为$\{x|2\leqslant x\leqslant 4,x\in \mathbf{N}\}$.若联想 2,3,4 是方程$(x-2)(x-3)(x-4)=0$的解,则描述为$\{x|(x-2)(x-3)(x-4)=0\}$.

(6) $\because x^2-9=(x-3)(x+3)$,

$\therefore x^2-9$ 的一次因式组成的集合为$\{x-3,x+3\}$.

[点拨] 列举法和描述法是表示集合的两种解法,它们各有优劣,有时根据需要,我们需将集合的一种表示形式转化为另一种形式,但不是所有集合都能进行两种形式的互化的.如$\{(x,y)|y=x\}$就不能用列举法表示.

例 1—4 已知集合$A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$,若$1\in A$,求实数$a$的值.

[切入] $\because 1\in A$,$\therefore a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3$都可能为 1,则要分类讨论解决,但必须验证.

[解析] (1) 若$a+2=1$,则$a=-1$,此时$A=\{1,0,1\}$,这与集合中元素的互异性矛盾,应舍去.

(2) 若$(a+1)^2=1$,则$a=0$或$a=-2$.

当$a=0$时,$A=\{2,1,3\}$,满足题意;

当$a=-2$时,$A=\{0,1,1\}$,这与互异性矛盾,舍去.

(3) 若$a^2+3a+3=1$,则$a=-1$或$a=-2$(舍去).

当$a=-1$时,$A=\{1,0,1\}$,应舍去.

综上所述,$a=0$.

[点拨] 在研究元素与集合的关系时,元素的互异性往往起到检验的作用.

例 1—5 已知集合$A=\{x\in \mathbf{R}|ax^2+2x+1=0\}$,其中$a\in \mathbf{R}$.

(1) 1 是A中的一个元素,用列举法表示A;

(2) 若A中有且仅有一个元素,求a的值组成的集合B;

(3) 若A中至多有一个元素,试求a的取值范围.

[切入] 集合A中的元素即是方程$ax^2-3x+2=0$的解,A中元素的个数即是方程解的个数.

[解析] (1) $\because 1$是A的元素,

$\therefore 1$是方程$ax^2+2x+1=0$的一个根,

$\therefore a\times 1^2+2\times 1+1=0$,得$a=-3$.

$\therefore$方程即为$-3x^2+2x+1=0$.

$\therefore x_1=1,x_2=-\dfrac{1}{3}$,

$\therefore$集合$A=\left\{-\dfrac{1}{3},1\right\}$.

(2) 若$a=0$,方程化为$2x+1=0$,此时方程仅有一个根$x=-\dfrac{1}{2}$;

若$a\neq 0$,则当且仅当方程的判别式$\Delta=5-4a=0$,即$a=1$时,方程有两个相等的实根$x_1=x_2=1$.此时集合A中仅有一个元素.

$\therefore$所求集合$B=\{0,1\}$.

(3) 集合A中至多有一个元素包括两种情况:

① A中只有一个元素,此时,由(2)知,$a=0$,或$a=1$.

② A中一个元素也没有,即$A=\varnothing$.

此时 $a\neq0$，且 $\Delta=4-4a<0$，

$\therefore a>1$.

综合①②知，所求 a 的取值范围是 $\{a|a\geqslant1$，或 $a=0\}$.

[点拨] 题设中用描述法表示方程 $ax^2+2x+1=0$ 的实数解集，方程的系数变化直接导致方程根的变化，即集合中元素的变化. 三个问题各不相同，问题(1)是已知方程有一根为 1，求其他根，这一问题较容易；问题(2)中，方程仅有一根，包含两种情况：方程为一元一次方程或一元二次方程中有两实根相等；问题(3)中，方程至多有一个根，包括一个实根或无实根两种情况. 逐一讨论并弄清题意，转换成方程的问题来讨论是解决问题的关键.

练 考 篇

一级闯关题

1. 下列指定的对象，能构成集合的是 ( )

A. 圆周率 π 的近似值　　B. 平面上的三角形

C. 几乎与 0 相等的数　　D.《高一代数》中所有难题

2. 下列命题①集合 $\mathbf{N}$ 中最小的数为 1；②若 $-a\in\mathbf{N}$，则 $a\in\mathbf{N}$；③若 $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}_+$，则 $a+b\geqslant1$；④若 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}$，则 $a^2+b^2\geqslant0$. 其中正确命题的个数是 ( )

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

3. 已知集合 $M=\{x|x^3-2x^2-x+2=0\}$，则下列各数中不属于 M 的一个是 ( )

