新世纪高等院校精品教材

JIXIE ZHENDONGXUE

机械振动学

（线性系统）

修订版

程耀东　李培玉　编著

浙江大學出版社

机 械 振 动 学

（线性系统）

修订版

程耀东　李培玉　编著

浙江大学出版社

内容简介

本书介绍线性离散系统机械振动的基本概念、原理和分析方法，列举了许多工程技术实例。

全书共六章：机械振动学基础、单自由度系统、两自由度系统、多自由度系统、多自由度系统的数值方法和振动控制。附有习题及部分答案。

本书可作为工科有关专业大学生或研究生的教科书或参考书，能在 34～40 学时内授完。也可供有关工程技术人员和研究人员自学或参考。

图书在版编目（CIP）数据

机械振动学（线性系统）/程耀东编. —杭州：浙江大学出版社，1988.11（2002 重印）

ISBN 7-308-00090-7

Ⅰ.机…　Ⅱ.程…　Ⅲ.机械振动—高等学校—教材　Ⅳ.TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 095152 号

出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（网址：http://www.zjupress.com）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）

责任编辑　樊晓燕

排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心

印　　刷　德清第二印刷厂

开　　本　850mm×1168mm　1/32

印　　张　8

字　　数　200 千

版 印 次　2005 年 4 月第 2 版　　2006 年12月第 14 次印刷

印　　数　32001—34000

书　　号　ISBN 7-308-00090-7/TH・058

定　　价　10.00 元

再版说明

机械振动学(线性系统)是一本面向工程的基础理论教材。实践和时间的检验表明,它的基本内容和框架是合理和适当的。本书初版至今已十几年了,一直被许多大学的相关专业所选用。作者对广大读者的关心和帮助表示深深的谢意,对浙江大学出版社的支持表示感谢!

这次再版,对内容做了一些修改和补充,根据现代工程的需要,增添了“振动控制”一章,在其他章节中增加了一些内容和实例。

衷心希望广大读者继续给予帮助和指正。

程耀东　李培玉

2005 年 4 月

前　　言

本教材是根据作者近几年的教学实践和对原编讲义多次修改(其中一次是和贾俶仕同志一起重编的)而重新编写的。编写时,力图用较小的篇幅,系统地表述出机械振动学的基本内容,使读者能在较短的时间内掌握机械振动学的基本概念、原理和分析方法,为实际应用创造条件。

离散线性系统(以后简称线性系统)的振动原理和分析方法是机械振动学的基础,也是解决现代许多科学技术和工程实际问题中振动和动态问题的理论根据。因此它是读者必须或首先要学习的内容,有必要把它编成一册以满足不同的要求。

虽然,一些读者已在理论力学课程中学过单自由度系统的振动原理,实践表明,几乎对于所有学生学习这一内容都是必要的,因为它是线性系统振动学的基础。在理论力学的教学中,不可能像本课程一样,对这一内容进行扩展和深化,介绍许多有意义的实际应用,完成许多有典型意义的作业,因而也不可能使读者牢固地、深刻地和明确地建立起正确的概念,掌握基本的原理和分析方法。

考虑到现代结构动力学发展和计算机应用的需要,本教程在多自由度系统振动理论的讨论中,应用了线性代数的分析方法,着重介绍了模态分析技术,并对两自由度系统进行讨论,以阐明多自由度系统的一些概念。本书第一章是一些基础知识,第五章介绍了数值计算方法,故都可以作为自学的内容。其他章节中有些内容必

要时也可让学生自学。

为了提高读者分析问题的能力，本教程收集了许多典型的例题和习题。在内容的叙述上，力求表明思考和分析的逻辑。考虑到读者的自学方便，尽量给出习题的答案，以便读者自校和思考。

在本书的编写和出版过程中，得到了多方面的支持、关心和帮助；庄表中教授对初稿作了细心地审查，提出了许多宝贵意见；徐杏珍同志为本书绘制了许多附图。编者在此谨对他们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中错误和不妥之处在所难免，祈请读者给予批评和指正，不胜感激。

