

初級數學手冊

原著者 M. Я. 魏戈茨基
譯者 周 恆 濤
校閱者 許國保 嚴忠鋒

上海中外書局出版

1955

初級數學手冊
СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ

原 著 者	М. Я. Выгодский
原 出 版 者	государственное издательство технико-теоретической литературы
原出版版次	1955 年 3 月第八版
譯 者	周 恆 濤
校 閱 者	許 國 保 嚴 忠 鐸
出 版 者	中 外 書 局 上海中山東一路18號
排 版 者	務本謝記印刷製版所 上海武定路537弄66號
印 刷 者	新 星 印 刷 廠 上海天潼路318弄78號
總 經 售	上 海 圖 書 發 行 公 司 上 海 山 東 中 路 128 號

版權所有 ★ 不可翻印

書號: 0050 開本: 787×1092, 1/32 印張: 10¹⁴/32
字數: 391 千字 定價: 三元一角
1955 年 11 月第一版第一次印刷 印數 0001—3500 冊

內 容 提 要

本手冊係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社 (государственное издательство технико-теоретической литературы) 一九五五年3月出版的魏戈茨基 (М. Я. Выгодский) 所編的初級數學手冊 (справочник по элементарной математике) 一書第八版譯出。

本手冊包含蘇聯中學教學大綱中關於數學方面 (算術, 代數, 幾何, 三角) 的全部材料。另外還解釋了不包括在教學大綱以內的一系列的問題, 對於工業與農業人員的實際工作是重要的。近似數的計算尤特別注意。

本手冊包含兩種性質的內容: 第一種, 本書中提供了實際參考的材料。所有的定義、規則、公式和定理都同時列有例題; 並說明需要在什麼情形下及怎樣應用規則, 需要避免什麼錯誤等等。第二種, 本書解釋了初等數學的基本概念及最重要的方法。並特別提供了有關算術、代數、幾何與三角發展的歷史資料, 這些資料是爲了瞭解本書敘述的問題所必需。

這本手冊的內容

這本手冊包含中學教學大綱中關於數學方面(算術,代數,幾何,三角)的全部材料。另外在這裏解釋了一系列的問題,它們不包括在教學大綱以內,可是對於工業與農業人員的實際工作是重要的。近似數的計算尤特別注意。

這本書包含兩種性質的內容。

第一種,這裏提供了實際參考的材料:例如最大公約數是什麼,正切是什麼等等;怎樣計算百分數,怎樣作正五邊形等等;應用哪一公式解二次方程,求圓錐台(又叫做平錐體)的體積等等。這一些參考材料可以利用按字母順序排列的索引(在書末)《立刻》查到。所有的定義、規則、公式和定理都同時列有例題;並說明需要在什麼情形下及怎樣應用規則,需要避免什麼錯誤等等。

第二種,這裏解釋了初等數學的基本概念及最重要的方法。為什麼在數學裏要引用負數或虛數?為什麼負數乘上負數,我們得到正數?怎樣計算對數表?這一類性質的問題一般說在學校教科書裏討論不到的;因此我們多加注意。我們特別提供了有關算術,代數,幾何與三角發展的歷史資料,這些資料是爲了瞭解本書敘述的問題所必需的。

這本手冊雖然寫得很緊湊,可是敘述得足夠詳細,使得沒有通曉某一部份的讀者也可依靠本書來學習。當然,這裏沒有證明和推導;這就是手冊和教科書不同的地方。

但是有時我們也將推導列出來。這是在學校教科書中的相應問題或是完全沒有討論到,或是敘說得不夠使人滿意的情形下才如此做的。例如在有關複數的各節中的敘述甚至比學校教科書的敘述還要詳細得多。