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -2

4. 已知集合 $A=\{x|x=c-2\sqrt{2},c\in\mathbf{Q}\}$，若 $a\in\mathbf{Q}$ 时，$m=-2+a\sqrt{2}\in A$，且 $n=(1-a^2)\sqrt{2}$，则 m、n 的大小关系是 ( )

A. $m<n$　　B. $m=n$　　C. $m>n$　　D. 无法确定

5. 已知集合 $A=\{a|\frac{6}{5-a}\in\mathbf{N}_+$，且 $a\in\mathbf{Z}\}$，则 A 为 ( )

A. $\{2,3\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$　　C. $\{1,2,3,6\}$　　D. $\{-1,2,3,4\}$

6. 下列四个命题中正确的是 ( )

①"所有相当小的正数"是一个集合　②集合 $\{x,y,z,x,w\}$ 中有 5 个元素　③$\{1,3,5,7\}$ 与 $\{7,5,3,1\}$ 表示同一个集合　④$\{x+y=0\}$ 表示坐标平面中第二、四象限角平分线上的点组成的集合

A. 仅有①③　　B. 仅有①②③　　C. 仅有③　　D. 仅有③④

7. 已知集合 $A=\{x|x-1<\sqrt{3},x\in\mathbf{R}\}$，则有 ( )

A. $3\in A$ 但 $-3\notin A$　　B. $3\in A$ 且 $-3\in A$

C. $3\notin A$ 且 $-3\notin A$　　D. $3\notin A$ 但 $-3\in A$

8. 下列结论正确的是 ( )

A. $M=\{x|x=a+b\sqrt{2},a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{N}\}$，$x_1\in M$，$x_2\in M$，则 $x_1\cdot x_2\in M$

B. {十亿以内的所有自然数}是无限集

C. $P=\{\pi\}$，$Q=\{3.14159\}$，则 P、Q 表示同一集合

D. $\{x|x=\frac{b}{a},a,b\in\mathbf{Z},a\neq0\}$，则 $x\in\mathbf{Q}$

9. 已知集合 $P=\{x|ax+b-x+2=0\}$是无限集，则实数 a，b 的取值是________.

10. 数集$\{a^2-a,2a\}$中 a 的取值集合为________.

11. 若 $A=\{x|x^2-(2a-1)x+a^2=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A=\varnothing$，求 a 的取值范围.

12. 设 A 表示集合$\{2,3,a^2+2a-3\}$，B 表示集合$\{|a+3|,2\}$，若已知 $5\in A$，且 $5\notin B$，求实数 a 的值.

13. 下面每组中各个集合的意义是否相同？说明理由.

(1) $\{1,5\}$，$\{(1,5)\}$，$\{5,1\}$，$\{(5,1)\}$；

(2) $\{x|x=0\}$，$\{(x,y)|x=0,y\in\mathbf{R}\}$；

(3) $\{x|x^2-ax-1=0\}$，$\{a|$方程 $x^2-ax-1=0$ 有实根$\}$.

14. 已知集合 $A=\{x|ax+b=1\}$，$B=\{x|ax-b>4\}$，其中 $a\neq0$. 若 A 中元素必为 B 的元素，求实数 b 的取值范围.

二级闯关题

15. 设集合 $A=\{x|x=(-1)^n,n\in\mathbf{N}_+\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$C=\{(x,y)|3x+2y=16,x\in\mathbf{N}_+,y\in\mathbf{N}_+\}$，$D=\{x\in\mathbf{Q}|1<x<2\}$，$E=\{$直角三角形$\}$，其中有限集的个数是（　）
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

16. 集合 $P=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$R=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$a\in P$，$b\in Q$，则有（　）
A. $a+b\in P$　　B. $a+b\in Q$
C. $a+b\in R$　　D. $a+b$ 不属于 P,Q,R 中任意一个

17. 关于 x 的方程 $ax+b=0$，当 a、b 满足条件________时，解集是有限集；满足________条件时，解集是无限集.

18. 已知 $3\in A$ 且 $A=\{1,a^2+a+1\}$ 则 $a^3=$________.

19. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|(a^2-1)x^2+(a+1)x+2=0\}$ 只有一个元素，试求实数 a 的值.

20. 设集合 $A=\{a|a=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$ 集合 $B=\{b|b=k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}\}$. 若 $a\in A$，试判断 a 与 B 的关系.

21. 设 $S=\{x|x=m+\sqrt{2}n$ 且 $m,n\in\mathbf{Z}\}$.
(1) 若 $a\in\mathbf{Z}$，则 a 是否是集合 S 的元素？
(2) S 中有任意两个元素 x_1 和 x_2，则 x_1+x_2，$x_1\cdot x_2$ 是否属于 S？
(3) 对于给定的整数 n，试求满足 $0<m+n\sqrt{2}<1$ 的 S 中元素的个数.