程耀东

目　　录

第一章

机械振动学基础

第一节　引　　言

机械系统振动问题的研究包括以下几方面的内容：

1. 建立物理模型

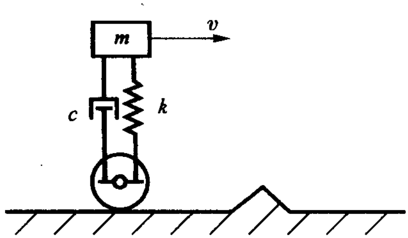

图 1.1-1

要进行机械系统振动的研究，就应当确定与所研究问题有关的系统元件和外界因素。比如，汽车由于颠簸将产生垂直方向的振动。组成汽车的大量元件都或多或少地影响到它的性能。然而，汽车的车身及其他元件的变形比汽车相对于道路的运动要小得多，弹簧和轮胎的柔性比车身的柔性要大得多。因而，根据工程分析的要求，我们可以用一个简化的物理模型来描述它。或者说，为了确定汽车由于颠簸而产生的振动，可以建立一个理想的物理系统，它对外界作用的响应，从工程分析的要求来衡量，将和实际系统接近。应当指出，一个物理模型对于某种分析是适合的，并不表示对于其他的分析也适合。如果要提高分析的精度，就可能需

要更高近似程度的物理模型。图 1.1-1 和图 1.1-2 是分析汽车由于颠簸产生振动的两个物理模型。

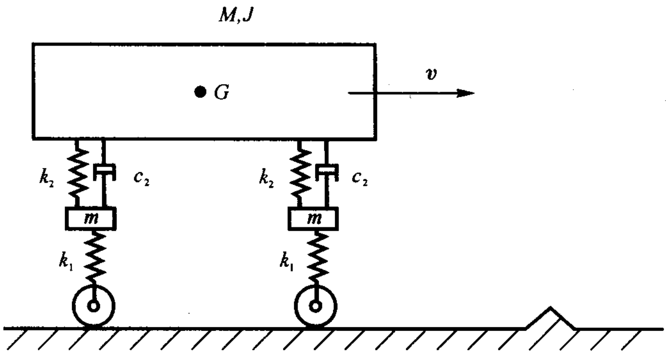

图 1.1-2　站在垂直振动台上的人体简化机械系统

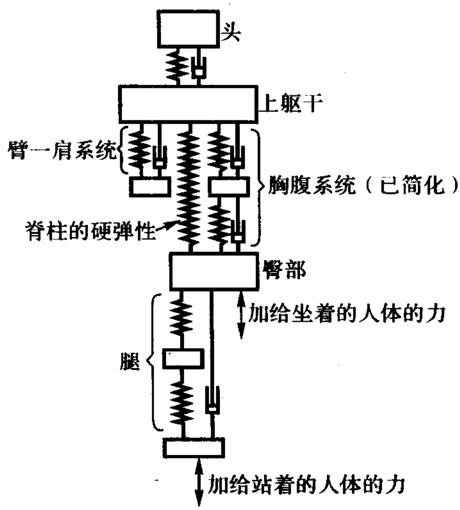

图 1.1-3　站在垂直振动台上的人体简化机械系统

在低频和低振级的情况下，若把人体看做一个机械系统，就可以用图 1.1-3 所示形式的线性集总参量系统来粗略近似。

不幸的是，怎样才能得到一个确切描述实际系统的物理模型还没有一般的规则。这通常取决于研究者的经验和才智。

2. 建立数学模型

有了所研究系统的物理模型，就可应用某些物理定律对物理模型进行分析，以导出一个或几个描述系统特性的方程。通常，振动问题的数学模型表现为微分方程的形式。

3. 方程的求解

要了解系统所发生运动的特点和规律，就要对数学模型进行求解，以得到描述系统运动的数学表达式。通常，这种数学表达式是位移表达式，表示为时间的函数。表达式表明了系统运动与系统性质和外界作用的关系。

4. 结果的阐述

根据方程解提供的规律和系统的工作要求及结构特点，我们就可作出设计或改进的决断，以获得问题的最佳解决方案。

本教程的重点是论述机械振动系统的数学模型的建立和方程的求解这两个问题。

第二节　机械振动的运动学概念

机械振动是一种特殊形式的运动。在这种运动过程中，机械振动系统将围绕其平衡位置作往复运动。从运动学的观点看，机械振动是研究机械系统的某些物理量（比如位移、速度和加速度）在某一数值近旁随时间 t 变化的规律。这种规律如果是确定的，则可以用函数关系式

$$x=x(t) \tag{1.2-1}$$

来描述其运动。如果运动的函数值，对于相差常数 T 的不同时间有相同的数值，亦即可以用周期函数

$$x(t)=x(t+nT) \quad n=1,2,\cdots \tag{1.2-2}$$

来表示，则这一运动是周期运动。方程(1.2-2)中的最小值 T(也就是运动往复一次所需的时间间隔)叫做振动的周期。周期的倒数，即

$$f=\frac{1}{T} \tag{1.2-3}$$

定义为振动的频率。频率的单位为 Hz。

还有一类振动，如机械系统受到冲击而产生的振动，旋转机械在起动过程中产生的振动，它们没有一定的周期，是非周期运动。至于车辆在行走过程中的振动，一般不能用确定的时间函数来表达，因此我们不可能预测某一时刻振动物理量的确定值。这种振动称为随机振动，它要用概率统计的方法去研究。