要查有關某一點材料的讀者可以在所有說明該材料的概念與方法各節中找到參考。羅馬數字指篇數;阿拉伯數字指節數。

同時著者懇切勸告，凡不是偶然需要參考這一本書的讀者，將所要參考的部份《完全》流覽一遍。

作者謹向所有提出意見及期望的人們致深切的謝意。除去前幾版序言所列出的人以外，作者必需特別感謝下士 Г. Т. 布迪夫欽科，兵士 К. М. 貝列科夫，兵士 В. П. 德羅諾夫，工程師 И. И. 伊林斯基，工程師 卡爾努霍娃，工長 М. И. 克利沃夫，測量技師 И. М. 蘭金，學生 Р. Ф. 奧爾費葉夫，工長 Е. С. 巴甫洛夫，學生 Л. 潘羣林，集體農莊隊長 А. Г. 彼得洛夫，實習員 Г. 薩里穆里娜，教員 К. А. 特羅依茨基和中士 А. И. 契庫林。

對於所有願意通知作者有關修正及期望的意見的人，作者謹致深切的謝意（通信地址：Москва 120, 4-й Сыромятнический п., $\frac{3}{5}$ кв. 105, М. Я. Выгодскому）。

М. 魏戈茨基

目 錄

這本手冊的內容	1
---------------	---

I. 表

§ 1. 幾個常常遇到的常數	1
§ 2. 乘方根, 倒量, 圓周長, 圓面積, 自然對數	2
§ 3. 常用對數	6
§ 4. 反對數	11
§ 5. 三角函數值的對數	16
§ 6. 正弦與餘弦	24
§ 7. 正切與餘切	28
§ 8. 度數化為弧度數	36
§ 9. 弧度數化為度數	37
§ 10. 6000 以內的素數表	38
§ 11. 幾個數學符號	40
§ 12. 拉丁字母表	41
§ 13. 希臘字母表	41

II. 算 術

§ 1. 算術的對象	42
§ 2. 整數(自然數)	42
§ 3. 計數的範圍	42
§ 4. 計算的十進位制	44
§ 5. 數的概念的發展	45
§ 6. 數字	45
§ 7. 幾種民族的命數制	46
§ 8. 大數目的名稱	52
§ 9. 算術運算	52
§ 10. 運算的次序; 括號	54
§ 11. 整除性質的判別	55
§ 12. 素數與合成數	57
§ 13. 分解為素因數的運算	58

§ 14.	最大公約數	58
§ 15.	最小公倍數	59
§ 16.	簡單分數	60
§ 17.	分數的約簡與《擴展》	60
§ 18.	分數的比較；通分	61
§ 19.	分數的加法與減法	62
§ 20.	分數乘法。定義	63
§ 21.	分數乘法。規則	64
§ 22.	分數除法	65
§ 23.	含有零的運算	65
§ 24.	全部與部份	66
§ 25.	小數	67
§ 26.	小數的性質	68
§ 27.	小數的加法、減法與乘法	69
§ 28.	整數除小數的運算	69
§ 29.	小數除小數的運算	71
§ 30.	小數化分數及逆運算	71
§ 31.	分數的歷史資料	72
§ 32.	百分數	73
§ 33.	關於近似的計算	75
§ 34.	近似數的書寫方法	76
§ 35.	化整的規則	76
§ 36.	絕對與相對誤差	77
§ 37.	加減運算時的預先化整	79
§ 38.	和與差的誤差	80
§ 39.	乘積的誤差	82
§ 40.	相乘時正確位數的計算	83
§ 41.	簡化乘法	85
§ 42.	近似數的除法	87
§ 43.	簡化除法	88
§ 44.	近似數的乘方與開平方	89
§ 45.	平均數值	91
§ 46.	算術平均值的簡化計算	92
§ 47.	算術平均值的準確度	93
§ 48.	比與比例	94
§ 49.	比例	95
§ 50.	比例的實際應用。內插法	96