思考探究

22. 下面三个集合:①$\{x|y=x^2+1\}$,②$\{y|y=x^2+1\}$,③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$. 问:

(1) 它们是不是相同的集合?

(2)它们的各自的含义是什么?

23. 集合 $A=\{x|x=3n+1,n\in \mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=3n+2,n\in \mathbf{Z}\}$,$C=\{x|x=6n+3,n\in \mathbf{Z}\}$.

(1) 若 $c\in C$,求证必有 $a\in A$,$b\in B$ 使 $c=a+b$;

(2) 对任意的 $a\in A$,$b\in B$,是否一定有 $a+b\in C$? 证明你的结论.

导练 2　集合间的基本关系

导 学 篇

一、基 础 精 讲

1. 子集

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们说集合 A 就是集合 B 的子集. 也就是说，如果任一 $x\in A$，可以推出 $x\in B$，那么集合 A 就是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时，则记作 $A\not\subseteq B$ 或 $B\not\supseteq A$.

规定：空集是任何集合的子集. 也就是说，对于任何集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$.

2. 两个集合的相等

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时，集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$. 也就是说 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

3. 真子集

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）. 空集是任何一个非空集合的真子集.

二、重 点 研 习

1. 求集合的子集和补集

求一个给定集合的子集可以理解为求该集合的一部分元素构成的新集合，并且空集被规定为任一集合的子集. 对于求一个给定集合的补集，一定要注意它是在哪一个全集内求补集，也就是说同一集合在不同的全集中补集是不相同的.

2. 正确理解子集与真子集概念

如果“$A\subseteq B$”，那么有 $A=B$ 或 $A\subsetneqq B$，两种情况二者必居其一；而 $A\subsetneqq B$ 是不允许 $A=B$，所以若 $A\subseteq B$，则 $A\subsetneqq B$ 不一定成立，反之，$A\subsetneqq B$ 可以说 $A\subseteq B$；$A=B$ 也可说 $A\subseteq B$.

3. 注意区分一些容易混淆的符号

(1) $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别：$\in$ 是表示元素与集合之间的关系的. 因此，有 $1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$ 等；$\subseteq$ 表示集合与集合之间的关系的，因此，有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$ 等.

(2) a 与 $\{a\}$ 的区别：一般地，a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的一个集合，因此有 $1\in\{1,2,3\}$，$0\in\{0\}$，$\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$ 等，不能写成 $0=\{0\}$，$\{1\}\in\{1,2,3\}$，$1\subseteq\{1,2,$

3}等.

(3) $\{0\}$与$\varnothing$的区别：$\{0\}$是含有一个元素的集合，$\varnothing$是不含任何元素的集合，因此有$\varnothing\subseteq\{0\}$，不能写成$\varnothing=\{0\}$，$\varnothing\in\{0\}$等.

4. 若集合A含有n个元素，则A的子集有2^n个(以后证明)，真子集有(2^n-1)个，非空真子集有(2^n-2)个.

典型例题精讲

例2—1 选择适当的符号填空.

①0 ______ $\varnothing$；②0 ______ $\{0\}$；③$\varnothing$ ______ $\{0\}$；④$\{0\}$ ______ $\{\{0\},\varnothing\}$；⑤$\varnothing$ ______ $\{\varnothing\}$

[切入] 区分是元素与集合的从属关系还是集合与集合之间包含或相等的关系.

[解析] ①$\notin$；②$\in$；③$\subsetneqq$；④$\in$；⑤$\in$或$\subsetneqq$

[点拨] (1) 元素与集合之间的从属关系用$\notin$和$\in$表示，集合与集合之间的关系用“$\subseteq$”，“$\subsetneqq$”，“$=$”，“$\neq$”等表示.

(2) 这里第⑤题，若将$\varnothing$看作元素，应用$\varnothing\in\{\varnothing\}$，若将$\varnothing$看作集合，应用$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$.

(3) $\varnothing$是空集的记号，不能把空集记作$\{\varnothing\}$或{空集}. 应注意区分0，$\varnothing$，$\{0\}$，$\{\varnothing\}$. 0是数，是元素，不是集合；$\varnothing$表示空集，它不含任何元素.

例2—2 已知集合$P=\{x|x^2+x-6=0\}$与集合$Q=\{x|ax+1=0\}$满足$Q\subsetneqq P$，求a所有取值组成的集合A，并用列举法写出A的子集.

[切入] 根据$Q\subsetneqq P$求出满足条件的所有a的值，它组成的集合即为A，知道A的所有元素就很容易列举出所有A的子集.