简谐振动是最简单的振动，也是最简单的周期运动。

一、简谐振动

物体作简谐振动时，位移 x 和时间 t 的关系可用三角函数表示为

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\psi\right) \tag{1.2-4}$$

式中：A 是运动的最大位移，称为振幅；T 是从某一时刻的运动状态开始再回到该状态时所经历的时间，称为周期；φ 和 ψ 决定了开始振动时($t=0$)点的位置，称为初相角，有 $\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi$。

图 1.2-1 右边所示的正弦波形[①]表示了式(1.2-4)所描述的运动，它也可看成是该左边半径为 A 的圆上一点作等角速度运动时在 x 轴上的投影。角速度 ω 称为简谐振动的角频率或圆频率，单位为 rad/s，可表示为

---

① 如果按式(1.2-4)中余弦函数表示，通常也叫做正弦波。

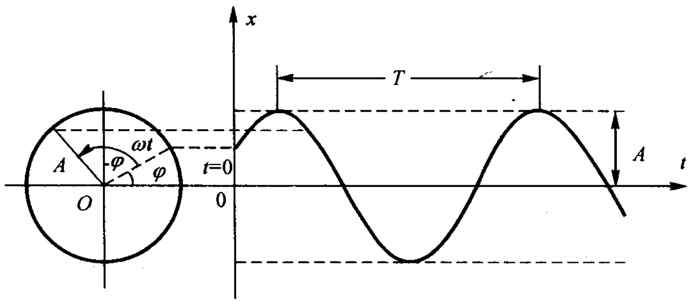

图 1.2-1

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{1.2-5}$$

它与频率 f 有关系式

$$\omega=2\pi f \tag{1.2-6}$$

通常，ω 也简称为频率。

简谐振动的速度和加速度就是位移表达式(1.2-4)关于时间 t 的一阶和二阶导数，即

$$\begin{aligned} v &= \dot{x}=A\omega\cos(\omega t+\psi) \\ &= A\omega\sin\left(\omega t+\psi+\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.2-7}$$

$$\begin{aligned} a &= \ddot{x}=-A\omega^2\sin(\omega t+\psi) \\ &= A\omega^2\sin(\omega t+\psi+\pi) \end{aligned} \tag{1.2-8}$$

可见，若位移为简谐函数，其速度和加速度也是简谐函数，且具有相同的频率。只不过在相位上，速度和加速度分别超前位移 90°和 180°。从物理意义上看，加速度比速度超前 $\frac{\pi}{2}/\omega$ 秒，速度比位移超前 $\frac{\pi}{2}/\omega$ 秒。因此在物体运动前加速度是最早出现的量。

从 $\ddot{x}=-\omega^2 x$

可以看出，简谐振动的加速度，其大小与位移成正比，而方向与位移相反，始终指向平衡位置。这是简谐振动的重要特征。

在振动分析中，有时我们用旋转矢量来表示简谐振动。旋转矢量的模为振幅 A，角速度为角频率 ω，如图 1.2-2 所示。

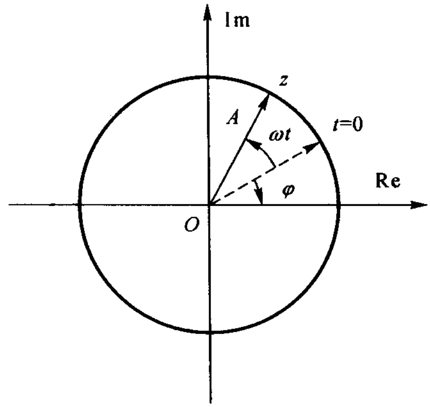

图 1.2-2

若用复数来表示，则有

$$
\begin{aligned}
z &= Ae^{j(\omega t+\psi)} \\
&= A\cos(\omega t+\psi) \\
&\quad + jA\sin(\omega t+\psi)
\end{aligned} \tag{1.2-9}
$$