III. 代 數 學

§ 1. 代數學的對象	99
§ 2. 代數學的發展史	99
§ 3. 負數	103
§ 4. 負數的起源和負數的運算規則	105
§ 5. 負數和正數的運算規則	107
§ 6. 單項式的運算; 多項式的加法和減法	109
§ 7. 和與多項式的乘法	110
§ 8. 簡化多項式乘法的公式	111
§ 9. 和與多項式的除法	112
§ 10. 多項式除以二項一次式	114
§ 11. 二項式 $x^m \mp a^m$ 被 $x \mp a$ 整除	115
§ 12. 多項式分解爲因式	116
§ 13. 代數分式	117
§ 14. 比例	119
§ 15. 爲什麼需要方程	120
§ 16. 方程怎樣組成	121
§ 17. 有關方程的一般知識	122
§ 18. 同解方程。解方程的基本方法	123
§ 19. 方程的分類	124
§ 20. 一元一次方程	125
§ 21. 兩個二元一次聯立方程	126
§ 22. 兩個二元一次聯立方程的解法	127
§ 23. 解二元一次聯立方程的一般公式和特殊情況	130
§ 24. 三元一次聯立方程	132
§ 25. 冪的運算規則	136
§ 26. 根的運算	137
§ 27. 無理數	139
§ 28. 二次方程; 虛數和複數	141
§ 29. 二次方程的解法	142
§ 30. 二次方程的根的性質	145
§ 31. 二次三項式分解爲因式	146
§ 32. 用二次方程來解高次方程	146
§ 33. 二元二次聯立方程	147
§ 34. 複數	149
§ 35. 複數的基本定則	150

§ 36. 複數的加法	150
§ 37. 複數的減法	151
§ 38. 複數的乘法	151
§ 39. 複數的除法	152
§ 40. 複數的幾何表示法	153
§ 41. 複數的模數和幅角	154
§ 42. 複數的三角形式	156
§ 43. 兩複數相加及相減的幾何意義	157
§ 44. 兩複數相乘的幾何意義	159
§ 45. 兩複數相除的幾何意義	161
§ 46. 複數的整次幕	162
§ 47. 複數的開方	163
§ 48. 複數自乘任意實次幕	166
§ 49. 有關高次代數方程的一些知識	167
§ 50. 不等式概論	169
§ 51. 不等式的基本性質	170
§ 52. 幾個重要的不等式	171
§ 53. 同解不等式。解不等式的基本方法	174
§ 54. 不等式的分類	175
§ 55. 一元一次不等式	176
§ 56. 聯立一次不等式	176
§ 57. 最簡單的一元二次不等式	177
§ 58. 一元二次不等式(一般情況)	178
§ 59. 算術級數	179
§ 60. 幾何級數	180
§ 61. 負幕指數, 零幕指數與分數幕指數	181
§ 62. 對數方法的本質; 對數表的造法	183
§ 63. 對數的基本性質	185
§ 64. 自然對數; 數 e	187
§ 65. 常用對數	189
§ 66. 人爲形式的負對數的運算	190
§ 67. 從數求對數	193
§ 68. 從對數求數	195
§ 69. 反對數表	196
§ 70. 對數計算的例子	197
§ 71. 結合	199
§ 72. 牛頓二項式	202