[解析] 易知$P=\{-3,2\}$，当$Q=\varnothing$，$Q=\{-3\}$，$Q=\{2\}$时，$a=0,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}$，

$\therefore A=\{0,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\}$

A的子集为$\varnothing$，$\{0\}$，$\{\frac{1}{3}\}$，$\{-\frac{1}{2}\}$，$\{0,\frac{1}{3}\}$，$\{0,-\frac{1}{2}\}$，$\{\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\}$，$\{0,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\}$.

[点拨] 根据真子集的概念解此题，要特别注意方程$ax+1=0$无解，即$Q=\varnothing$，因为空集是任何非空集合的真子集.

例2—3 (2007，全国Ⅰ)设$a,b\in\mathbf{R}$，集合$\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则$b-a=$(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

[切入] 集合的相等是两集合中的元素对应相等，即集合A中的3个元素$1,a+b,a$在集合B中的3个元素$0,\frac{b}{a},b$寻找对应相等来求解a,b的值.

[解析] 由集合$\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$的特征知，

$$\begin{cases}a+b=0\\ \dfrac{b}{a}=a\\ b=1\end{cases}$$ 解得 $a=-1,b=1$ 即 $b-a=2$. 故选 C.

[点拨] 由于$\dfrac{b}{a}$中 $a\neq 0$,故两集合相等中只存在 $a+b=0$ 一种选择,又由 $a+b=0$ 知 $a\neq b$,故只有 $a=\dfrac{b}{a}$一种选择. 这样我们将多种分类讨论根据题目条件的特点的分析转化为无需用分类讨论进行解决.

例 2—4 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-8=0\}$,$B=\{x|x^2+2ax+a^2-12=0\}$,求满足 $B\subseteq A$的 a 值组成的集合.

[切入] 欲求 a 值的范围,需列一个关于 a 的不等式,还可利用 $B\subseteq A$,另外要考虑到 B 可为空集.

[解析] 易得 $A=\{-2,4\}$,B 是 x 的方程 $x^2+2ax+a^2-12=0$ 的解集.

$\because B\subseteq A$,$\therefore B$ 可为$\varnothing$,$\{-2\}$,$\{4\}$,$\{-2,4\}$.

若 $B=\varnothing$,而 $\Delta=4a^2-4(a^2-12)=48>0$,故 $B\neq\varnothing$;

若 $B=\{-2\}$,则方程 $x^2+2ax+a^2-12=0$ 有两个相等的根,由根与系数的关系,则 $-2a=-4$且 $a^2-12=4\Rightarrow a$ 不存在;

若 $B=\{4\}$,则 $-2a=-8$ 且 $a^2-12=16\Rightarrow a$ 不存在;

若 $B=\{-2,4\}$,则 $-2a=2$ 且 $a^2-12=-8$,无解.

综上可知,满足 $B\subseteq A$ 的 a 值组成的集合为$\varnothing$.

[点拨] 考虑 B 可取$\varnothing$,$\{-2\}$,$\{4\}$,$\{-2,4\}$这四种情况,且$\{-2\}$,$\{4\}$对应方程有两等根.

例 2—5 已知集合 $A=\{x||x-a|=4\}$,集合 $B=\{1,2,b\}$.

(1) 是否存在实数 a 的值,使得对于任意实数 b 都有 $A\subseteq B$? 若存在,求出对应的 a;若不存在,试说明理由;

(2) 若 $A\subseteq B$ 成立,求出对应的实数对(a,b).

[切入] 集合 A、B 均为有限集合,可以直接根据元素间的相等关系来判断或求出对应的实数 a,b,同时要注意展开必要的讨论.

[解析] (1) 对任意的实数 b 都有 $A\subseteq B$,则当且仅当 1,2 也是 A 中的元素,

$\because A=\{a-4,a+4\}$

$\therefore \begin{cases}a-4=1\\a+4=2\end{cases}$或$\begin{cases}a-4=2\\a+4=1\end{cases}$这都不可能,$\therefore$这样的实数 a 不存在;

(2) 由(1)易知欲 $A\subseteq B$,当且仅当

$\begin{cases}a-4=1\\a+4=b\end{cases}$或$\begin{cases}a-4=2\\a+4=b\end{cases}$或$\begin{cases}a-4=b\\a+4=1\end{cases}$或$\begin{cases}a-4=b\\a+4=2\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=5\\b=9\end{cases}$或$\begin{cases}a=6\\b=10\end{cases}$或$\begin{cases}a=-3\\b=-7\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=-6\end{cases}$

[点拨] 若 $A\subseteq B$,则对 A 中任一元素 a,也一定是集合 B 的元素,当集合中元素是不确定的字母时,要注意根据题设条件进行分类讨论.