式中，j 是虚数单位，即

$$j=\sqrt{-1}$$

复数 z 的实部和虚部可分别表示为

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= A\cos(\omega t+\psi) \\ \operatorname{Im} z &= A\sin(\omega t+\psi) \end{aligned}\right\} \tag{1.2-10}$$

这时，简谐振动的位移 x 可表示为

$$x=\operatorname{Im}[Ae^{j(\omega t+\psi)}] \tag{1.2-11}$$

同时，简谐振动的速度和加速度可表示为

$$v=\dot{x}=\operatorname{Im}[j\omega Ae^{j(\omega t+\psi)}]=\operatorname{Im}[A\omega e^{j(\omega t+\psi+\pi/2)}] \tag{1.2-12}$$

$$a=\ddot{x}=\operatorname{Im}[-\omega^2 Ae^{j(\omega t+\psi)}]=\operatorname{Im}[A\omega^2 e^{j(\omega t+\psi+\pi)}] \tag{1.2-13}$$

用复指数形式描述简谐振动，给运算带来很多方便。因为复指数 $e^{j\omega t}$ 对时间 t 求导一次相当于在其前乘以 $j\omega$，而每乘一次 j，相当于有初相角 $\frac{\pi}{2}$。在用复指数表示时，计算结果有时不一定都要写上 Im（对于正弦函数）或 Re（对于余弦函数），仍可用复指数原式表示。这时，作为物理现象，只要考虑它的虚部或实部就行。

图 1.2-3 表示了位移、速度和加速度的旋转矢量关系（当 $\psi=$

0)。

式(1.2-9)也可改写为

$$z=Ae^{j\psi}e^{j\omega t}=\overline{A}e^{j\omega t} \quad (1.2\text{-}14)$$

式中

$$\overline{A}=Ae^{j\psi} \quad (1.2\text{-}15)$$

是一复数，称为复振幅。它包含振动的振幅和相角两个信息。在振动分析时，由于它会给运算带来许多方便而常常得到应用。

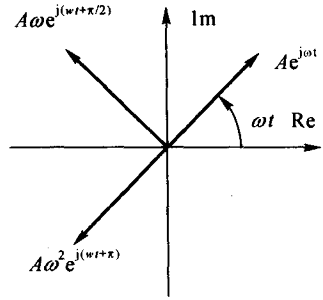

图 1.2-3

二、周期振动

在实际问题中，有许多周期振动的例子。我们知道，任何周期函数，只要满足条件：1)函数在一个周期内连续或只有有限个间断点，且间断点上函数左右极限存在；2)在一个周期内，只有有限个极大和极小值，则都可展开成为 Fourier 级数的形式。

假定 $x(t)$是满足上述条件，周期为 T 的周期振动函数，则可展开成 Fourier 级数的形式。此时，有

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \cdots \\ &\quad + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t) \end{aligned} \quad (1.2\text{-}16)$$

式中 $\omega = 2\pi/T$，为基频。$a_0, a_1, a_2, \cdots$ 和 $b_1, b_2, \cdots$ 都是待定的常数，由下列关系式求得：

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t \quad n = 1,2,3,\cdots$$

对于某一特定的 n，我们可得

$$a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t = A_n\sin(n\omega t + \psi_n)$$

式中

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \tan\psi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

于是，方程(1.2-16)又可表示为

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\omega t + \psi_n) \tag{1.2-17}$$

三、简谐振动的合成

(一)同方向振动的合成

1. 两个同频率振动的合成

有两个同频率的简谐振动

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \psi_1), \quad x_2 = A_2\sin(\omega t + \psi_2)$$

它们的合成运动也是该频率的简谐振动

$$x = A\sin(\omega t + \psi)$$

式中

$$A = \sqrt{(A_1\cos\psi_1 + A_2\cos\psi_2)^2 + (A_1\sin\psi_1 + A_2\sin\psi_2)^2}$$

$$\tan\psi = \frac{A_1\sin\psi_1 + A_2\sin\psi_2}{A_1\cos\psi_1 + A_2\cos\psi_2}$$

2. 两个不同频率振动的合成

有两个不同频率的简谐振动

$$x_1 = A_1\sin\omega_1 t$$

$$x_2 = A_2\sin\omega_2 t$$

若 $\omega_1 < \omega_2$，则合成运动为

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A_1\sin\omega_1 t + A_2\sin\omega_2 t \end{aligned}$$

其图形如图 1.2-4 所示。