IV. 幾何學

A. 幾何作圖

1. 過一已知點 C 作一直線與一已知直線 AB 平行	206
2. 平分一已知線段 AB	206
3. 將一已知線段 AB 分爲一定數目的相等部份	206
4. 將已知線段分爲與各已知量成比例的部份	206
5. 過一直線 MN 上一已知點 A 作這直線的垂線	207
6. 從一已知點 C 作直線 MN 的垂線	207
7. 已知頂點 K 與射線 KM , 求作一角等於已知角 ABC	207
8. 求作 60° 角及 30° 角	208
9. 求作 45° 角	208
10. 平分一已知角 BAC	208
11. 將已知 BAC 角分爲三等份	208
12. 用已知半徑 r 作一圓通過兩已知點 A 與 B	208
13. 過三已知點 A, B, C (不在一條直線上) 作一圓	209
14. 求已知圓弧的圓心	209
15. 平分一已知圓弧	209
16. 求對已知線段 AB 張已知角度 α 的點的軌跡	209
17. 過一已知點 A 作一切線與一已知圓相切	209
18. 作兩已知圓的公共外切線	210
19. 作兩已知圓的公共內切線	210
20. 作一已知三角形 ABC 的外接圓	211
21. 作一已知三角形 ABC 的內切圓	211
22. 作一已知矩形 (或正方形) $ABCD$ 的外接圓	211
23. 作一菱形 (或正方形) $ABCD$ 的內切圓	211
24. 作一已知正多邊形的外接圓	212
25. 作一已知正多邊形的內切圓	212
26. 按照三邊 a, b 與 c 作三角形	212
27. 已知二邊 a 與 b 及一角 α , 作一平行四邊形	212
28. 已知底邊與高, 作一矩形	213
29. 已知一邊, 作正方形	213
30. 已知一對角線 AB , 作正方形	213
31. 在已知圓內作一內接正方形	213
32. 作已知圓的外切正方形	213
33. 作一已知圓的內接正五邊形	213

34. 作一已知圓的內接正六邊形與等邊三角形	213
35. 作一已知圓的內接正八邊形	214
36. 作一已知圓的內接正十邊形	214
37. 作一已知圓的外切正三角形, 正五邊形, 正六邊形, 正八邊形, 正十邊形	214
38. 在已知一邊 a 上作正 n 邊形	214

F. 平面幾何學

§ 1. 幾何學的對象	215
§ 2. 關於幾何學發展的歷史資料	215
§ 3. 定理, 公理, 定義	217
§ 4. 直線, 射線, 線段	218
§ 5. 角	218
§ 6. 多邊形	220
§ 7. 三角形	221
§ 8. 兩三角形全等的性質	222
§ 9. 三角形中一些重要的線和點	223
§ 10. 正投影; 三角形三邊間的相互關係	225
§ 11. 平行線	226
§ 12. 平行四邊形與梯形	228
§ 13. 平面圖形的相似, 兩三角形相似的性質	229
§ 14. 軌跡. 圓與圓周	231
§ 15. 圓內的角; 圓周與弧的長度	232
§ 16. 圓內角的量法	235
§ 17. 點的羅	236
§ 18. 根軸; 根心	237
§ 19. 內接與外切多邊形	239
§ 20. 正多邊形	240
§ 21. 平面圖形的面積	241

B. 立體幾何學

§ 1. 概述	243
§ 2. 基本概念	244
§ 3. 角	245
§ 4. 投影	246
§ 5. 多面角	248
§ 6. 多面體; 角柱, 平行六面體, 角錐	249

§ 7. 柱	251
§ 8. 錐	253
§ 9. 圓錐曲線	254
§ 10. 球	255
§ 11. 球面多邊形	256
§ 12. 球的部份	258
§ 13. 球的切面, 柱的切面與錐的切面	259
§ 14. 立體角	260
§ 15. 正多面體	262
§ 16. 對稱	262
§ 17. 平面圖形的對稱	265
§ 18. 物體的相似	265
§ 19. 物體的體積與表面積	267

V. 三 角

§ 1. 三角的對象	270
§ 2. 三角的發展史	270
§ 3. 角的弧度量法	272
§ 4. 度數與弧度的量度的相互變換	274
§ 5. 銳角的三角函數	275
§ 6. 從角求三角函數	277
§ 7. 從角度的三角函數求角	279
§ 8. 直角三角形的解法	280
§ 9. 三角函數的對數表	281
§ 10. 從角度求三角函數的對數	282
§ 11. 從三角函數的對數求角度	284
§ 12. 利用對數解直角三角形	285
§ 13. 解直角三角形的實際應用	287
§ 14. 同一角的三角函數間的相互關係	288
§ 15. 任意角的三角函數	288
§ 16. 簡化的公式	290
§ 17. 和角與差角的公式	294
§ 18. 倍角, 三倍角與半角公式	294
§ 19. 三角表示式變換為便於用對數計算的形式	294
§ 20. 把含有三角形各角的式子變換為可取對數的形式	295
§ 21. 幾個重要的關係式	296
§ 22. 三角形各元素間的基本關係	297

§ 23.	斜角三角形的解法	299
§ 24.	反三角(圓)函數	304
§ 25.	反三角函數的基本關係	306
§ 26.	三角函數表的編製	307
§ 27.	三角方程	308
§ 28.	三角方程的解法	310

VI. 函數, 圖象

§ 1.	定量與變量	315
§ 2.	兩變量間的函數關係	315
§ 3.	反函數	316
§ 4.	用表與公式表示函數	316
§ 5.	函數的表示法	317
§ 6.	坐標	318
§ 7.	函數的圖示法	319
§ 8.	最簡單的函數與它們的圖象	320
§ 9.	方程的圖解法	329
§ 10.	不等式的圖解法	331
§ 11.	關於解析幾何學課目的概念	334
§ 12.	極限	336
§ 13.	無限小與無限大的量	337
	索引	339

I. 表

§ 1. 幾個常常遇到的常數

量	n	$\lg n$	量	n	$\lg n$
π	3.1416	0.4971	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0.6828	$\bar{1}.8343$
2π	6.2832	0.7982	$\sqrt[3]{\pi:6}$	0.8060	$\bar{1}.9063$
3π	9.4248	0.9743	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0.6204	$\bar{1}.7926$
4π	12.5664	1.0992	$\sqrt{\pi^2}$	2.1450	0.3314
$4\pi:3$	4.1888	0.6221	e	2.7183	0.4343
$\pi:2$	1.5708	0.1961	e^2	7.3891	0.8686
$\pi:3$	1.0472	0.0200	$\sqrt{e}$	1.6487	0.2171
$\pi:4$	0.7854	$\bar{1}.8951$	$\sqrt[3]{e}$	1.3956	0.1448
$\pi:6$	0.5236	$\bar{1}.7190$	$1:e$	0.3679	$\bar{1}.5657$
$\pi:180$	0.0175	$\bar{2}.2419$	$1:e^2$	0.1353	$\bar{1}.1314$
$2:\pi$	0.6366	$\bar{1}.8039$	$\sqrt{1:e}$	0.6065	$\bar{1}.7829$
$180:\pi$	57.2958	1.7581	$\sqrt[3]{1:e}$	0.7165	$\bar{1}.8552$
10800: π	3437.7467	3.5363	$M = \ln e$	0.4343	$\bar{1}.6378$
648000: π	206264.81	5.3144	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2.3026	0.3622
$1:\pi$	0.3183	$\bar{1}.5029$	$2!$	2	
$1:2\pi$	0.1592	$\bar{1}.2018$	$3!$	6	
$1:3\pi$	0.1061	$\bar{1}.0257$	$4!$	24	
$1:4\pi$	0.0796	$\bar{2}.9008$	$5!$	120	
π^2	9.8696	0.9943	$6!$	720	
$2\pi^2$	19.7392	1.2953	$7!$	5040	
$\sqrt{\pi}$	1.7725	0.2486	$8!$	40320	
$\sqrt{2\pi}$	2.5066	0.3991	$9!$	362880	
$\sqrt{\pi:2}$	1.2533	0.0981	$10!$	3628800	
$\sqrt{1:\pi}$	0.5642	$\bar{1}.7514$	$11!$	39916800	
$\sqrt{2:\pi}$	0.7979	$\bar{1}.9019$	$12!$	479001600	
$\sqrt{3:\pi}$	0.9772	$\bar{1}.9900$			
$\sqrt{4:\pi}$	1.1284	0.0525			
$\sqrt[5]{\pi}$	1.4646	0.1657			

§ 2. 乘方根, 倒量, 圓周長, 圓面積, 自然對數

(欲求三位數的相當值, 可以應用內插法*; 這樣在末一位產生的誤差不大。)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10 n}$	$\sqrt[3]{100 n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\ln n^{**}$
1	1	1	1.000	1.000	2.154	4.642	1.000	3.14	0.785	0.0000
2	4	8	1.414	1.260	2.714	5.848	0.500	6.28	3.142	0.69315
3	9	27	1.732	1.442	3.107	6.694	0.333	9.42	7.069	1.09861
4	16	64	2.000	1.587	3.420	7.368	0.250	12.57	12.566	1.38629
5	25	125	2.236	1.710	3.684	7.937	0.200	15.71	19.635	1.60944
6	36	216	2.449	1.817	3.915	8.434	0.167	18.85	28.274	1.79176
7	49	343	2.646	1.913	4.121	8.879	0.143	21.99	38.484	1.94591
8	64	512	2.828	2.000	4.309	9.283	0.125	25.13	50.265	2.07944
9	81	729	3.000	2.080	4.481	9.655	0.111	28.27	63.617	2.19722
10	100	1000	3.162	2.154	4.642	10.000	0.100	31.42	78.540	2.30259
11	121	1331	3.317	2.224	4.791	10.323	0.091	34.56	95.033	2.39790
12	144	1728	3.464	2.289	4.932	10.627	0.083	37.70	113.097	2.48491
13	169	2197	3.606	2.351	5.066	10.914	0.077	40.84	132.73	2.56495
14	196	2744	3.742	2.410	5.192	11.187	0.071	43.98	153.94	2.63906
15	225	3375	3.873	2.466	5.313	11.447	0.067	47.12	176.72	2.70805
16	256	4096	4.000	2.520	5.429	11.696	0.062	50.27	201.06	2.77259

* 關於內插法, 參閱 II, 50.

** $\ln$ —自然對數(參閱 III, 64).

續

n	$\sqrt[n]{n^2}$	n^3	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{10n}}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\ln n$
17	289	4913	4.123	2.571	5.540	11.935	0.059	53.41	226.98	2.83321
18	324	5832	4.243	2.621	5.646	12.164	0.036	56.55	251.47	2.89037
19	361	6859	4.359	2.668	5.749	12.886	0.036	59.69	283.53	2.94444
20	400	8000	4.472	2.714	5.848	12.599	0.050	62.83	314.16	2.99573
21	441	9261	4.583	2.759	5.944	12.806	0.048	65.97	346.36	3.04452
22	484	10648	4.690	2.802	6.037	13.006	0.045	69.12	380.13	3.09104
23	529	12167	4.796	2.844	6.127	13.200	0.043	72.26	415.48	3.13549
24	576	13824	4.899	2.884	6.214	13.389	0.042	75.40	452.39	3.17805
25	625	15625	5.000	2.924	6.300	13.572	0.040	78.54	490.87	3.21838
26	676	17576	5.099	2.962	6.383	13.751	0.038	81.68	530.93	3.25810
27	729	19683	5.196	3.000	6.463	13.925	0.037	84.82	572.55	3.29584
28	784	21952	5.292	3.037	6.542	14.095	0.036	87.96	615.75	3.33220
29	841	24389	5.385	3.072	6.619	14.260	0.034	91.11	660.52	3.36730
30	900	27000	5.477	3.107	6.694	14.422	0.033	94.25	706.85	3.40120
31	961	29791	5.568	3.141	6.768	14.581	0.032	97.39	754.77	3.43399
32	1024	32768	5.657	3.175	6.840	14.736	0.031	100.53	804.25	3.46574
33	1089	35937	5.745	3.208	6.910	14.888	0.030	103.67	855.30	3.49651
34	1156	39304	5.831	3.240	6.980	15.037	0.029	106.81	907.92	3.52636
35	1225	42875	5.916	3.271	7.047	15.183	0.029	109.96	962.1	3.55535
36	1296	46656	6.000	3.302	7.114	15.326	0.028	113.10	1017.9	3.58332
37	1369	50653	6.083	3.332	7.179	15.467	0.027	116.24	1075.2	3.61092
38	1444	54872	6.164	3.362	7.243	15.605	0.026	119.4	1134.1	3.63759
39	1521	59319	6.245	3.391	7.306	15.741	0.026	122.5	1194.6	3.66356
40	1600	64000	6.325	3.420	7.368	15.874	0.025	125.7	1256.6	3.68858
41	1681	68921	6.403	3.448	7.429	16.005	0.024	128.8	1320.2	3.71357
42	1764	74088	6.481	3.476	7.489	16.134	0.024	131.9	1385.4	3.73787
43	1849	79507	6.557	3.503	7.548	16.261	0.023	135.1	1452.2	3.76120
44	1936	85184	6.633	3.530	7.606	16.386	0.023	138.2	1520.5	3.78419

I. 表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi^2}{4}$	$\ln n$
45	2025	91125	6.708	21.213	3.557	7.663	16.510	0.022	141.4	1590.4	3.80666
46	2116	97336	6.782	21.448	3.583	7.719	16.631	0.022	144.5	1661.9	3.82864
47	2209	103823	6.856	21.679	3.609	7.775	16.751	0.021	147.7	1734.9	3.85015
48	2304	110592	6.928	21.909	3.634	7.830	16.869	0.021	150.8	1809.6	3.87120
49	2401	117649	7.000	22.136	3.659	7.884	16.985	0.020	153.9	1885.7	3.89152
50	2500	125000	7.071	22.361	3.684	7.937	17.100	0.020	157.1	1963.5	3.91202
51	2601	132651	7.141	22.583	3.708	7.990	17.213	0.020	160.2	2042.8	3.93183
52	2704	140608	7.211	22.804	3.733	8.041	17.325	0.019	163.4	2123.7	3.95129
53	2809	148877	7.280	23.022	3.756	8.093	17.435	0.019	166.5	2206.2	3.97029
54	2916	157464	7.348	23.238	3.780	8.143	17.544	0.018	169.6	2290.2	3.98898
55	3025	166375	7.416	23.452	3.803	8.193	17.652	0.018	172.8	2375.8	4.00733
56	3136	175616	7.483	23.664	3.826	8.243	17.758	0.018	175.9	2463.0	4.02535
57	3249	185193	7.550	23.875	3.849	8.291	17.863	0.017	179.1	2551.8	4.04306
58	3364	195112	7.616	24.083	3.871	8.340	17.967	0.017	182.2	2642.1	4.06044
59	3481	205379	7.681	24.290	3.893	8.387	18.070	0.017	185.4	2734.0	4.07754
60	3600	216000	7.746	24.495	3.915	8.434	18.171	0.017	188.5	2827.4	4.09434
61	3721	226981	7.810	24.698	3.936	8.481	18.272	0.016	191.6	2922.5	4.11087
62	3844	238328	7.874	24.900	3.958	8.527	18.371	0.016	194.8	3019.2	4.12713
63	3969	250047	7.937	25.100	3.979	8.573	18.469	0.016	197.9	3117.2	4.14313
64	4096	262144	8.000	25.298	4.000	8.618	18.566	0.016	201.1	3217.0	4.15888
65	4225	274625	8.062	25.495	4.021	8.662	18.663	0.015	204.2	3318.3	4.17439
66	4356	287496	8.124	25.690	4.041	8.707	18.758	0.015	207.3	3421.1	4.18965
67	4489	300763	8.185	25.884	4.062	8.750	18.852	0.015	210.5	3525.6	4.20469
68	4624	314432	8.248	26.077	4.082	8.794	18.945	0.015	213.6	3631.7	4.21951
69	4761	328509	8.307	26.268	4.102	8.837	19.038	0.014	216.8	3738.3	4.23411
70	4900	343000	8.367	26.458	4.121	8.879	19.129	0.014	219.9	3848.4	4.24850
71	5041	357911	8.426	26.646	4.141	8.921	19.220	0.014	223.1	3959.2	4.26268
72	5184	373248	8.485	26.833	4.160	8.963	19.310	0.014	226.2	4071.3	4.27667